Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Vinicio Villani

Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 47-55
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_47_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SU ALCUNE PROPRIETÀ COOMOLOGICHE DEI FASCI COERENTI SU UNO SPAZIO COMPLESSO

Nota *) *di* VINICIO VILLANI (*a Pisa*) **)

INTRODUZIONE. – Sia X uno spazio complesso nel senso di Serre, con fascio strutturale $\mathfrak{O}$; X abbia topologia con base numerabile. Nel presente lavoro si stabiliscono alcuni criteri che assicurano $H^j(X, \mathfrak{F}) = 0$ per opportuni valori di j, e per ogni fascio di $\mathfrak{O}$-moduli $\mathfrak{F}$, che sia coerente su X.

Lo spunto per queste considerazioni mi è stato dato del seguente teorema di Andreotti-Grauert [1], pag. 250:

TEOREMA: *Se lo spazio complesso X è q-completo, allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per\ j \geqslant q$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

Dato uno spazio complesso X, denoteremo con S l'insieme dei punti singolari di X. Nel presente lavoro si dimostra:

TEOREMA 1: *Ogni spazio complesso X, tale che* $\dim_{\mathbf{C}} X = n$, $\dim_{\mathbf{C}} S = 0$, *è* $(n+1)$*-completo.*

In virtù del citato teorema di Andreotti-Grauert, ne segue:

COROLLARIO: *Se X soddisfa alle ipotesi del teorema* 1, *si ha*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \quad j \geqslant n+1$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

---

*) Pervenuta in redazione il 18 maggio 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il teorema 1 ed il suo corollario valgono in particolare per ogni varietà complessa X, di dimensione complessa n. In tale caso, e sotto opportune ipotesi di natura differenziale per la varietà X, il corollario può essere migliorato:

TEOREMA 2: *Se X è una varietà complessa, di dimensione complessa n, e se esiste su X una funzione φ, differenziabile di classe C^∞, tale che:*

1) *Gli insiemi $B_c = \{x \in X;\ \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X, per ogni $c \in \mathbf{R}$;*

2) *Nei punti $x \in X$ in cui $\operatorname{grad} \varphi = 0$, la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ ha almeno un autovalore > 0; allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \quad j \geqslant n$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

Senza fare alcuna ipotesi restrittiva sull'insieme singolare S dello spazio X, si dimostra inoltre il

TEOREMA 3: *Se X è uno spazio complesso arbitrario, con $\dim_{\mathbf{C}} X = n$, $\dim_{\mathbf{C}} S = m$, allora si ha*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad per \quad j \geqslant \max(n+2, 2m+1)$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

1. Dimostriamo il teorema 1. Poichè $\dim_{\mathbf{C}} S = 0$, S consta di una totalità, eventualmente infinita, di punti isolati, siano essi $\{P_s\}$, $s = 1, 2, \ldots$. Quindi è possibile trovare due sistemi di intorni aperti $\{U_s\}$, rispettivamente $\{V_s\}$ di $\{P_s\}$, tali che:

1) U_s è relativamente compatto in X, per ogni s;

2) $\overline{U}_s \cap \overline{U}_t = \varnothing$ per ogni $s \neq t$;

3) Detto $\mathscr{T}_s$ lo spazio tangente di Zariski ad X nel punto P_s, e fissato un isomorfismo analitico π_s di un opportuno intorno W_s di P_s, in X, con un sottoinsieme analitico di $\mathscr{T}_s$, si abbia $\overline{U}_s \subset W_s$, per ogni s;

4) $\overline{V}_s \subset U_s$, per ogni s.

Sia poi $\varrho_s(x)$ una funzione differenziabile di classe C^∞ su X, tale che:

$$\begin{array}{lll} 0 \leqslant \varrho_s(x) \leqslant 1 & \text{per ogni} & x \in X \\ \varrho_s(x) = 1 & \text{per} & x \in V_s \\ \varrho_s(x) = 0 & \text{per} & x \in X - U_s \, . \end{array}$$

Sulla varietà $X - S$ esiste una funzione ψ differenziabile di classe C^∞, tale che gli insiemi $\{x \in X - S; \psi(x) < c\}$ siano relativamente compatti in $X - S$, per ogni $c \in \mathbf{R}$; per provarlo basta prendere una successione crescente $Z_1, Z_2, \ldots,$ di insiemi aperti relativamente compatti in $X - S$, tali che $\overline{Z}_h \subset Z_{h+1}$; $\bigcup Z_h = X - S$. Allora si può costruire (lemma di Urysohn) una funzione continua che vale h su $\partial \overline{Z}_h$ (per ogni intero h) e che su $Z_{h+1} - Z_h$ assume solo valori compresi tra h ed $h + 1$. Poichè le funzioni continue possono essere approssimate di quanto si vuole mediante funzioni differenziabili, ne segue subito l'esistenza di una ψ godente delle proprietà desiderate.

Si considerino poi negli spazi $\mathscr{T}_s$, di coordinate $z_1, \ldots, z_{d_s}$ ($d_s = \dim \mathscr{T}_s$) le funzioni

$$\chi_s = \varrho_s \, (s + \sum_{\alpha=1}^{d_s} z_\alpha \bar{z}_\alpha) \, .$$

Le funzioni χ_s danno luogo a delle funzioni differenziabili di classe C^∞ su X, ponendo

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \pi_s^*(\chi_s) & \text{se} \quad x \in U_s \\ 0 & \text{se} \quad x \notin U_s \, . \end{cases}$$

Si ponga infine

$$\varphi = (1 - \sum_s \varrho_s)\psi + \sum_s \psi_s \, .$$

La funzione φ è chiaramente ben definita e differenziabile. Dimostriamo che X è $(n + 1)$-completo relativamente a φ: gli insiemi $\{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X. Nei punti non singolari di X nulla si sa sugli autovalori di φ; ma in tali punti lo spazio tangente di Zariski ha dimensione n, ossia la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ è una forma in n variabili; nella più sfavorevole delle ipotesi questa forma non avrà alcun autovalore positivo in taluni di questi punti, ossia, detto $n - q + 1$

il numero degli autovalori positivi, risulterà $n - q + 1 = 0$, vale a dire $q = n + 1$. Nei punti singolari P_s, la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$, calcolata nello spazio tangente $\mathscr{T}_s$, è una forma in d_s variabili; in questo caso però, per costruzione, tutti gli autovalori sono positivi, ossia si può prendere per q un qualunque intero $\geqslant 1$. Se ne trae appunto che X è q-completo, con $q = n + 1$.

2. La funzione φ, che nel teorema 1 doveva venire costruita, viene invece data a priori nel teorema 2; se X è una varietà compatta, una funzione φ soddisfacente alle ipotesi del teorema 2 non può esistere su X (nei punti di massimo di φ, l'ipotesi 2 certamente non è verificata). Invece è facile costruire delle funzioni φ soddisfacenti alle ipotesi del teorema 2, per ampie classi di varietà non compatte; ignoro se le ipotesi del teorema 2 possono venir soddisfatte per ogni varietà complessa non compatta.

Alla dimostrazione del teorema 2 premettiamo il seguente

LEMMA: *Ipotesi e notazioni siano come nel teorema* 2. *Per ogni* $c \in \mathbf{R}$ *la varietà* B_c *è* n*-completa, relativamente alla funzione* $\dfrac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$, *ove* K *è una costante positiva opportunamente grande.*

DIMOSTRAZIONE: La funzione $\dfrac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$ è ben definita su B_c. Sia Δ_c l'insieme dei punti di $\overline{B}_c$, in cui $\operatorname{grad} \varphi = 0$. Sia U_c un intorno aperto di Δ_c in X, tale che in tutti i punti x di U_c la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ abbia almeno un autovalore positivo; ciò è possibile per via dell'ipotesi 2 del teorema 2, e per via della continuità degli autovalori di $\mathscr{L}(\varphi, x)$, al variare del punto x. L'insieme $D_c = \overline{B}_c - U_c \cap \overline{B}_c$ è un compatto che ha intersezione vuota con Δ_c.

Sia $V_1, \dots, V_s$ un ricoprimento di D_c, costituito da un numero finito di carte locali di X, tali che ciascun V_ϱ sia contenuto come sottoinsieme relativamente compatto in una carta locale W_ϱ. Poniamo

$$\mu_\varrho = \min_{x \in \overline{V}_\varrho} (\operatorname{grad} \varphi \times \overline{\operatorname{grad} \varphi}) = \min_{x \in \overline{V}_\varrho} \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial z_\alpha} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \bar{z}_\alpha} ,$$

ove $z_1, \dots, z_n$ sono le coordinate locali in W_ϱ.

Poniamo poi

$$\mu = \min_{\varrho=1,\dots,s} \mu_\varrho .$$

Il numero μ è positivo. Poniamo ora

$$M_\varrho = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ x \in \overline{V}_\varrho}} |\mathscr{L}(\varphi, x)(v)| ;$$

infine sia

$$M = \max_{\varrho=1,\dots,s} M_\varrho .$$

La tesi del lemma è verificata, prendendo per K una qualunque costante che verifichi la disuguaglianza $K\mu > M$. Infatti si ha:

$$\mathscr{L}\left(\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}, x\right)(v) = \frac{Ke^{K\varphi}}{(e^{Kc} - e^{K\varphi})^2} (\mathscr{L}(\varphi, x)(v) +$$

$$+ K|\operatorname{grad}\varphi \times v|^2) + 2\frac{(Ke^{K\varphi})^2}{(e^{Kc} - e^{K\varphi})^3} |\operatorname{grad}\varphi \times v|^2 .$$

L'ultimo addendo è sempre $\geqslant 0$; poichè il coefficiente del primo addendo è positivo, basta far vedere che in ciascun punto $x \in B_c$ la forma $\mathscr{L}(\varphi, x)(v) + K|\operatorname{grad}\varphi \times v|^2$ assume valore > 0 in una direzione v. Ora se $x \in U_c$ l'addendo $\mathscr{L}(\varphi, x)(v)$ è positivo almeno su una direzione v, per come U_c è stato costruito, e l'addendo $K|\operatorname{grad}\varphi \times v|^2$ è certo $\geqslant 0$. Se invece $x \in D_c$, la tesi si verifica prendendo v nella direzione individuata da $\overline{\operatorname{grad}\varphi}$, e ricordando la disuguaglianza $K\mu > M$.

Inoltre gli insiemi $\dfrac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}} < C$ sono relativamente compatti in B_c, per ogni $C \in \mathbf{R}$. Ciò prova il lemma.

Osservazione: Più precisamente gli insiemi $\dfrac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}} < C$ sono della forma

$$B_{c^\circ} = \{x \in X ; \varphi(x) < c^0\} ,$$

con $c^0 = \frac{1}{K} \log \left(e^{Kc} - \frac{1}{C} \right)$, ossia le funzioni φ e $\frac{1}{e^{Kc} - e^{K\varphi}}$ hanno in B_c le medesime superficie di livello. Questa osservazione sarà essenziale per concludere la dimostrazione che ora daremo del teorema 2.

Sia $\mathfrak{A}$ un ricoprimento di X, adattato al fascio $\mathfrak{F}$, e tale che per ogni fissato intero m, gli aperti di $\mathfrak{A}$ aventi intersezione non vuota con $\overline{B}_m$ siano tutti contenuti in B_{m+1}. Allora per ogni m il ricoprimento $\mathfrak{A}$ può essere sostituito con un ricoprimento $\mathfrak{B}$ di B_{m+2}, adattato ad $\mathfrak{F}$ su B_{m+2}, e tale che le restrizioni di $\mathfrak{A}$ e di $\mathfrak{B}$ a B_{m+1} coincidano [1]).

Tenuto conto della coincidenza di questi due ricoprimenti su B_{m+1}, e del lemma dimostrato sopra, si può applicare la proposizione 19 di [1], nella dimensione $q = n$, ossia esiste un $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \leqslant 1$) tale che l'applicazione

$$Z^{n-1}(\mathfrak{A}|B_{m+\varepsilon},\ \mathfrak{F}) \to Z^{n-1}(\mathfrak{A}|B_m,\ \mathfrak{F})$$

ha immagine densa. Si noti che qui viene sfruttata l'osservazione fatta al termine della dimostrazione del lemma; infatti B_m, $B_{m+\varepsilon}$, che sono definiti attraverso le superficie di livello della funzione φ, sono altresì definibili tramite le superficie di livello della funzione introdotta nel lemma, che dà la n-completezza di B_{m+2}.

Per far vedere che si può scegliere $\varepsilon = 1$ basta applicare un numero finito di volte la proposizione 20 di [1], nella quale va notato che l'ipotesi «il ricoprimento $\mathfrak{A}$ sia adattato ad $\mathfrak{F}$» è inessenziale.

Possiamo ora utilizzare il lemma di [1], pag. 250, per $r = n$, da cui segue appunto $H^n(X, \mathfrak{F}) \simeq H^n(\varnothing, \mathfrak{F}) = 0$.

OSSERVAZIONE: Con una dimostrazione perfettamente analoga a quella del teorema 2, si prova altresì il teorema seguente:

Se X è una varietà complessa, di dimensione complessa n, e

---

1) Questa precisazione è necessaria, in quanto la restrizione di un ricoprimento adattato ad $\mathfrak{F}$ su X, non è più necessariamente un ricoprimento adattato ad $\mathfrak{F}$ su B_m.

se esiste su X una funzione φ, differenziabile di classe C^∞, tale che: 1) *Gli insiemi $B_c = \{x \in X; \varphi(x) < c\}$ sono relativamente compatti in X, per ogni $c \in \mathbf{R}$;*

2) *Nei punti $x_0 \in X$ in cui* grad $\varphi \neq 0$, *la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x_0)$, ristretta all'iperpiano complesso tangente all'ipersuperficie $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, ha almeno $n - q$ autovalori > 0; nei punti $x \in X$ in cui* grad $\varphi = 0$, *la forma di Levi $\mathscr{L}(\varphi, x)$ ha almeno $n - q + 1$ autovalori > 0. Allora*

$$H^j(X, \mathfrak{F}) = 0 \quad \text{per} \quad j \geqslant q\,,$$

e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

3. La dimostrazione del teorema 3 fa uso della successione esatta di Mayer-Vietoris, stabilita in [1], che qui ricordiamo brevemente:

Siano: X uno spazio topologico, X_1, X_2 due suoi sottoinsiemi aperti tali che $X = X_1 \cup X_2$. Sia poi $\mathfrak{F}$ un fascio di gruppi abeliani su X. Allora si ha la successione esatta di coomologia:

$$0 \to H^0(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} H^0(X_1, \mathfrak{F}) \oplus H^0(X_2, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta} H^0(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \to$$
$$\to H^1(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} \cdots\cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\beta} H^j(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \to$$
$$\to H^{j+1}(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\alpha} H^{j+1}(X_1, \mathfrak{F}) \oplus H^{j+1}(X_2, \mathfrak{F}) \xrightarrow{\beta} H^{j+1}(X_1 \cap X_2, \mathfrak{F}) \to \cdots$$

ove, indicate rispettivamente con $\tau_\lambda : X_\lambda \to X (\lambda = 1, 2)$ e con $\sigma_\lambda : X_1 \cap X_2 \to X_\lambda$ $(\lambda = 1, 2)$ le iniezioni naturali, gli omomorfismi α e β sono definiti da:

$$\begin{aligned} &\alpha(\xi) = \tau_1^*(\xi) \oplus \tau_2^*(\xi) && \xi \in H^j(X, \mathfrak{F}) \\ &\beta(\xi_1 \oplus \xi_2) = \sigma_1^*(\xi_1) - \sigma_2^*(\xi_2) && \xi_1 \in H^j(X_1, \mathfrak{F}) \\ & && \xi_2 \in H^j(X_2, \mathfrak{F})\,. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo dimostrare il teorema 3. Sia U un intorno aperto dell'insieme S dei punti singolari di X; dimostriamo in primo luogo che l'omomorfismo naturale di restrizione

$$H^j(X, \mathfrak{F}) \to H^j(U, \mathfrak{F})$$

è un isomorfismo per $j \geqslant n+2$. A tal fine poniamo $V = X - S$, e consideriamo la successione esatta di Mayer-Vietoris:

$$\ldots \to H^{j-1}(U \cap V, \mathfrak{F}) \to H^j(X, \mathfrak{F}) \to$$
$$\to H^j(U, \mathfrak{F}) \oplus H^j(V, \mathfrak{F}) \to H^j(U \cap V, \mathfrak{F}) \to \ldots;$$

se $j \geqslant n+2$, dal corollario al teorema 1 (applicabile in quanto V e $U \cap V$ sono varietà) risulta: $H^{j-1}(U \cap V, \mathfrak{F}) = 0$; $H^j(U \cap V, \mathfrak{F}) = 0$; $H^j(V, \mathfrak{F}) = 0$, per cui la successione sopra scritta diviene semplicemente

$$0 \to H^j(X, \mathfrak{F}) \xrightarrow{r_1^*} H^j(U, \mathfrak{F}) \to 0\,,$$

il che prova l'isomorfismo voluto.

Ne segue che il limite diretto $\lim\limits_{U \supset S} \operatorname{ind} H^j(U, \mathfrak{F})$, al variare di U nella famiglia degli intorni aperti di S in X, coincide con $H^j(X, \mathfrak{F})$. D'altra parte questo limite diretto è isomorfo con $H^j(S, \mathfrak{F})$ (cfr. [2], teorema 4.11.1); onde abbiamo provato l'isomorfismo $H^j(X, \mathfrak{F}) \simeq H^j(S, \mathfrak{F})$ per ogni $j \geqslant n+2$, e per ogni fascio $\mathfrak{F}$ coerente su X.

Il fascio $\mathfrak{F}$, ristretto ad S, in generale non si può interpretare come fascio coerente su S; tuttavia, se S ha dimensione complessa m, ossia dimensione topologica $2m$, si ha certamente $H^j(S, \mathfrak{F}) = 0$ per $j \geqslant 2m+1$; ne risulta la tesi del nostro teorema [1]).

Osservazione: La tesi del teorema 3 è non banale, purchè sia $n \geqslant 2$, perchè in tal caso si ha $\max(n+2, 2m+1) \leqslant 2n =$ $=$ dim. topologica di X. Invece il teorema 3 diventa banale per

---

[2]) Il teorema 5 di [4] prova che S ha dimensione topologica $2m$, intendendo per dimensione topologica la dimensione definita nel cap. III di Hurewicz-Wallman, *Dimension Theory* (cfr. anche [3], pag. 162). Il teorema 4 (pag. 181) di [3], applicabile poichè S ha topologia con base numerabile, dimostra che S ha dimensione topologica $2m$ anche nel senso del numero di Lebesgue; da quest'ultima caratterizzazione della dimensione segue appunto $H^j(S, \mathfrak{F}) = 0$, per $j \geqslant 2m+1$.

$n = 1$. Ma in tale caso siamo senz'altro nelle ipotesi del teorema 1, il cui corollario dà a sua volta informazioni non banali sulla coomologia dello spazio complesso X, a valori in un fascio coerente $\mathfrak{F}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A., GRAUERT H.: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*. Bull. Soc. Math. France, 90, p. 193-259, 1962.

[2] GODEMENT R.: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, Hermann, 1958.

[3] KURATOWSKI C.: *Topologie* I (2ª ed.), Warszawa, 1948.

[4] VILLANI V.: *Sulle varie nozioni di dimensione per un insieme analitico*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie III, 17, p. 141-173, 1963.