RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI ANTONIO ROSATI

Gruppi affini d'incidenza

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 71-81

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_71_0>

GRUPPI AFFINI D'INCIDENZA

Nota *) *di* LUIGI ANTONIO ROSATI (*a Firenze*) **)

E. ELLERS e H. KARZEL hanno recentemente introdotto il concetto di gruppo proiettivo d'incidenza [3, 4] e sull'argomento H. KARZEL ha pubblicato successivamente due note [6, 7]. Gruppi proiettivi d'incidenza di dimensione due e desarguesiani erano stati in precedenza considerati da J. SINGER [10], M. HALL [5], G. ZAPPA [11, 12], R. H. BRUCK [2] e da me [9] che avevo determinato tutti i gruppi proiettivi d'incidenza di dimensione due desarguesiani finiti e non ciclici.

In questa nota introduco il concetto di gruppo affine d'incidenza e mostro che i gruppi affini d'incidenza desarguesiani di una data dimensione $n \geqslant 2$ sono in corrispondenza biunivoca con i quasicorpi associativi di una certa classe che nel caso di gruppi finiti e di dimensione due coincide con la classe dei quasicorpi associativi che hanno per ordine un quadrato.

Estendo anche a tutti i gruppi d'incidenza desarguesiani, proiettivi e affini, alcuni teoremi già da me stabiliti in [8, 9] nel caso di gruppi finiti, proiettivi e affini, desarguesiani di dimensione due.

Introdotta la nozione di gruppo affine d'incidenza bilatero,

---

*) Pervenuto in redazione il 1° giugno 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Firenze.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività per l'anno 1963-64 dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

dimostro anche che ogni gruppo affine d'incidenza di dimensione due (desarguesiano o no) bilatero è commutativo.

Gruppi affini d'incidenza erano già stati considerati da R. C. BOSE [1] che aveva determinato tutti i gruppi affini d'incidenza di dimensione due desarguesiani finiti e ciclici e da me che in [8] avevo determinato tutti i gruppi affini d'incidenza di dimensione due, desarguesiani, finiti, non ciclici.

1. - Diremo *gruppo* con O un insieme $G = \{H, O\}$ dotato di un'operazione di moltiplicazione che induca su H una struttura di gruppo e tale che qualunque sia $a \in G$ si abbia $Oa = aO = O$.

Diremo *gruppo affine d'incidenza* di dimensione n un insieme G dotato di due diverse strutture una di gruppo con O e una di spazio affine di dimensione $n > 1$ e tale che ogni traslazione sinistra del gruppo G

$$\alpha^* : \xi \to \alpha\xi \quad (0 \neq \alpha, \ \xi \in G)$$

sia una collineazione (affinità) dello spazio affine G.

È chiaro che al variare di α in $G - \{O\}$ le collineazioni α^* costituiscono un gruppo, Γ, isomorfo ad $H = G - \{O\}$, semplicemente transitivo sui punti di G diversi da O.

Diremo G *desarguesiano* quando sarà desarguesiano lo spazio proiettivo corrispondente allo spazio affine G. Un gruppo affine d'incidenza di dimensione maggiore di 2 è sempre desarguesiano.

Ad un gruppo affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano si può sempre dare la struttura di spazio vettoriale destro di dimensione n sopra il corpo F delle coordinate. Indicheremo con $\overline{G}$ questo spazio vettoriale e identificheremo ogni punto di G col vettore di $\overline{G}$ che lo rappresenta. Inoltre d'ora in poi useremo il simbolo $\alpha \circ \beta$ per rappresentare il prodotto dei due punti α, β, mentre ci serviremo del simbolo αh per indicare il prodotto del vettore α per l'elemento h di F.

Sempre nel caso desarguesiano ogni collineazione α^* appartenente a Γ induce sullo spazio vettoriale $\overline{G}$ una trasformazione semilineare, che indicheremo anch'essa col simbolo α^*,

$$\alpha^* : \xi \to \alpha \circ \xi \quad (\alpha, \ \xi \in G; \ \alpha \neq 0),$$

vale a dire un'applicazione di G su di sè tale che

$$\alpha^* (\beta + \gamma) = \alpha^*\beta + \alpha^*\gamma$$
$$\alpha^* (\beta h) = (\alpha^*\beta)h^\sigma ,$$

dove σ è un automorfismo di F dipendente da α. (Nel caso che si abbia $\sigma = 1$ la collineazione α^* verrà detta una *proiettività*).

Si ha pertanto il seguente teorema:

1.1. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza desarguesiano di dimensione n. Allora il gruppo con zero G è il gruppo con zero moltiplicativo di un quasicorpo associativo sinistro* [1]) *K avente per elementi quelli di G e dotato delle seguenti proprietà*:

1) *K è uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G*;

2) *presi comunque $\alpha, \beta \in K$ $(\alpha \neq 0)$, $h \in F$ risulta*

$$\alpha \circ (\beta h) = (\alpha \circ \beta)h^\sigma ,$$

essendo σ un automorfismo di F dipendente da α.

Vogliamo ora invertire questo teorema:

1.2. - *Sia K un quasicorpo associativo sinistro per il quale valgano le proprietà*:

1) *K è uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra un corpo F*;

2) $\alpha \circ (\beta h) = (\alpha \circ \beta)h^\sigma$ $(\alpha, \beta \in K;\ \alpha \neq 0;\ h \in F;$ *σ automorfismo di F). Allora il gruppo con 0 moltiplicativo di K, G, è uno spazio affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano ed F risulta isomorfo al gruppo delle coordinate dei punti di G.*

Poichè K è uno spazio vettoriale di dimensione n sopra un corpo F, i vettori di K possono pensarsi come punti di uno spazio affine desarguesiano di dimensione n sopra il corpo F. Quindi per dimostrare il teorema basterà dimostrare che ogni trasla-

---

[1]) Chiamiamo quasicorpo associativo sinistro un insieme dotato di due operazioni . + per le quali valgono tutte le proprietà delle stesse operazioni nei corpi tranne la proprietà distributiva $(a + b)c = ac + bc$.

zione sinistra del gruppo G

$$\alpha^* : \xi \to \alpha \circ \xi \quad (0 \neq \alpha \in G, \ \xi \in G)$$

è una collineazione dello spazio affine G.

Sia $\xi = \beta h + \gamma$ ($\beta, \gamma \in G$; $\beta \neq 0$; h variabile in F) l'equazione vettoriale di una retta, r, appartenente a G e sia $\overline{\xi} = \beta\overline{h} + \gamma$ un suo punto. Si ha

$$\alpha^*\overline{\xi} = \alpha \circ (\beta\overline{h} + \gamma) = (\alpha \circ \beta)\overline{h}^{\sigma} + \alpha \circ \gamma \, .$$

Pertanto $\alpha^*\overline{\xi}$ appartiene alla retta $\xi = (\alpha \circ \beta)h + \alpha \circ \gamma$.

Analogamente si vede che ogni punto di questa retta è il corrispondente in α^* di un punto di r e rimane dimostrato che α^* è una collineazione di G.

Da [8] risulta che da un qualunque quasicorpo associativo finito d'ordine q^2 si può ricavare col procedimento del teorema 2 un gruppo affine d'incidenza di dimensione 2 desarguesiano. Questo significa che ogni quasicorpo associativo finito d'ordine q^2 verifica le condizioni 1), 2) del teorema 2.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

1.3. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano e siano F il corpo delle coordinate dei punti di G, K il quasicorpo relativo a G, N il nucleo di K. Se tutte le collineazioni appartenenti a Γ sono proiettività allora F è isomorfo al sottoquasicorpo F' di K formato dagli elementi della forma ηh (η unità di K, $h \in F$) e si ha $F' \subseteq N$.*

Poichè tutte le collineazioni appartenenti a G sono proiettività, comunque si prendano $\alpha \neq 0$, ξ in K e h in F, si ha

$$\alpha \circ (\xi h) = (\alpha \circ \xi)h \, . \tag{1}$$

Pertanto, se h, κ sono due qualunque elementi di F, si ha

$$(\eta h) \circ (\eta k) = [(\eta h) \circ \eta]k = (\eta h)k = \eta(hk) \, ,$$

$$\eta(h + k) = \eta h + \eta k \, .$$

Quindi K contiene come sottoquasicorpo il corpo F' isomorfo ad F formato dagli elementi della forma $\eta h (h \in F)$.

Dalla (1) si ha

$$\alpha \circ (\eta h) = \alpha h \quad \text{per ogni} \quad h \in F .$$

Di conseguenza per ogni $h \in F$

$$(\alpha + \beta) \circ (\eta h) = (\alpha + \beta) h = \alpha h + \beta h = \alpha \circ (\eta h) + \beta \circ (\eta h) ,$$

e questo significa che $F' \subseteq N$.

Invertiamo ora il teorema enunciato.

1.4. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione $n (> 1)$ desarguesiano e siano F il corpo delle coordinate dei punti di G, K il quasicorpo relativo a G, N il nucleo di K. Se gli elementi di K della forma ηh (η unità di K; $h \in F$) costituiscono un sottoquasicorpo F' di K isomorfo ad F e si ha $F' \subseteq N$ allora tutte le collineazioni appartenenti a Γ sono proiettività.*

Sia α un qualunque elemento di K diverso da zero e sia ηh un qualunque elemento di $F' \subseteq N$. Si ha allora $\alpha \circ (\eta h) = \alpha h^{\sigma}$, essendo σ un automorfismo di F. Noi vogliamo dimostrare intanto che σ è indipendente da α. Fissati in K $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, poichè la dimensione n di G è maggiore di uno, si potrà trovare in K $\gamma \neq 0$ tale che si abbia $\alpha + \gamma \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 0$, $\alpha \neq \gamma k$, $\beta \neq \gamma k$ per ogni $k \in F$. Si avrà

$$(\alpha + \gamma) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\eta h) + \gamma \circ (\eta h)$$

e quindi

$$(\alpha + \gamma) h^{\sigma} = \alpha h^{\sigma_{\alpha}} + \gamma h^{\sigma_{\gamma}} , \tag{2}$$

essendo σ, σ_{α}, σ_{γ} automorfismi di F. Dalla (2) si trae

$$\alpha (h^{\sigma} - h^{\sigma_{\alpha}}) = \gamma (h^{\sigma_{\gamma}} - h^{\sigma}) \tag{3}$$

e, poichè per ogni $k \in F$ si ha $\alpha \neq \gamma k$, dalla (3) si ottiene $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\gamma} (= \sigma)$. Analogamente si ha $\sigma_{\beta} = \sigma_{\gamma}$ e pertanto $\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta}$.

Siano allora α, β due elementi di K diversi da 0. Per ogni $h \in \mathrm{F}$ si avrà

$$(\alpha \circ \beta)h^{\sigma} = (\alpha \circ \beta) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\beta \circ (\eta h)) = \alpha \circ (\beta h^{\sigma}) = (\alpha \circ \beta)h^{\sigma^2}$$

e pertanto $\sigma = 1$, $\alpha \circ (\eta h) = \alpha h$. Allora

$$(\alpha \circ \beta)h = (\alpha \circ \beta) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\beta \circ (\eta h)) = \alpha \circ (\beta h)$$

e questo dimostra che ogni collineazione appartenente a Γ è una proiettività, come si voleva dimostrare.

2. - Chiamiamo ora *bilatero* un gruppo affine d'incidenza G nel quale, non solo ogni traslazione sinistra, ma anche ogni traslazione destra

$$\bar{a} : x \to xa \quad (x, a \in G;\ a \neq 0)$$

sia una collineazione dello spazio affine G.

Le traslazioni destre costituiscono un gruppo $\overline{\Gamma}$, isomorfo al gruppo $H = G - \{O\}$ ed al gruppo Γ delle traslazioni sinistre, semplicemente transitivo sui punti di G diversi da O.

Dopo alcune considerazioni generali sopra i gruppi affini d'incidenza di dimensione due dimostreremo che ogni gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero è commutativo.

2.1. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due e sia R una retta di G passante per* 1 *e non per O. Allora l'insieme dei punti di R non è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$.*

Supponiamo, per assurdo, che R sia un sottogruppo di H. Se a è un qualunque elemento di H si ha che aR è un laterale di R in H e pertanto o $aR = R$ (se $a \in R$) oppure aR ed R non hanno elementi in comune. Pertanto le due rette aR ed R o coincidono o sono parallele.

Sia ora b un qualunque punto della parallela S ad R per O. Si ha subito che bR coincide con S, perchè bR passa per b ed è parallela ad R. Ebbene questo è impossibile perchè ogni collineazione $b^* \in \Gamma$ muta O in sè e quindi rette per O in rette per O, rette non passanti per O in rette non passanti per O.

2.2. - *Sia L un insieme di elementi di un gruppo H e supponiamo che si abbia $1 \in L$. Allora L è un sottogruppo di H se e solo se, qualunque sia $x \in L$, si ha $xL = L$ $(Lx = L)$.*

È ovvio che, se L è un sottogruppo di H, qualunque sia $x \in L$, si ha $L = xL$ $(L = Lx)$.

Supponiamo al contrario che, qualunque sia $x \in L$, si abbia $xL = L$. Qualunque sia $x \in L$ si ha anche $L = x^{-1}L$ e, poichè $1 \in L$, si ha $x^{-1} \in x^{-1}L = L$. Se anche $y \in L$, si ha $yL = L$ e pertanto $xyL = yL = L$. Questo significa che $xy \in L$ e rimane dimostrato che L è un sottogruppo di H.

2.3. - *L'insieme N dei punti diversi da O della retta M che congiunge O con 1 è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$.*

Poichè $1 \in N$, se $x \in N$, si ha $x \in xN$. Ne viene che M e xM coincidono perchè passano entrambe per x e per O. Allora coincidono anche x e xN e per 2.2. N è un sottogruppo di H.

2.4. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero e sia R una retta di G passante per 1 e non passante per O. Allora da $aR = R$ $(a \in G,\ a \neq 0)$ segue $a = 1$.*

Per 2.1 R non è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$ e allora per 2.2 le rette Rr^{-1} $(r \in R)$ non sono tutte coincidenti con R. Se Rr_1^{-1} $(r_1 \in R)$ è distinta da R, siccome Rr_1^{-1} ed R passano entrambe per 1, si ha che 1 è l'unico punto che esse abbiano in comune. Allora a è l'unico punto comune ad aRr_1^{-1} e aR.

Ora se è $aR = R$ risulta anche $aRr_1^{-1} = Rr_1^{-1}$ e perciò $a = 1$, come si voleva dimostrare.

2.5. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero e sia R una retta di G passante per 1 e non per 0. Allora l'insieme dei punti di R è un sistema di generatori di $H = G - \{O\}$.*

Come abbiamo già osservato le rette Rr^{-1} $(r \in R)$ non sono tutte coincidenti e, poichè passano tutte per 1, se a è un qualunque elemento di H, esisterà $r_1 \in R$ tale che Rr_1^{-1} e Ra^{-1} siano incidenti; esisteranno cioè $r_2, r_3 \in R$ tali che si abbia $r_2r_1^{-1} = r_3a^{-1}$, ossia $a = r_1r_2^{-1}r_3$ e risulta dimostrato quanto si voleva.

2.6. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due (desarguesiano o no) bilatero. Allora G è commutativo.*

Tenuto conto di 2.5, basterà dimostrare che il prodotto di due elementi qualsiasi di una retta R di G passante per 1 e non passante per O è commutativo.

Detto r un qualunque punto di R, si consideri la collineazione di G

$$\tilde{r} : x \to rxr^{-1} .$$

Si verifica subito che $rR = \tilde{r}Rr^{-1} = R$: infatti $1 \in R$ e perciò $1 \in rRr^{-1}$; d'altra parte $r \in R$ e pertanto $r \in rRr^{-1}$. Ne viene che rRr^{-1} è la retta che congiunge 1 con r, cioè la retta R. Da $rRr^{-1} = R$ segue che si ha anche $r^{-1}Rr = R$ e allora, tenuto conto che R è un sistema di generatori di H, si ha che se x è un qualunque punto di G diverso da zero, risulta

$$xRx^{-1} = R . \tag{4}$$

Siano allora a, b due punti appartenenti ad R. Posto $a^{-1}b = x$, poichè a, b appartengono ad R, si ha che $a^{-1}R$ è la retta che congiunge 1 con x. Dalla (4) segue

$$\tilde{x} : a^{-1}R \to xa^{-1}Rx^{-1} = xa^{-1}x^{-1}R .$$

Ora $b = xa \in R$, $a \in R$ e quindi $xa^{-1}x^{-1}R = xa^{-1}Rx^{-1}$ è la retta che congiunge x con 1, cioè si ha $a^{-1}R = xa^{-1}x^{-1}R$, ossia $axa^{-1}x^{-1}R = R$. Da 2.4 segue allora $axa^{-1}x^{-1} = 1$, $ax = xa$ e quindi $ab = ba$, come si voleva dimostrare.

3. - Rammentiamo che, secondo Ellers e Karzel [4], si dice *gruppo proiettivo d'incidenza* un gruppo G dotato anche di una struttura di spazio proiettivo tale che ogni traslazione sinistra del gruppo G

$$a^* : x \to ax \quad (a,\ x \in G)$$

sia una collineazione dello spazio proiettivo G. Queste collineazioni costituiscono un gruppo Γ isomorfo a G semplicemente transitivo sui punti di G.

Vogliamo ora accennare al modo di estendere due teoremi analoghi ai teoremi 3 e 4 anche ai gruppi proiettivi d'incidenza desarguesiani di dimensione $n > 1$.

Modificando un po' la definizione di E. ELLERS e H. KARZEL [4] chiameremo *quasicorpo normale* di dimensione n un quasicorpo associativo sinistro K che sia uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra un campo F che contenga come sottoquasicorpo un corpo $\overline{F}$ antiisomorfo ad F e tale che il gruppo moltiplicativo K^* di K abbia un sottogruppo normale isomorfo al gruppo moltiplicativo $\overline{F}^*$ di $\overline{F}$.

Secondo il procedimento seguito da ELLERS e KARZEL [4] e da me nel caso di gruppi d'incidenza proiettivi desarguesiani di dimensione due ad ogni gruppo di incidenza G desarguesiano di dimensione $n > 1$ si può associare un quasicorpo normale che sia uno spazio vettoriale destro di dimensione $n + 1$ sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G e che quindi contenga come sottoquasicorpo un corpo $\overline{F}$ antiisomorfo a F nella seguente maniera:

Lo spazio proiettivo G desarguesiano di dimensione $n > 1$ definisce uno spazio vettoriale destro K sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G di dimensione $n + 1$ nel quale ogni collineazione a^* appartenente a Γ determina una trasformazione semilineare α^* tale che

$$(\alpha h)^*\xi = (\alpha^*\xi)h \quad (\alpha, \xi \in K;\ \alpha \neq 0;\ h \in F;\ h \neq 0) .$$

In K introduciamo un'operazione di moltiplicazione, che indicheremo col simbolo $\circ$, ponendo

$$O \circ \beta = O; \quad \alpha \circ \beta = \alpha^*\beta, \quad \text{se} \quad \alpha \neq O .$$

Si verifica facilmente che con l'aggiunta di questa operazione di moltiplicazione K diventa un quasicorpo normale di dimensione $n + 1$ sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G. Supposto di aver dimostrato come in [4] che la moltiplicazione introdotta dà a K una struttura di quasicorpo associativo sinistro, per brevità ci limiteremo a controllare che K contiene un sottoquasicorpo $\overline{F}$ antiisomorfo ad F e che $\overline{F}^*$ è un sottogruppo normale di K^*. Sia η l'unità di K e siano h, k due qualunque elementi di F; si ha

$$(\eta h) \circ (\eta k) = \eta \circ (\eta k)h = (\eta k)h = \eta(kh)$$

$$\eta h + \eta k = \eta(h + k)$$

e questo dimostra che gli elementi di K della forma $\eta h (h \in F)$ costituiscono un corpo $\overline{F}$ antiisomorfo ad F.

Consideriamo ora l'applicazione, φ, di K^* su G che porta ogni vettore α appartenente a K^* nel punto a di G rappresentato da α. Evidentemente φ è un omomorfismo di K^* su G ed il nucleo φ^{-1} (1) di φ, costituito dagli elementi di K^* della forma ηh, coincide con $\overline{F}^*$, ossia $\overline{F}^*$ è normale in K^*.

Viceversa ad ogni quasicorpo normale di dimensione $n + 1 > 2$ sopra un corpo F si può associare uno spazio proiettivo d'incidenza desarguesiano G di dimensione $n > 1$ in modo che F risulti isomorfo al corpo delle coordinate dei punti di G.

La definizione di quasicorpo normale qui data, nel caso che F sia un corpo commutativo, coincide con quella di Ellers e Karzel. I quasicorpi normali di dimensione 3 sopra un corpo finito F sono stati determinati da me nella nota [9] dalla quale risulta l'esistenza di quasicorpi associativi finiti non normali.

Ebbene, seguendo il procedimento usato per dimostrare i teoremi 3 e 4 si può dimostrare quanto segue:

3.1. - *Sia G un gruppo proiettivo d'incidenza desarguesiano di dimensione $n > 1$ e sia K il quasicorpo normale relativo. Allora Γ è un gruppo di proiettività se e solo se $\overline{F}$ è un sottocorpo del nucleo N di K.*

BIBLIOGRAFIA

[1] BOSE R. C.: *An affine analogous of Singer' theorem.* Journ. Indian Math. Soc., 6 (1942), 1-15.

[2] BRUCK R. H.: *Difference sets in a finite group.* Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955), 463-481.

[3] ELLERS E. e KARZEL H.: *Involutorische Geometrien.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25 (1961), 93-104.

[4] ELLERS E. e KARZEL H.: *Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 26 (1963), 55-77.

[5] HALL M.: *Cyclic projective planes.* Duke Math. J., 14 (1947), 1079-1090.

[6] KARZEL H.: *Kommutative Inzidenzgruppen.* Arch. Math., 13 (1962), 535-538.

[7] KARZEL H.: *Ebene Inzidenzgruppen.* Arch. Math., 15 (1964), 10-17.

[8] ROSATI L. A.: *Piani desarguesiani affini non ciclici.* Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 22 (1957), 443-449.

[9] ROSATI L. A.: *Piani proiettivi desarguesiani non ciclici.* Boll. U. M. I., III, 12 (1957), 230-240.

[10] SINGER J.: *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory.* Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1938), 337-385.

[11] ZAPPA G.: *Sui piani grafici finiti h-l-transitivi.* Boll. U. M. I., III, 9 (1954), 16-24.

[12] ZAPPA G.: *Sui piani grafici finiti transitivi e quasi transitivi.* Ricerche di Matematica, 2 (1953), 274-287.