

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

NOBORU ITO

Un teorema sui gruppi transitivi di grado primo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 35, n° 1 (1965), p. 132-133

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_132_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UN TEOREMA SUI GRUPPI TRANSITIVI DI GRADO PRIMO

*Nota *) di NOBORU ITO (a Nagoya)*

Siano p, q, r ed s numeri primi dispari, tali che $p = 2q + 1 = 4r + 3 = 8s + 7$. Sia G un gruppo transitivo di permutazioni sopra l'insieme Ω costituito dagli elementi $1, 2, \dots, p$, non risolubile. In un recente lavoro ([1]: Theorem IX, Theorem VIII) abbiamo dimostrato i seguenti teoremi:

A) G è 8-volte -transitivo.

B) Il gruppo alterno A_p sopra Ω è contenuto in G , se $p - 6$ è un numero primo.

Nella presente nota, dimostriamo in generale il

TEOREMA: *Il gruppo alterno A_p è un sottogruppo di G .*

1. - Procediamo per assurdo, supponendo che A_p non sia contenuto in G .

Siano P e Q i massimi sottogruppi di G che tengono fissi rispettivamente gli elementi $1, 2, \dots, 7$ ed $1, 2, \dots, 8$. Poichè G è 8-volte -transitivo, per il teorema A), l'indice di Q in P è uguale a $p - 7 = 8s$. Inoltre in base ad un risultato di PARKER-NIKOLAI [4], s deve essere non troppo piccolo, cioè $s > 500$. Dunque ogni s -sottogruppo di Sylow di G è diverso dal sotto-

*) Pervenuta in redazione il 7 ottobre 1964.

Indirizzo dell'A.: Depart. of Math., Nagoya University, Nagoya-Japan.

gruppo identico, è abeliano elementare e fissa esattamente 7 simboli di Ω . Essendo G 8-volte -transitivo, possiamo supporre che un s -sottogruppo di Sylow S di G sia contenuto in P .

Siano $\{1\}$, $\{2\}$, ..., $\{7\}$, L_1 , L_2 , ..., L_8 le orbite di S sopra Ω . Le orbite L_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) hanno allora la lunghezza s .

2. - Sia $N_s S$ il normalizzante di S in G . Poichè G è 8-volte -transitivo, $N_s S$ è 7-volte -transitivo sopra l'insieme $\{1, 2, \dots, 7\}$, per un teorema di WITT [5]. Dunque $N_s S$ contiene un elemento T che ha la struttura ciclica $(1)(2)(34567)\dots$. Allora possiamo supporre che l'ordine di T è una potenza di 5. Dunque T fissa almeno tra fra le orbite L_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), per esempio, L_1, L_2 ed L_3 . Se T fissa tutti i simboli di L_1, L_2 ed L_3 , T fissa almeno $3s + 2$ elementi di Ω . Ma allora per un teorema interessante di LUTHER-MANNING ([2], [3]: in particolare [3], Theorem IV) A_p è contenuto in G , tenuto presente che G è 8-volte transitivo. Ciò è una contraddizione alla nostra ipotesi. Dunque T induce una permutazione non identica sopra almeno uno degli insiemi L_1, L_2 ed L_3 , ad es. L_1 ; tale permutazione indotta indicheremo con T/L_1 . Similmente S induce un gruppo di permutazioni sopra L_1 , che indicheremo con S/L_1 . Allora l'ordine di S/L_1 è uguale ad s . Evidentemente T/L_1 può essere considerato un automorfismo non identico di S/L_1 . Ne segue la congruenza $s \equiv 1 \pmod{5}$. Ma allora si hanno le relazioni $r = 2s + 1 \equiv 3 \pmod{5}$, $q = 2r + 1 \equiv 2 \pmod{5}$ e $p = 2q + 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Ciò è assurdo e il teorema risulta dimostrato.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ITO N.: *Transitive permutation groups of degree $p = 2q + 1$, p and q being prime numbers*. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 165-192.
- [2] LUTHER C. F.: *Concerning primitive groups of class u . I*. Amer. J. Math. 55 (1933), 77-101; II, Amer. J. Math. 55(1933), 611-618.
- [3] MANNING W. A.: *The degree and class of multiply transitive groups*. III. Trans, Amer Math. Soc. 35 (1933), 585-599.
- [4] PARKER E. T. e NIKOLAI P. J.: *A search for analogues of the Mathieu groups*. Math. Comp. 12 (1958), 38-43.
- [5] WITT: E.: *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1938), 265-264.