RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI ANTONIO ROSATI

Gruppi affini d'incidenza

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 1 (1965), p. 71-81

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_1_71_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GRUPPI AFFINI D'INCIDENZA

Nota *) *di* Luigi Antonio Rosati (*a Firenze*) **)

E. Ellers e H. Karzel hanno recentemente introdotto il concetto di gruppo proiettivo d'incidenza [3, 4] e sull'argomento H. Karzel ha pubblicato successivamente due note [6, 7]. Gruppi proiettivi d'incidenza di dimensione due e desarguesiani erano stati in precedenza considerati da J. Singer [10], M. Hall [5], G. Zappa [11, 12], R. H. Bruck [2] e da me [9] che avevo determinato tutti i gruppi proiettivi d'incidenza di dimensione due desarguesiani finiti e non ciclici.

In questa nota introduco il concetto di gruppo affine d'incidenza e mostro che i gruppi affini d'incidenza desarguesiani di una data dimensione $n \geqslant 2$ sono in corrispondenza biunivoca con i quasicorpi associativi di una certa classe che nel caso di gruppi finiti e di dimensione due coincide con la classe dei quasicorpi associativi che hanno per ordine un quadrato.

Estendo anche a tutti i gruppi d'incidenza desarguesiani, proiettivi e affini, alcuni teoremi già da me stabiliti in [8, 9] nel caso di gruppi finiti, proiettivi e affini, desarguesiani di dimensione due.

Introdotta la nozione di gruppo affine d'incidenza bilatero,

---

*) Pervenuto in redazione il 1° giugno 1964.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Firenze.

**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività per l'anno 1963-64 dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

dimostro anche che ogni gruppo affine d'incidenza di dimensione due (desarguesiano o no) bilatero è commutativo.

Gruppi affini d'incidenza erano già stati considerati da R. C. BOSE [1] che aveva determinato tutti i gruppi affini d'incidenza di dimensione due desarguesiani finiti e ciclici e da me che in [8] avevo determinato tutti i gruppi affini d'incidenza di dimensione due, desarguesiani, finiti, non ciclici.

1. - Diremo *gruppo* con O un insieme $G = \{H, O\}$ dotato di un'operazione di moltiplicazione che induca su H una struttura di gruppo e tale che qualunque sia $a \in G$ si abbia $Oa = aO = O$.

Diremo *gruppo affine d'incidenza* di dimensione n un insieme G dotato di due diverse strutture una di gruppo con O e una di spazio affine di dimensione $n > 1$ e tale che ogni traslazione sinistra del gruppo G

$$\alpha^* : \xi \rightarrow \alpha\xi \quad (0 \neq \alpha, \ \xi \in G)$$

sia una collineazione (affinità) dello spazio affine G.

È chiaro che al variare di α in $G - \{O\}$ le collineazioni α^* costituiscono un gruppo, Γ, isomorfo ad $H = G - \{O\}$, semplicemente transitivo sui punti di G diversi da O.

Diremo G *desarguesiano* quando sarà desarguesiano lo spazio proiettivo corrispondente allo spazio affine G. Un gruppo affine d'incidenza di dimensione maggiore di 2 è sempre desarguesiano.

Ad un gruppo affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano si può sempre dare la struttura di spazio vettoriale destro di dimensione n sopra il corpo F delle coordinate. Indicheremo con $\overline{G}$ questo spazio vettoriale e identificheremo ogni punto di G col vettore di $\overline{G}$ che lo rappresenta. Inoltre d'ora in poi useremo il simbolo $\alpha \circ \beta$ per rappresentare il prodotto dei due punti α, β, mentre ci serviremo del simbolo αh per indicare il prodotto del vettore α per l'elemento h di F.

Sempre nel caso desarguesiano ogni collineazione α^* appartenente a Γ induce sullo spazio vettoriale $\overline{G}$ una trasformazione semilineare, che indicheremo anch'essa col simbolo α^*,

$$\alpha^* : \xi \rightarrow \alpha \circ \xi \quad (\alpha, \ \xi \in G; \ \alpha \neq 0),$$

vale a dire un'applicazione di G su di sè tale che

$$\alpha^* (\beta + \gamma) = \alpha^*\beta + \alpha^*\gamma$$
$$\alpha^* (\beta h) \quad = (\alpha^*\beta)h^\sigma ,$$

dove σ è un automorfismo di F dipendente da α. (Nel caso che si abbia $\sigma = 1$ la collineazione α^* verrà detta una *proiettività*).

Si ha pertanto il seguente teorema:

1.1. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza desarguesiano di dimensione n. Allora il gruppo con zero G è il gruppo con zero moltiplicativo di un quasicorpo associativo sinistro* [1] *K avente per elementi quelli di G e dotato delle seguenti proprietà:*

1) *K è uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G;*

2) *presi comunque $\alpha, \beta \in K$ $(\alpha \neq 0)$, $h \in F$ risulta*

$$\alpha \circ (\beta h) = (\alpha \circ \beta)h^\sigma ,$$

essendo σ un automorfismo di F dipendente da α.

Vogliamo ora invertire questo teorema:

1.2. - *Sia K un quasicorpo associativo sinistro per il quale valgano le proprietà:*

1) *K è uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra un corpo F;*

2) $\alpha \circ (\beta h) = (\alpha \circ \beta)h^\sigma$ $(\alpha, \beta \in K;\ \alpha \neq 0;\ h \in F;$ *σ automorfismo di F). Allora il gruppo con O moltiplicativo di K, G, è uno spazio affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano ed F risulta isomorfo al gruppo delle coordinate dei punti di G.*

Poichè K è uno spazio vettoriale di dimensione n sopra un corpo F, i vettori di K possono pensarsi come punti di uno spazio affine desarguesiano di dimensione n sopra il corpo F. Quindi per dimostrare il teorema basterà dimostrare che ogni trasla-

---

[1]) Chiamiamo quasicorpo associativo sinistro un insieme dotato di due operazioni . + per le quali valgono tutte le proprietà delle stesse operazioni nei corpi tranne la proprietà distributiva $(a + b)c = ac + bc$.

zione sinistra del gruppo G

$$\alpha^* : \xi \to \alpha \circ \xi \quad (0 \neq \alpha \in G,\ \xi \in G)$$

è una collineazione dello spazio affine G.

Sia $\xi = \beta h + \gamma$ ($\beta, \gamma \in G$; $\beta \neq 0$; h variabile in F) l'equazione vettoriale di una retta, r, appartenente a G e sia $\overline{\xi} = \beta\overline{h} + \gamma$ un suo punto. Si ha

$$\alpha^*\overline{\xi} = \alpha \circ (\beta\overline{h} + \gamma) = (\alpha \circ \beta)\overline{h}^\sigma + \alpha \circ \gamma\,.$$

Pertanto $\alpha^*\overline{\xi}$ appartiene alla retta $\xi = (\alpha \circ \beta)h + \alpha \circ \gamma$.

Analogamente si vede che ogni punto di questa retta è il corrispondente in α^* di un punto di r e rimane dimostrato che α^* è una collineazione di G.

Da [8] risulta che da un qualunque quasicorpo associativo finito d'ordine q^2 si può ricavare col procedimento del teorema 2 un gruppo affine d'incidenza di dimensione 2 desarguesiano. Questo significa che ogni quasicorpo associativo finito d'ordine q^2 verifica le condizioni 1), 2) del teorema 2.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

1.3. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione n desarguesiano e siano F il corpo delle coordinate dei punti di G, K il quasicorpo relativo a G, N il nucleo di K. Se tutte le collineazioni appartenenti a Γ sono proiettività allora F è isomorfo al sottoquasicorpo F' di K formato dagli elementi della forma ηh (η unità di K, $h \in F$) e si ha $F' \subseteq N$.*

Poichè tutte le collineazioni appartenenti a G sono proiettività, comunque si prendano $\alpha \neq 0$, ξ in K e h in F, si ha

$$\alpha \circ (\xi h) = (\alpha \circ \xi)h\,. \tag{1}$$

Pertanto, se h, κ sono due qualunque elementi di F, si ha

$$(\eta h) \circ (\eta k) = [(\eta h) \circ \eta]k = (\eta h)k = \eta(hk)\,,$$

$$\eta(h + k) \;= \eta h + \eta k\,.$$

Quindi K contiene come sottoquasicorpo il corpo F' isomorfo ad F formato dagli elementi della forma $\eta h (h \in F)$.

Dalla (1) si ha

$$\alpha \circ (\eta h) = \alpha h \quad \text{per ogni} \quad h \in F .$$

Di conseguenza per ogni $h \in F$

$$(\alpha + \beta) \circ (\eta h) = (\alpha + \beta)h = \alpha h + \beta h = \alpha \circ (\eta h) + \beta \circ (\eta h) ,$$

e questo significa che $F' \subseteq N$.

Invertiamo ora il teorema enunciato.

1.4. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione $n (> 1)$ desarguesiano e siano F il corpo delle coordinate dei punti di G, K il quasicorpo relativo a G, N il nucleo di K. Se gli elementi di K della forma ηh (η unità di K; $h \in F$) costituiscono un sottoquasicorpo F' di K isomorfo ad F e si ha $F' \subseteq N$ allora tutte le collineazioni appartenenti a Γ sono proiettività.*

Sia α un qualunque elemento di K diverso da zero e sia ηh un qualunque elemento di $F' \subseteq N$. Si ha allora $\alpha \circ (\eta h) = \alpha h^{\sigma}$, essendo σ un automorfismo di F. Noi vogliamo dimostrare intanto che σ è indipendente da α. Fissati in K $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, poichè la dimensione n di G è maggiore di uno, si potrà trovare in K $\gamma \neq 0$ tale che si abbia $\alpha + \gamma \neq 0$, $\beta + \gamma \neq 0$, $\alpha \neq \gamma k$, $\beta \neq \gamma k$ per ogni $k \in F$. Si avrà

$$(\alpha + \gamma) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\eta h) + \gamma \circ (\eta h)$$

e quindi

(2) $$(\alpha + \gamma) h^{\sigma} = \alpha h^{\sigma_\alpha} + \gamma h^{\sigma_\gamma} ,$$

essendo σ, σ_α, σ_γ automorfismi di F. Dalla (2) si trae

(3) $$\alpha (h^{\sigma} - h^{\sigma_\alpha}) = \gamma (h^{\sigma_\gamma} - h^{\sigma})$$

e, poichè per ogni $k \in F$ si ha $\alpha \neq \gamma k$, dalla (3) si ottiene $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma (= \sigma)$. Analogamente si ha $\sigma_\beta = \sigma_\gamma$ e pertanto $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$.

Siano allora α, β due elementi di K diversi da 0. Per ogni $h \in \mathrm{F}$ si avrà

$$(\alpha \circ \beta)h^{\sigma} = (\alpha \circ \beta) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\beta \circ (\eta h)) = \alpha \circ (\beta h^{\sigma}) = (\alpha \circ \beta)h^{\sigma^2}$$

e pertanto $\sigma = 1$, $\alpha \circ (\eta h) = \alpha h$. Allora

$$(\alpha \circ \beta)h = (\alpha \circ \beta) \circ (\eta h) = \alpha \circ (\beta \circ (\eta h)) = \alpha \circ (\beta h)$$

e questo dimostra che ogni collineazione appartenente a Γ è una proiettività, come si voleva dimostrare.

2. - Chiamiamo ora *bilatero* un gruppo affine d'incidenza G nel quale, non solo ogni traslazione sinistra, ma anche ogni traslazione destra

$$\bar{a} : x \rightarrow xa \qquad (x, a \in G;\ a \neq 0)$$

sia una collineazione dello spazio affine G.

Le traslazioni destre costituiscono un gruppo $\overline{\Gamma}$, isomorfo al gruppo $H = G - \{O\}$ ed al gruppo Γ delle traslazioni sinistre, semplicemente transitivo sui punti di G diversi da O.

Dopo alcune considerazioni generali sopra i gruppi affini d'incidenza di dimensione due dimostreremo che ogni gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero è commutativo.

2.1. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due e sia R una retta di G passante per* 1 *e non per O. Allora l'insieme dei punti di R non è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$.*

Supponiamo, per assurdo, che R sia un sottogruppo di H. Se a è un qualunque elemento di H si ha che aR è un laterale di R in H e pertanto o $aR = R$ (se $a \in R$) oppure aR ed R non hanno elementi in comune. Pertanto le due rette aR ed R o coincidono o sono parallele.

Sia ora b un qualunque punto della parallela S ad R per O. Si ha subito che bR coincide con S, perchè bR passa per b ed è parallela ad R. Ebbene questo è impossibile perchè ogni collineazione $b^* \in \Gamma$ muta O in sè e quindi rette per O in rette per O, rette non passanti per O in rette non passanti per O.

2.2. - *Sia L un insieme di elementi di un gruppo H e supponiamo che si abbia $1 \in L$. Allora L è un sottogruppo di H se e solo se, qualunque sia $x \in L$, si ha $xL = L$ $(Lx = L)$.*

È ovvio che, se L è un sottogruppo di H, qualunque sia $x \in L$, si ha $L = xL$ $(L = Lx)$.

Supponiamo al contrario che, qualunque sia $x \in L$, si abbia $xL = L$. Qualunque sia $x \in L$ si ha anche $L = x^{-1}L$ e, poichè $1 \in L$, si ha $x^{-1} \in x^{-1}L = L$. Se anche $y \in L$, si ha $yL = L$ e pertanto $xyL = yL = L$. Questo significa che $xy \in L$ e rimane dimostrato che L è un sottogruppo di H.

2.3. - *L'insieme N dei punti diversi da O della retta M che congiunge O con 1 è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$.*

Poichè $1 \in N$, se $x \in N$, si ha $x \in xN$. Ne viene che M e xM coincidono perchè passano entrambe per x e per O. Allora coincidono anche x e xN e per 2.2. N è un sottogruppo di H.

2.4. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero e sia R una retta di G passante per 1 e non passante per O. Allora da $aR = R$ $(a \in G,\ a \neq 0)$ segue $a = 1$.*

Per 2.1 R non è un sottogruppo di $H = G - \{O\}$ e allora per 2.2 le rette Rr^{-1} $(r \in R)$ non sono tutte coincidenti con R. Se Rr_1^{-1} $(r_1 \in R)$ è distinta da R, siccome Rr_1^{-1} ed R passano entrambe per 1, si ha che 1 è l'unico punto che esse abbiano in comune. Allora a è l'unico punto comune ad aRr_1^{-1} e aR.

Ora se è $aR = R$ risulta anche $aRr_1^{-1} = Rr_1^{-1}$ e perciò $a = 1$, come si voleva dimostrare.

2.5. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due bilatero e sia R una retta di G passante per 1 e non per 0. Allora l'insieme dei punti di R è un sistema di generatori di $H = G - \{O\}$.*

Come abbiamo già osservato le rette Rr^{-1} $(r \in R)$ non sono tutte coincidenti e, poichè passano tutte per 1, se a è un qualunque elemento di H, esisterà $r_1 \in R$ tale che Rr_1^{-1} e Ra^{-1} siano incidenti; esisteranno cioè r_2, $r_3 \in R$ tali che si abbia $r_2r_1^{-1} = r_3a^{-1}$, ossia $a = r_1r_2^{-1}r_3$ e risulta dimostrato quanto si voleva.

2.6. - *Sia G un gruppo affine d'incidenza di dimensione due (desarguesiano o no) bilatero. Allora G è commutativo.*

Tenuto conto di 2.5, basterà dimostrare che il prodotto di due elementi qualsiasi di una retta R di G passante per 1 e non passante per O è commutativo.

Detto r un qualunque punto di R, si consideri la collineazione di G

$$\tilde{r} : x \to rxr^{-1} .$$

Si verifica subito che $rR = \tilde{r}Rr^{-1} = R$: infatti $1 \in R$ e perciò $1 \in rRr^{-1}$; d'altra parte $r \in R$ e pertanto $r \in rRr^{-1}$. Ne viene che rRr^{-1} è la retta che congiunge 1 con r, cioè la retta R. Da $rRr^{-1} = R$ segue che si ha anche $r^{-1}Rr = R$ e allora, tenuto conto che R è un sistema di generatori di H, si ha che se x è un qualunque punto di G diverso da zero, risulta

$$xRx^{-1} = R . \tag{4}$$

Siano allora a, b due punti appartenenti ad R. Posto $a^{-1}b = x$, poichè a, b appartengono ad R, si ha che $a^{-1}R$ è la retta che congiunge 1 con x. Dalla (4) segue

$$\tilde{x} : a^{-1}R \to xa^{-1}Rx^{-1} = xa^{-1}x^{-1}R .$$

Ora $b = xa \in R$, $a \in R$ e quindi $xa^{-1}x^{-1}R = xa^{-1}Rx^{-1}$ è la retta che congiunge x con 1, cioè si ha $a^{-1}R = xa^{-1}x^{-1}R$, ossia $axa^{-1}x^{-1}R = R$. Da 2.4 segue allora $axa^{-1}x^{-1} = 1$, $ax = xa$ e quindi $ab = ba$, come si voleva dimostrare.

3. - Rammentiamo che, secondo ELLERS e KARZEL [4], si dice *gruppo proiettivo d'incidenza* un gruppo G dotato anche di una struttura di spazio proiettivo tale che ogni traslazione sinistra del gruppo G

$$a^* : x \to ax \quad (a,\ x \in G)$$

sia una collineazione dello spazio proiettivo G. Queste collineazioni costituiscono un gruppo Γ isomorfo a G semplicemente transitivo sui punti di G.

Vogliamo ora accennare al modo di estendere due teoremi analoghi ai teoremi 3 e 4 anche ai gruppi proiettivi d'incidenza desarguesiani di dimensione $n > 1$.

Modificando un po' la definizione di E. ELLERS e H. KARZEL [4] chiameremo *quasicorpo normale* di dimensione n un quasicorpo associativo sinistro K che sia uno spazio vettoriale destro di dimensione n sopra un campo F che contenga come sottoquasicorpo un corpo $\overline{F}$ antiisomorfo ad F e tale che il gruppo moltiplicativo K^* di K abbia un sottogruppo normale isomorfo al gruppo moltiplicativo $\overline{F}^*$ di $\overline{F}$.

Secondo il procedimento seguito da ELLERS e KARZEL [4] e da me nel caso di gruppi d'incidenza proiettivi desarguesiani di dimensione due ad ogni gruppo di incidenza G desarguesiano di dimensione $n > 1$ si può associare un quasicorpo normale che sia uno spazio vettoriale destro di dimensione $n+1$ sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G e che quindi contenga come sottoquasicorpo un corpo $\overline{F}$ antiisomorfo a F nella seguente maniera:

Lo spazio proiettivo G desarguesiano di dimensione $n > 1$ definisce uno spazio vettoriale destro K sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G di dimensione $n+1$ nel quale ogni collineazione a^* appartenente a Γ determina una trasformazione semilineare α^* tale che

$$(\alpha h)^*\xi = (\alpha^*\xi)h \quad (\alpha, \xi \in K;\ \alpha \neq 0;\ h \in F;\ h \neq 0)\ .$$

In K introduciamo un'operazione di moltiplicazione, che indicheremo col simbolo $\circ$, ponendo

$$O \circ \beta = O; \quad \alpha \circ \beta = \alpha^*\beta, \quad \text{se} \quad \alpha \neq O\ .$$

Si verifica facilmente che con l'aggiunta di questa operazione di moltiplicazione K diventa un quasicorpo normale di dimensione $n+1$ sopra il corpo F delle coordinate dei punti di G. Supposto di aver dimostrato come in [4] che la moltiplicazione introdotta dà a K una struttura di quasicorpo associativo sinistro, per brevità ci limiteremo a controllare che K contiene un sottoquasicorpo $\overline{F}$ antiisomorfo ad F e che $\overline{F}^*$ è un sottogruppo normale di K^*. Sia η l'unità di K e siano h, k due qualunque elementi di F; si ha

$$(\eta h) \circ (\eta k) = \eta \circ (\eta k) h = (\eta k) h = \eta(kh)$$

$$\eta h + \eta k = \eta(h + k)$$

e questo dimostra che gli elementi di K della forma $\eta h (h \in F)$ costituiscono un corpo $\overline{F}$ antiisomorfo ad F.

Consideriamo ora l'applicazione, φ, di K^* su G che porta ogni vettore α appartenente a K^* nel punto a di G rappresentato da α. Evidentemente φ è un omomorfismo di K^* su G ed il nucleo φ^{-1} (1) di φ, costituito dagli elementi di K^* della forma ηh, coincide con $\overline{F}^*$, ossia $\overline{F}^*$ è normale in K^*.

Viceversa ad ogni quasicorpo normale di dimensione $n + 1 > 2$ sopra un corpo F si può associare uno spazio proiettivo d'incidenza desarguesiano G di dimensione $n > 1$ in modo che F risulti isomorfo al corpo delle coordinate dei punti di G.

La definizione di quasicorpo normale qui data, nel caso che F sia un corpo commutativo, coincide con quella di Ellers e Karzel. I quasicorpi normali di dimensione 3 sopra un corpo finito F sono stati determinati da me nella nota [9] dalla quale risulta l'esistenza di quasicorpi associativi finiti non normali.

Ebbene, seguendo il procedimento usato per dimostrare i teoremi 3 e 4 si può dimostrare quanto segue:

3.1. - *Sia G un gruppo proiettivo d'incidenza desarguesiano di dimensione $n > 1$ e sia K il quasicorpo normale relativo. Allora Γ è un gruppo di proiettività se e solo se $\overline{F}$ è un sottocorpo del nucleo N di K.*

BIBLIOGRAFIA

[1] Bose R. C.: *An affine analogous of Singer' theorem.* Journ. Indian Math. Soc., 6 (1942), 1-15.

[2] Bruck R. H.: *Difference sets in a finite group.* Trans. Amer. Math. Soc., 78 (1955), 463-481.

[3] Ellers E. e Karzel H.: *Involutorische Geometrien.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 25 (1961), 93-104.

[4] Ellers E. e Karzel H.: *Kennzeichnung elliptischer Gruppenräume.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 26 (1963), 55-77.

[5] Hall M.: *Cyclic projective planes.* Duke Math. J., 14 (1947), 1079-1090.

[6] Karzel H.: *Kommutative Inzidenzgruppen.* Arch. Math., 13 (1962), 535-538.

[7] Karzel H.: *Ebene Inzidenzgruppen.* Arch. Math., 15 (1964), 10-17.

[8] Rosati L. A.: *Piani desarguesiani affini non ciclici.* Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII, 22 (1957), 443-449.

[9] Rosati L. A.: *Piani proiettivi desarguesiani non ciclici.* Boll. U. M. I., III, 12 (1957), 230-240.

[10] Singer J.: *A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory.* Trans. Amer. Math. Soc., 43 (1938), 337-385.

[11] Zappa G.: *Sui piani grafici finiti h-l-transitivi.* Boll. U. M. I., III, 9 (1954), 16-24.

[12] Zappa G.: *Sui piani grafici finiti transitivi e quasi transitivi.* Ricerche di Matematica, 2 (1953), 274-287.