RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO MARINO

Su un problema di media ergodica per operatori non permutabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 65-70

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_65_0>

SU UN PROBLEMA DI MEDIA ERGODICA PER OPERATORI NON PERMUTABILI

Nota *) di ANTONIO MARINO (a Trieste) **)

Il « mean ergodic theorem » di J. VON NEUMANN [1], apparso nel 1931, può essere espresso nel seguente modo:

se T è un operatore unitario in uno spazio di HILBERT H, allora la successione:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k T^k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge fortemente per ogni vettore di H.

In seguito (1938) RIESZ, VISSER, KAKUTANI e YOSIDA [2] dimostrarono la validità del teorema anche nel caso che T sia un operatore lineare completamente debolmente continuo, definito in uno spazio di Banach, con $\| T^n \| \leqslant C$.

Nel 1944 [3] RIESZ ha dato la seguente formulazione generale di un problema di media ergodica in cui intervengono due operatori anche non permutabili U e V, tali che $\| U \| \leqslant 1$ e $\| V \| \leqslant 1$. Precisamente: si considerino nel piano i punti a coordinate intere positive; alla coppia (h, k) si faccia corrispon-

*) Pervenuta in redazione il 30 maggio 1964.
Indirizzo dell'A. via Combi, 21 Trieste.

**) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 24 del C.N.R., Comitato per la Matematica.

dere il prodotto $U^h V^k$ e, infine, presa una successione di figure C_n convesse, si prenda la media degli operatori rappresentati dai punti contenuti nella figura. Il problema è quello dell'esistenza di un limite per la media, nell'ipotesi che il numero di punti compresi in C_n tenda all'infinito con n.

Nell'ipotesi che U e V commutino RIESZ ha dato risposta affermativa, sotto condizioni assai poco restrittive.

Nel caso che C_n sia una successione di rettangoli con i lati paralleli agli assi coordinati e tendenti ambedue all'infinito, il problema ha immediatamente risposta affermativa.

Nel caso che C_n sia un segmento della diagonale, e cioè nel caso della successione

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k V^k U^k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

il problema è stato posto anche da JAUCH [4] per la completa caratterizzazione dei sistemi di « scattering ».

Qui verrà dimostrato che la risposta a questo problema è negativa, anche se gli operatori U e V sono unitari. Infatti vale il seguente asserto:

In ogni spazio di Hilbert H di dimensione infinita, esistono due operatori unitari U e V tali che la successione di operatori:

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{0}^{n-1}{}_k V^k U^k \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

non converge per nessun vettore $f \neq 0$ di H.

Nell'esempio portato S_n converge debolmente a 0.

I) Consideriamo anzitutto il caso che H sia separabile, e sia $\{e_i\}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ un sistema ortonormale completo di vettori di H, indiciato nell'insieme dei numeri relativi.

Sia U l'operatore unitario definito dalle: $Ue_i = e_{i+1}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ e sia V l'operatore unitario definito nel seguente modo:
anzitutto è $Ve_i = e_i$ per $i = -1, -2, \ldots$; inoltre se $\{n_j\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ è una successione crescente di interi con $n_0 = 0$, soddi-

sfacente la:

$$\lim_{j \to \infty} \frac{n_j}{n_{j+1}} = 0 \,, \tag{1}$$

considerati gli insiemi $H_j = \{e_{n_j}, e_{n_j+1}, \ldots, e_{n_{j+1}-1}\}$, l'operatore V porti ogni e_i di H_j in e_{i-1}, salvo e_{n_j} portato invece in $e_{n_{j+1}-1}$.

Consideriamo ora la successione $\{V^k U^k e_0\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$: per $n_j \leqslant k = n_j + p \leqslant n_{j+1} - 1$ è $U^k e_0 = e_k \in H_j$ ed è $V^k U^k e_0 = V^{n_j} V^p U^p e_{n_j} = V^{n_j} U^{n_j} e_0 = a_{0j}$ vettore di H_j indipendente da p.

Allora per la successione $\{V^k U^k e_i\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, poichè è $e_i = U^i e_0$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, è $U^k e_i = e_{k+i} \in H_j$ per k soddisfacente la: $n_j \leqslant k + i \leqslant n_{j+1} - 1$. Dunque esiste k intero non negativo tale che $U^k e_i \in H_j$ solo per gli H_j con j tale che sia: $n_{j+1} - 1 \geqslant i$. Se è $n_j - i \geqslant 0$, per tutti i k tali che $n_j - i \leqslant k \leqslant n_{j+1} - 1 - i$ è $V^k U^k e_i = V^{n_j - i} U^{n_j - i} e_i = a_{ij}$ vettore di H_j fisso al variare di k nell'intervallo considerato, come si deduce in modo analogo a quanto visto per e_0.

Quindi, al variare di k nell'intervallo indicato, la successione $\{V^k U^k e_i\}$ per i fissato insiste sempre sul medesimo vettore a_{ij} di H_j.

Come ora dimostreremo, in virtù della (1), l'insistenza sarà sufficiente perchè la media $S_{n_{j+1}-i}(e_i)$ dei primi $n_{j+1} - i$ termini differisca sempre meno da a_{ij}. Poichè allora a_{ij} per i fissato e j che tende all'infinito non converge, non convergerà nemmeno la $S_{n_{j+1}-i}(e_i)$.

Precisamente risulta per $n_j - i \geqslant 0$,

$$S_{n_{j+1}-i}(e_i) = \frac{n_j - i}{n_{j+1} - i} S_{n_j - i}(e_i) + \frac{n_{j+1} - n_j}{n_{j+1} - i} a_{ij} \,,$$

e quindi:

$$\|S_{n_{j+1}-i}(e_i) - a_{ij}\| = \frac{n_j - i}{n_{j+1} - i} \|S_{n_j - i}(e_i) - a_{ij}\| \leqslant 2 \frac{n_j - i}{n_{j+1} - i}$$

e per ogni i fissato, la $\dfrac{n_j - i}{n_{j+1} - i}$ tende a 0 per j che tende all'infinito.

Dunque per i fissato la $S_n(e_i)$ non converge per n che tende all'infinito, poichè non converge la a_{ij} per j che tende all'infinito.

In generale dato in H $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}_i\lambda_i e_i \neq 0$, dimostriamo che $S_n(f)$ non converge fortemente. Per questo consideriamo la $\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i$.

Per $j > \bar{j}$ opportuno H_j ha più di $2j+1$ elementi. Allora se è $j > \bar{j}$, risulta che per $n_j + j \leqslant k \leqslant n_{j+1} - 1 - j$ è $V^k U^k e_i = a_{ij}$, così come prima è stato definito, appartenente ad H_j per ogni $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j$, e dunque è:

$$V^k U^k \Big(\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i\Big) = \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i a_{ij}$$

vettore di H_j indipendente da k nell'intervallo indicato. Allora per $j > \bar{j}$ è:

$$S_{n_{j+1}-j}\Big(\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i\Big) = \frac{n_j + j}{n_{j+1} - j} S_{n_j + j}\Big(\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i\Big) + \frac{n_{j+1} - n_j - 2j}{n_{j+1} - j} \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i a_{ij}$$

e quindi:

$$\Big\|S_{n_{j+1}-j}\Big(\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i\Big) - \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i a_{ij}\Big\| = \frac{n_j + j}{n_{j+1} - j} \Big\|S_{n_j + j}\Big(\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i\Big) - \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i a_{ij}\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n_j + j}{n_{j+1} - j} \, 2 \, \Big\| \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i \Big\| \leqslant 2 \, \frac{n_j + j}{n_{j+1} - j} \| f \|$$

(Notare che è $\| \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i a_{ij} \| = \| V^k U^k(\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i) \| = \| \sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i e_i \|$ per k che varia nell'intervallo sopraindicato). La quantità $2 \, \frac{n_j + j}{n_{j+1} - j} \| f \|$ tende a 0 per la condizione posta alla successione, la quale implica che sia $\lim_{j \to \infty} \frac{j}{n_j} = 0$.

Dunque se si dimostra che la successione $\{\sum_{-j}^{j} {}_i\lambda_i a_{ij}\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, dove λ_i è la componente i-esima di f, non converge fortemente, risulta dalla diseguaglianza di sopra che nemmeno la $S_{n_{j+1}-j}(\sum_{-j}^{j}{}_i\lambda_i e_i)$ converge fortemente per j che tende all'infinito. Ed infatti è:

$$\| \sum_{-j'}^{j'}{}_i\lambda_i a_{ij'} - \sum_{-j}^{j}{}_i\lambda_i a_{ij} \|^2 = \| \sum_{-j'}^{j'}{}_i\lambda_i a_{ij'} \|^2 + \| \sum_{-j}^{j}{}_i\lambda_i a_{ij} \|^2 =$$

$$= \| \sum_{-j'}^{j'}{}_i\lambda_i e_i \|^2 + \| \sum_{-j}^{j}{}_i\lambda_i e_i \|^2 > \| f \|^2 \neq 0$$

per j e j' abbastanza grandi.

Da ciò si deduce immediatamente che $S_n(f)$ per n che tende all'infinito non converge, poichè è $\| S_n \| \leqslant 1$, ed $n_{j+1} - j$ tende all'infinito per j che tende all'infinito.

Infine $S_n(f)$ converge debolmente a 0 qualunque sia f di H.

Infatti, per ogni e_i, $V^k U^k e_i$ tende evidentemente a 0 in modo debole per k che tende all'infinito. Ma allora anche la media dei primi n termini tende a 0. Poichè è $\| S_n \| \leqslant 1$, la convergenza debole vale per ogni f ed il limite è sempre 0.

II) Per considerare il caso in cui H abbia dimensione infinita qualunque premettiamo la seguente

Osservazione. - Se I è un insieme infinito, ed I' un suo sottoinsieme, I può essere completamente ripartito nella riunione di suoi sottoinsiemi disgiunti aventi la medesima potenza di I'

Allora se in H è $\{e_i : i \in I\}$ un sistema ortonormale completo indiciato in $I = U_\alpha I_\alpha$ con I_α numerabile e $I_\alpha \cap I_{\alpha'} = \varnothing$ per $\alpha \neq \alpha'$, e detto H_α il sottospazio sotteso dagli $\{e_i : i \in I_\alpha\}$, si possono definire per quanto detto due operatori unitari V ed U in modo che operino in ogni H_α, e che in questo S_n non converga per nessun $f \neq 0$.

Se è $f = \sum_{0}^{+\infty}{}_i f_i \neq 0$ con $f_i \in H_{\alpha_i}$, $S_n(f)$ non converge poichè

$$\| (S_{n'} - S_{n''}) \sum_{0}^{+\infty}{}_i f_i \|^2 = \sum_{0}^{+\infty}{}_i \| (S_{n'} - S_{n''}) f_i \|^2 ,$$

se si pone $\alpha_i \neq \alpha_{i'}$ per $i \neq i'$.

BIBLIOGRAFIA

[1] NEUMANN VON J.: *Mean ergodic theorem*. Math. Ann. 104, 570 (1931).

[2] VISSER C.: *On the iteration of linear operations in a Hilbert space*. Proc. Acad. Amsterdam, 41 (1938), 487-495.

YOSIDA: *Mean ergodic theorem in Banach Spaces*. Proceedings of the Imperial Academy of Japan; vol. XIV, 1938, pag. 292.

KAKUTANI: *Iterations of linear operations in Complex Banach Spaces*. Proceedings of the Imperial Academy of Japan; vol. XIV, 1938, pag. 295.

RIESZ F.: riporta i suoi risultati nel suo articolo citato a [3].

[3] RIESZ F.: *Sur la Théorie ergodique*. Commentarii math. elvetici 17; 1944-45; pag. 221.

[4] JAUCH: *Theory of the scattering operator*. Helvetica Phisica Acta, vol. 31, pag. 127-58, 1958.