Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Gabriele Andreassi
Giovanni Torelli

Su una equazione di tipo iperbolico non lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 134-147
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_134_0>

SU UNA EQUAZIONE DI TIPO IPERBOLICO NON LINEARE

Nota *) *di* GABRIELE ANDREASSI *e di* GIOVANNI TORELLI (*a Trieste*) **)

In un lavoro di recente pubblicazione [1] Lions e Strauss hanno studiato il problema misto per l'equazione (nel campo reale):

$$- \Delta\, u(t) + u''(t) + \beta(u'(t)) = f(t)\,,$$

dove Δ è l'operatore di Laplace, $u' = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u'' = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\beta(u') = |u'|^{\varrho-1} u'$ $(\varrho < 1)$, con le condizioni di annullamento di u e u' per $t = 0$ e di annullamento di u sulla frontiera del dominio, per $t \geqslant 0$.

Precisamente (con le notazioni stesse degli A.A. citati) siano: Ω un aperto qualunque di R^n di frontiera Γ;

$$H = L^2(\Omega)\,, \quad W = L^{\varrho+1}(\Omega)\,,$$
$$H^1(\Omega) = \{v : v,\, \partial v \partial x_i \in L^2(\Omega)\} \qquad i = 1, 2, \dots, n;$$

(consideriamo questi spazi muniti della solita norma);
$V = H_0^1(\Omega)$ chiusura in $H^1(\Omega)$ del sottospazio delle funzioni a supporto compatto contenuto in Ω; se X è uno spazio di Banach,

---

*) Pervenuta in redazione il 20 ottobre 1964.
Indirizzo degli A.A.: Istituto di Matematica dell'Università di Trieste.
**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca N. 24 del C.N.R. (Comitato per la Matematica).

$L^p(O, T, X)$ è lo spazio delle (classi di) funzioni f, fortemente misurabili, a valori in X, tali che: $\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt < \infty$ (solita modifica per $p = \infty$)

per $u, v \in V$: $a(u, v) = \int_\Omega (\text{grad } u) \cdot (\text{grad } v) dx$

per $f, g \in H$ (oppure $f \in W$, $g \in W'$ duale di W): $(f, g) = \int_\Omega fg dx$.

Nel lavoro citato, il problema in questione viene tradotto in questi termini: supponendo $f \in L^2(O, T; H)$, trovare una funzione $u(t) \in L^\infty(O, T; V)$ con $u'(t) \in L^\infty(O, T; H) \cap L^{\varrho+1}(O, T; W)$ tale che sia:

$$\int_0^T [a(u(t), v(t)) - (u'(t), v'(t)) + (\beta(u'(t)), v(t))] dt = \tag{1}$$
$$= \int_0^T (f(t), v(t)) dt$$

per qualunque $v \in L^2(O, T; V) \cap L^{\varrho+1}(O, T; W)$ per cui $v(T) = 0$.

Gli A.A. dimostrano che questo problema ha una ed una sola soluzione.

Gli A.A. citati hanno recentemente steso il loro metodo ad una classe più vasta di equazioni, mantenendo però sempre l'ipotesi che il termine non lineare sia monotono ([2], parte II).

Nella prima parte del presente lavoro si introduce una variante al metodo seguito da Lions e Strauss in [1], così da mettere in evidenza che, *per la stessa successione approssimante* $u_m(t)$ *considerata da questi A.A. si ha la convergenza forte in* V *per ogni* $t \in [O, T]$, *inoltre* $u'_m(t)$ *converge fortemente in* H *per ogni* $t \in [O, T]$ *e* $u'_m(t)$ *converge fortemente in* $L^{\varrho+1}(O, T; W)$.

Nella seconda parte si toglie l'ipotesi di monotonia per il termine non lineare; precisamente si dimostra che:

il problema posto ha una ed una sola soluzione se, fermi restando gli altri dati, si sostituisce alla funzione β una funzione $\beta^* = \beta + \gamma$, dove γ è tale che

$$|\gamma(\xi_1) - \gamma(\xi_2)| \leqslant h|\xi_1 - \xi_2| \qquad (h \text{ costante}) \tag{2}$$

La dimostrazione è ottenuta per mezzo di approssimazioni successive, secondo il semplice schema;

$$-\Delta\, u_{n+1}(t) + u''_{n+1}(t) + \beta(u'_{n+1}(t)) = f(t) - \gamma(u'_n(t))$$

Si fa dunque vedere che, in questo caso, in cui l'equazione si presenta lineare rispetto ai termini di grado più elevato, l'ipotesi di monotonia non è essenziale.

1. – Siano $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$ una successione di elementi di $V \cap W$, tale che qualunque sia m : $w_1, w^2, \dots, w_m$ siano linearmente indipendenti e che le loro combinazioni lineari, $\sum_{i=1}^{m} \xi_i w_i$ ($\xi_i \in R$) siano dense in $V \cap W$. Si definisce $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i$ come la soluzione del problema [1]:

$$\begin{aligned} &(u''_m(t), w_i) + a(u_m(t), w_i) + (\beta(u'_m(t)), w_i) = (f(t), w_i) \\ &g_{im}(0) = g'_{im}(0) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m)\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Si verificano le seguenti disuguaglianze (che assicurano, in primo luogo, l'esistenza di $u_m(t)$ in tutto l'intervallo $[0, T]$):

$$\begin{aligned} &\|u_m(t)\| \leqslant c \qquad |u'_m(t)| \leqslant c \\ &\int_0^t \|u'_m(s)\|_W ds \leqslant c \qquad \forall\, t \in [0, T] \end{aligned} \tag{1.2}$$

[1]) Indichiamo, come d'uso, con $\|\ \|$ e $((\ ))$, rispettivamente, la norma ed il prodotto scalare in V con $|\ |$ e $(\ )$, rispettivamente, la norma ed il prodotto scalare in H, a meno che gli spazi non siano esplicitamente indicati.

con c indipendente da t e da m. Dall'ultima disuguaglianza si ricava immediatamente che $\beta(u'_m(t))$ risulta limitata in $L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(0, T; W')$.

Integrando fra 0 e τ, $\tau \in [0, T]$, la (1.1) si ottiene:

$$(1.3)\qquad \begin{aligned} &(u'_m(\tau), w_i) + \int_0^\tau [a(u_m(t), w_i) + (\beta(u'_m(t)), w_i)]dt = \\ &= \int_0^\tau (f(t), w_i)dt\,. \end{aligned}$$

Ponendo ora nelle (1.3), prima $\tau = \tau''$, e poi $\tau = \tau'$, e facendo la differenza a membro *a membro*, si ottiene:

$$(1.4)\qquad \begin{aligned} &(u'_m(\tau''), w_i) - (u'_m(\tau'), w_i) = \\ &= \int_{\tau'}^{\tau''} [-\, a(u_m(t), w_i) - (\beta(u'_m(t)), w_i) + (f(t), w_i)]dt\,. \end{aligned}$$

Ora, per le (1.2), essendo c indipendente da m, si deduce che esiste una funzione reale: $\psi_i(\xi)$, definita per $\xi \geqslant 0$, infinitesima per $\xi \to 0$, indipendente da m, tale che:

$$\left| \int_{\tau'}^{\tau''} [-\, a(u_m(t), w_i) - (\beta(u'_m(t)), w_i) + (f(t), w_i)]dt \right| \leqslant \psi_i(|\tau'' - \tau'|)\,.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\tau'}^{\tau''} [-\, a(u_m(t), w_i) - (\beta(u'_m(t)), w_i) + (f(t), w_i)]dt \right| \leqslant \\ &\leqslant \int_{\tau'}^{\tau''} [|a(u'_m(t), w_i)| + |(\beta(u'_m(t)), w_i)| + |(f(t), w_i)|]dt \leqslant \\ &\leqslant \int_{\tau'}^{\tau''} [\|u_m(t)\| \|w_i\| + \|u'_m(t)\|_W^{\varrho} \|w_i\|_W + |f(t)|\, |w_i|]dt\,, \end{aligned}$$

come si deduce dalle maggiorazioni:

$$|a(u_m(t), w_i)| \leqslant \|u_m(t)\| \, \|w_i\|$$

$$|(\beta(u_m'(t)), w_i)| \leqslant \|\beta(u_m'(t))\|_{W'} \, \|w_i\|_W =$$

$$= \left[\int_\Omega |u_m'(t)|^{\varrho+1} dx\right]^{\frac{\varrho}{\varrho+1}} \|w_i\|_W = \|u_m'(t)\|_W^{\varrho} \, \|w_i\|_W \, .$$

Applicando ora la disuguaglianza di Hölder, risulta:

$$\left|\int_{\tau'}^{\tau''} [-\, a(u_m(t)\, w_i) - \beta(u_m'(t)), w_i) + (f(t), w_i)]\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{\tau'}^{\tau''} \|u_m(t)\|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \|w_i\| \, |\tau'' - \tau'|^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \left[\int_{\tau'}^{\tau''} \|u_m'(t)\|^{\varrho+1} dt\right]^{\frac{\varrho}{\varrho+1}} \|w_i\|_W \, |\tau'' - \tau'|^{\frac{1}{\varrho+1}} +$$

$$+ |w_i| \left[\int_{\tau'}^{\tau''} |f(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} |\tau'' - \tau'|^{\frac{1}{2}} \leqslant \psi_i(|\tau'' - \tau'|) \, ,$$

dove le ψ_i possono essere ovviamente definite, in virtù delle maggiorazioni (1.2), in modo da soddisfare alle condizioni volute. Si ha dunque:

$$|(u_m'(\tau''), w_i) - (u_m'(\tau'), w_i)| \leqslant \psi_i(|\tau'' - \tau'|) \, . \tag{1.5}$$

Questa disuguaglianza, per la limitatezza di $u_m'(t)$ in H e per il fatto che le combinazioni lineari degli elementi $\{w_i\}$ sono dense in H, permette di affermare che le funzioni u_m' sono egualmente continue come funzioni $[0, T] \xrightarrow{u_m} H$ dotato di topologia debole.

Si può ora dimostrare che le funzioni u_m sono pure egualmente continue come applicazioni $[0, T] \xrightarrow{u_m} V$ dotato di topologia debole. Teniamo presente che l'operatore $B = -\Delta + I$, il quale può ritenersi definito dalla relazione:

$$((u, w)) = (u, Bw)$$

ha dominio di definizione denso in V. Prendendo pertanto w in esso si ha:

$$((u_m(t), w)) = (u_m(t), Bw) ;$$

ora per la (1.2):

$$|((u_m(\tau'') - u_m(\tau'), w))| = |(u_m(\tau'') - u_m(\tau'), Bw)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\tau'}^{\tau''} |(u_m'(t), Bw)| dt \leqslant \int_{\tau'}^{\tau''} 2c|Bw| dt = 2c|Bw| \, |\tau'' - \tau'| .$$

La eguale continuità di $u_m(t)$ risulta allora facilmente dal fatto che il dominio di definizione dell'operatore B è denso in V, e che, per la (1.2), $\|u_m(t)\| \leqslant c$.

Si può quindi estrarre una successione parziale $\{u_\nu\}$, tale che:

(1.6) $$u(t)_\nu \longrightarrow u(t)$$

uniformemente, nella topologia debole di V,

(1.7) $$u(_\nu t) \longrightarrow u'(t)$$

uniformemente, nella topologia debole di H,
essendo $u(t)$ una funzione che risulterà debolmente continua in V, con derivata debolmente continua in H. Si può anche supporre che sia:

(1.8) $$u_\nu' \longrightarrow u' \qquad \text{in } L^{\varrho+1}(0, T; W)$$

dotato di topologia debole.

(1.9) $$\beta(u_\nu') \longrightarrow g \qquad \text{in } L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(0, T; W')$$

dotato di topologia debole,

Si può allora scrivere per ogni $t \in [0, T]$:

$$|u'(t)|^2 \leqslant \underline{\lim}\, |u'_\nu(t)|^2 \tag{1.10}$$

$$\|u(t)\|^2 \leqslant \underline{\lim}\, \|u_\nu(t)\|^2 , \quad a(u(t), u(t)) \leqslant \underline{\lim}\, a(u_\nu(t), u_\nu(t)) . \tag{1.11}$$

Inoltre:

$$\int_0^t (g(s), u'(s))ds \leqslant \underline{\lim} \int_0^t (\beta(u'_\nu(s)), u'_\nu(s))ds \tag{1.12}$$

La (1.12) si giustifica facilmente ricordando che $\beta(u')$ è una funzione non decrescente di u'; infatti:

$$\int_0^t (\beta(u'_\nu(s)), u'_\nu(s))ds - \int_0^t (g(s), u'(s))ds =$$

$$= \int_0^t (\beta(u'_\nu(s)) - \beta(u'(s)), u'_\nu(s) - u'(s))ds +$$

$$+ \int_0^t (\beta(u'(s)), u'_\nu(s) - u'(s))ds + \int_0^t (\beta(u'_\nu(s)) - g(s), u'(s))ds .$$

Ora il primo addendo è non negativo perchè $\beta(u')$ è una funzione non decrescente, il secondo addendo è infinitesimo per la (1.8) ed il terzo addendo è infinitesimo per la (1.9); ciò prova che:

$$\underline{\lim} \int_0^t (\beta(u'_\nu(s)), u'_\nu(s))ds - \int_0^t (g(s), u'(s))ds \geqslant 0 .$$

La $u(t)$ soddisfa evidentemente all'equazione:

$$\int_0^T [a(u(t), v(t)) - (u'(t), v'(t)) + (g(t), v(t))]dt = \int_0^T (f(t), v(t))dt \tag{1.13}$$

essendo v una qualunque funzione tale che:

$$v \in L^2(0, T; V) \cap L^{\varrho+1}(0, T; W) ,$$
$$v(T) = 0 .$$

Ora si può scrivere per le (1.10), (1.11), (1.12), per qualsiasi $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= |u'(t)|^2 + a(u(t), u(t)) + 2 \int_0^t (g(s), u'(s))ds \leqslant \\
&\leqslant \underline{\lim}\, |u_\nu'(t)|^2 + \underline{\lim}\, a(u_\nu(t), u_\nu(t)) + 2\, \underline{\lim} \int_0^t (\beta(u_\nu'(s)), u_\nu'(s))ds \leqslant \\
&\leqslant \underline{\lim} \left[|u_\nu'(t)|^2 + a(u_\nu(t), u_\nu(t)) + 2 \int_0^t (\beta(u_\nu'(s)), u_\nu'(s))ds \right] = \\
&= \underline{\lim}\, 2 \int_0^t (f(s), u_\nu(s))ds = 2 \int_0^t (f(s), u(s))ds = \mathcal{B} .
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Ma per la soluzione della (1.13) vale la relazione dell'energia [2]) che afferma essere $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Perciò nelle relazioni precedenti valgono solo i segni di eguaglianza, e quindi, tenendo sempre conto delle (1.10), (1.11), (1.12), si può scrivere:

$$(u'(t)|^2 = \underline{\lim}\, |u_\nu'(t)|^2$$
$$a(u(t), u(t)) = \underline{\lim}\, (a(u_\nu(t), u_\nu(t))$$
$$\int_0^t (g(s), u'(s))ds = \underline{\lim} \int_0^t (\beta(u_\nu'(s)), u_\nu'(s))ds$$

per ogni $t \in [0, T]$.

Premettiamo ora il seguente lemma, di ovvia dimostrazione:

---

[2]) Ciò discende, con ovvie modifiche, dal risultato contenuto nel lavoro [3].

LEMMA. – *Siano* $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, *tre successioni, tali che*: $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) = l$ ed inoltre $\underline{\lim}_{n\to\infty}\alpha_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}\beta_n + \underline{\lim}_{n\to\infty}\gamma_n = l.$ Allora esistono:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\,,\quad \lim_{n\to\infty}\beta_n\,,\quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n\,.$$

Da questa lemma, per la relazione dell'energia sopra citata, risulta che nella (1.14) esistono separatamente i tre limiti per ogni $t\in[0, T]$:

$$\lim |u'_\nu(t)|^2 = |u'(t)|^2 \tag{1.15}$$

$$\lim a(u_\nu(t), u_\nu(t)) = a(u(t), u(t)) \tag{1.16}$$

$$\lim \int_0^t (\beta(u'_\nu(s)), u'_\nu(s))ds = \int_0^t (g(s), u'(s))ds \tag{1.17}$$

da cui risulta la convergenza forte di $u'_\nu(t)$ verso $u'(t)$ in H per qualsiasi $t\in[0, T]$ e la convergenza forte di $u_\nu(t)$ verso $u(t)$ in V per ogni $t\in[0, T]$.

Si dimostra, come nel lavoro [1] che $\beta(u') = g$. Del resto ciò si può pure dimostrare, tenendo presente che $u'_\nu(t)$ converge, per quanto visto sopra, verso $u'(t)$ in $L^2(0, T; H)$ e che, pertanto, $u'(t)$, $u'_\nu(t)$ con le funzioni $u'(x, t)$, $u'_\nu(x, t)$ rispettivamente, definite in $\Omega\cdot[0, T]$, dalla successione $u'_\nu(x, t)$ si può estrarre una successione parziale convergente verso $u'(x, t)$ quasi ovunque in $\Omega\cdot[0, T]$.

Supponendo, per semplicità, che questa successione sia ancora u'_ν, si ha:

$$g(x, t) = \lim \beta(u'_\nu(x, t)) = \beta(u'(x, t))$$

quasi ovunque in $\Omega\cdot[0, T]$.

La (1.17) per $t = T$ può pertanto essere scritta in questi termini:

$$\lim \int_0^T (\beta(u'_\nu(s)), u'_\nu(s))ds = \int_0^T (\beta(u'(s)), u'(s))ds$$

ma essendo

$$\int_0^T (\beta(u_\nu'(s)), u_\nu'(s))ds = \|u_\nu'\|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}(O,T;W)}$$

e

$$\int_0^T (\beta(u'(s)), u'(s))ds = \|u'\|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}(O,T;W)}$$

risulta:

$$\lim \|u_\nu'\|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}(O,T;W)} = \|u'\|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}(O,T;W)}$$

da cui segue la convergenza forte della successione $\{u_\nu'\}$ in $L^{\varrho+1}(0, T; W)$ verso u'.

Giacchè la soluzione del nostro problema è unica, come si può anche provare direttamente utilizzando la relazione dell'energia, si deduce che le relazioni di convergenza dimostrate sussistono, non solo per la successione parziale $\{u_\nu\}$, ma per la stessa successione $\{u_m\}$.

2. – Consideriamo il problema misto per l'equazione:

$$-\Delta\, u(t) + u''(t) + \beta^*(u'(t)) = f(t)$$

ove:

$$\beta^*(u'(t)) = \beta(u'(t)) + \gamma(u'(t))$$

essendo γ una funzione soddisfacente alle (2).

Il problema si traduce nell'equazione:

$$\int_0^T [a(u(t), v(t)) - (u'(t), v'(t)) + (\beta(u'(t)), v(t))]dt =$$

$$= \int_0^T [(f(t), v(t)) - (\gamma(u'(t)), v(t))]dt \qquad (2,1)$$

$\forall\ v \in L^2(0, T; V) \cap L^{\varrho+1}(0, T; W)$ con $v(T) = 0$, dove i dati e la classe di funzioni in cui si cerca la soluzione sono i medesimi considerati nell'introduzione.

Detta u_0 la soluzione nel nostro problema, quando si prenda, come prima, $\gamma = 0$, definiamo, per induzione, la funzione $u_n(t)$, per $n \geqslant 1$, come soluzione del problema:

$$\int_0^T [a(u(t), v(t)) - (u'(t), v'(t)) + (\beta(u'(t)), v(t))]dt = \tag{2.2}$$

$$= \int_0^T [(f(t), v(t)) - (\gamma(u'_{n-1}(t)), v(t))]dt$$

essendo v una funzione di $L^2(0, T; V) \cap L^{\varrho+1}(0, T; W)$, con $v(T) = 0$.

Si scrive ora la relazione (2.2) per n ed $n+1$ e si sottrae membro a membro; si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_0^T [a(u_{n+1}(t) - u_n(t), v(t)) - (u'_{n+1}(t) - u'_n(t), v'(t)) + \\ &\qquad + (\beta(u'_{n+1}(t)) - \beta(u'_n(t)), v(t))]dt = \\ &\qquad = - \int_0^T (\gamma(u'_n(t)) - \gamma(u'_{n-1}(t)), v(t))dt \,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dalla (2.3) si deduce la relazione dell'energia:

$$\begin{aligned} &a(u_{n+1}(t) - u_n(t), u_{n+1}(t) - u_n(t)) + |u'_{n+1}(t) - u'_n(t)|^2 + \\ &\quad + 2\int_0^t (\beta(u'_{n+1}(\xi)) - \beta(u'_n(\xi)), u'_{n+1}(\xi) - u'_n(\xi))d\xi = \\ &\quad = 2\int_0^t (\gamma(u'_n(\xi)) - \gamma(u'_{n-1}(\xi)), u'_{n+1} - u'_n)d\xi \,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

da ciò segue che:

$$|u'_{n+1}(t) - u'_n(t)|^2 \leqslant 2\int_0^t |(\gamma(u'_n(\xi)) - \gamma(u'_{n-1}(\xi)), u'_{n+1}(\xi) - u'_n(\xi))|d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 2h\int_0^t |u'_n(\xi) - u'_{n-1}(\xi))|u'_{n+1}(\xi) - u'_n(\xi)|d\xi\,.$$

Quindi (essendo $0 \leqslant \tau \leqslant T$)

$$[\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} |u'_{n+1}(t) - u'_n(t)|]^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2h\int_0^\tau |u'_n(\xi) - u'_{n-1}(\xi)|\ |u'_{n+1}(\xi) - u'_n(\xi)|d\xi \leqslant$$

$$\leqslant [\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} |u'_{n+1}(t) - u'_n(t)|]2h\int_0^t |u'_n(\xi) - u'_{n-1}(\xi)|d\xi\,,$$

da cui semplificando:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} |u'_{n+1}(t) - u'_n(t)| \leqslant 2h\int_0^\tau |u'_n(\xi) - u'_{n-1}(\xi)|d\xi\,.$$

Questa relazione, per una classico procedimento, permette di affermare che $\{u'_n(t)\}$ è uniformemente convergente in H per $0 \leqslant t \leqslant T$ e pertanto, anche $\{u_n\}$ è uniformemente convergente in H verso una $u(t)$ tale che $u'(t) = \lim\limits_{n\to\infty} u'_n(t)$.

Dalle (2.4) risulta pure che:

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant\tau} a(u_{n+1}(t) - u_n(t), u_{n+1}(t) - u_n(t)) \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^\tau |(\gamma(u'_n(\xi)) - \gamma(u'_{n-1})\xi)), u'_{n+1}(\xi) - u'_n(\xi))|d\xi \leqslant$$

$$\leqslant 4h^2\left[\int_0^\tau |u'_n(\xi) - u'_{n-1}(\xi)|d\xi\right]^2.$$

Da questa limitazione e da quanto detto sopra risulta l'uniforme convergenza di u_n verso u in V.

10

Essendo:

$$|\gamma(u_n'(t)) - \gamma(u'(t))| \leqslant h|u_n'(t) - u'(t)|$$

per ogni $t \in [0, T]$, $\gamma(u_n')$ risulta uniformemente convergente in H verso $\gamma(u(t))$.

Di conseguenza, valendo la relazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}|u_n'(t)|^2 + \frac{1}{2}a(u_n(t), u_n(t)) + \int_0^t (\beta(u_n'(\xi)), u_n'(\xi))d\xi =$$

$$= \int_0^t [(f(\xi), u_n'(\xi)) - (\gamma(u_{n-1}'(\xi)), u_n'(\xi))]d\xi$$

$\{u_n'\}$ risulta limitata in $L^{\varrho+1}(0, T; W)$; si dimostra facilmente che u_n' converge verso u' anche nella topologia debole di $L^{\varrho+1}(0, T; W)$. Risulta pure limitata, evidentemente, $\beta(u_n')$ in $L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(0, T; W')$ e quindi si può estrarre una successione parziale $\{u_\nu'\}$ tale che $\beta(u') \to \tilde{g}$ in $L^{\frac{\varrho+1}{\varrho}}(0, T; W')$ dotato di topologia debole.

Ora, analogamente a quanto fatto nella prima parte, si dimostra che $\mathcal{B}(u') = \tilde{g}$, che $\{u_\nu'\}$ converge fortemente verso u' in $L^{\varrho+1}(0, T; W)$ e che $u(t)$ è una soluzione della (2.1).

Giacchè la soluzione del nostro problema è unica, come appresso si dimostra, si deduce che le proprietà di convergenza dimostrate sussistono non solo per la successione parziale $\{u_\nu'\}$ ma per la stessa successione $\{u_n'\}$.

Si dimostra facilmente l'unicità della soluzione del problema (2). Siano $u_1(t)$ e $u_2(t)$ due soluzioni distinte di detto problema. Ponendo $u_1(t) - u_2(t) = w(t)$ ed operando nel solito modo, si ottiene la seguente relazione:

$$\int_0^T [a(w(\xi), v(\xi)) - (w'(\xi), v'(\xi)) + (\beta(u_1'(\xi)) - (\beta(u_2'(\xi)), v(\xi))]d\xi =$$

(2.5)

$$= \int_0^T (\gamma(u_2'(\xi)) - \gamma(u_1'(\xi))d\xi \, .$$

Per la relazione dell'energia, relativa alla (2.5), si può scrivere, per ogni $t \in [0, T]$:

$$a(w(t), w(t)) + |w'(t)|^2 + 2\int_0^t (\beta(u_1'(\xi)) - \beta(u_2'(\xi)), w'(\xi))d\xi =$$

$$= 2\int_0^t \gamma(u_2'(\xi)) - (\gamma(u_1'(\xi)), w'(\xi))d\xi \; ;$$

da cui, essendo $a(w(t), w(t)) \geqslant 0$ e

$$\int_0^t (\beta(u_1'(\xi)) - \beta(u_2'(\xi)), w'(\xi))d\xi \geqslant 0$$

(si ricordi che $\beta(u')$ è monotono crescente), si avrà, per ogni $t \in [0, T]$:

$$|w'(t)|^2 \leqslant 2\int_0^t \gamma(u_2'(\xi)) - (\gamma(u_1'(\xi)), w'(\xi))d\xi \geqslant 2h\int_0^t |w'(\xi)|^2 d\xi \, .$$

Da questa relazione, essendo $w(0) = 0$, segue $w(t) = 0$ per ogni $t \in [0, T]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] LIONS J. L. E STRAUSS W. A.: *Sur certains problemes hyperboliques non linéares*. C.R. Acad. Sci., Paris 257 (1963), 3267-70.

[2] LIONS E STRAUSS W. A.: *Some non-linear evolution equations*. (in corso di pubblicazione).

[3] TORELLI G.: *Un complemento ad una teorema di* J. L. LIONS *sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine*. Rend. Sem. Mat. Università Padova, **34**, 224-241 (1964).