RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELLA CORSI

Sui commutatori nei gruppi il cui derivato è prodotto diretto di gruppi ciclici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 35, nº 2 (1965), p. 253-259

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_253_0>

SUI COMMUTATORI NEI GRUPPI IL CUI DERIVATO È PRODOTTO DIRETTO DI GRUPPI CICLICI

Nota *) *di* Gabriella Corsi (*a Firenze*) **)

1. Dato un gruppo G il cui derivato G' sia prodotto diretto di un numero finito m di gruppi ciclici, si può porre il problema di stabilire se G' possa essere generato mediante m commutatori. Il problema, in questa forma generale, riceve riposta negativa: I. D. Mac Donald ha dimostrato in [2] che, fissato comunque un numero naturale n, esiste un gruppo G, il cui derivato G' è ciclico e non può essere generato da meno di n commutatori. D'altra parte, sempre in [2], Mac Donald dimostra che, se il derivato G' di un gruppo G è ciclico, condizione sufficiente affinchè G' sia generato da un commutatore è che G sia nilpotente oppure G' infinito.

Estendiamo qui in parte questo teorema, provando che:

a) Se G è nilpotente e G' prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti, si può generare G' mediante m commutatori;

b) se G è nilpotente di classe 2 e G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici (finiti o infiniti), si può generare G' mediante m commutatori.

---

*) Pervenuta in redazione il 9 gennaio 1965.
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.
**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

2. – LEMMA: *Se G è un p-gruppo e il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici, si può generare G' con m commutatori.*

Infatti, essendo G' prodotto diretto di m p-gruppi ciclici, il sottogruppo di Frattini di G' ha indice p^m in G' stesso. Ne viene, per il teorema di Burnside sulla base, che da ogni insieme di generatori di G' si possono estrarre m elementi che generano G': in particolare dall'insieme dei commutatori di G si potranno estrarre m generatori di G'.

TEOREMA 1: *Dato un gruppo nilpotente G, se il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti, si può generare G' con m commutatori.*

Supponiamo dapprima G finito: poichè è nilpotente, G è allora prodotto diretto dei suoi sottogruppi di Sylow $G_1, G_2, \ldots, G_r$ e si ha:

$$G' = G_1' \times G_2' \times \ldots \times G_r'$$

dove G_i' $(i = 1, \ldots, r)$ è il derivato del p_i-gruppo G' [1]. Inoltre i G_i', quali sottogruppi di Sylow di G_r, sono pienamente invarianti in G', quindi, se G' è prodotto diretto degli m sottogruppi ciclici $T_1, T_2, \ldots, T_m$, si ha [2]:

$$G_i' = (G_i' \cap T_1) \times (G_i' \cap T_2) \times \ldots \times (G_i' \cap T_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

---

[1]) Se un gruppo G è prodotto diretto di r suoi sottogruppi qualunque $G_1, G_2, \ldots, G_r$, il suo derivato G' è prodotto diretto dei derivati G_i' dei G_i (i $= 1, \ldots, r$) (cfr. per es. [1] pag. 120).

[2]) Se H è un sottogruppo pienamente invariante di un gruppo G prodotto diretto dei suoi sottogruppi $G_1, G_2, \ldots, G_r$, deve essere $H = (H \cap G_1) \times (H \cap G_2) \times \ldots \times (H \cap G_r)$. Infatti l'endomorfismo φ_i $(i = 1, \ldots, r)$ di G, definito da $\varphi_i(g) = \varphi_i(g_1 g_2 \ldots g_r) = g_i$ $(g \in G;$ $g_j \in G_j;$ $j = 1, \ldots, r)$, induce in $H \cap G_i$ l'automorfismo identico, onde deve essere: $H \cap G_i = \varphi_i(H \cap G_i) \subset \varphi_i(H)$; d'altra parte, poichè H è pienamente invariante, $\varphi_i(H) \subset H \cap G_i$, quindi $\varphi_i(H) = H \cap G_i$, cioè $H \cap G_i$ è proprio la componente i-esima di H.

Dunque ogni p_i-gruppo G'_i è prodotto diretto di m gruppi ciclici e quindi, per il lemma, è generato da m commutatori. Siano essi:

$$\gamma_1^{(i)} = (a_{1i}, b_{1i}) \,, \quad \gamma_2^{(i)} = (a_{2i}, b_{2i}) \,, \quad \ldots, \quad \gamma_m^{(i)} = (a_{mi}, b_{mi})$$
$$(i = 1, \ldots, r)$$

Allora gli m commutatori

$$\begin{aligned} \gamma_j &= (a_{j1}a_{j2} \ldots a_{jr}\, b_{j1}b_{j2} \ldots, b_{jr}) = \\ &= (a_{j1}, b_{j1})(a_{j2}, b_{j2}) \ldots (a_{jr}, b_{jr}) \qquad\qquad (j = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

generano G'; infatti, se $p_i^{k_i}$ è l'ordine di G'_i, posto $q_i = p_1^{k_1} \ldots p_{i-1}^{k_{i-1}}\, p_{i+1}^{k_{i+1}} \ldots p_r^{k_r}$ si ha:

$$\gamma_j^{q_i} = (a_{ji}, b_{ji})^{q_i} \,,$$

ed, essendo $(a_{ji}, b_{ji}) \in G'_i$, q_i è primo con l'ordine di (a_{ji}, b_{ji}), onde $\{\gamma_j^{q_i}\} = \{(a_{ji}, b_{ji})\}$: ogni commutatore $\gamma_j^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r;\, j = 1, \ldots, m)$ si può cioè ottenere come potenza di un commutatore γ_j e quindi $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ contiene un sistema di generatori di ciascun G'_i.

Sia ora G infinito [1]): poichè G' è generato da un numero finito di commutatori, possiamo sempre ricondurci al caso che G sia generato da un sistema finito di elementi $g_1, g_2, \ldots, g_r$. Il centralizzante C_i di ciascun g_i $(i = 1, \ldots, r)$ deve avere indice finito in G, infatti tale indice è uguale al numero dei coniugati di g_i e questo numero deve essere finito, altrimenti sarebbero infiniti anche i commutatori di g_i con gli altri elementi di G, in contraddizione con la finitezza di G'. Ne viene che il centro C di G ha indice finito: C infatti non è altro che l'intersezione di tutti i centralizzanti C_i, e si ha:

$$[G : C_1 \cap C_2] = [G : C_1][C_1 : C_1 \cap C_2] \,,$$

[1]) La linea di questa dimostrazione è quella usata da I. D. Mac Donald per provare l'analoga proposizione nel caso di G nilpotente infinito e G' ciclico.

ma $C_1 \cap C_2$ è il centralizzante di g_2 in C_1 e quindi ha indice finito in C_1, onde $C_1 \cap C_2$ ha indice finito in G; analogamente, procedendo per induzione, si vede che C ha indice finito in G ed è perciò infinito. Inoltre C è finitamente generato: infatti, poichè C ha indice finito in G, esistono r interi positivi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, tali che $g_1^{\alpha_1}, g_2^{\alpha_2}, \ldots, g_r^{\alpha_r} \in C$; sia $\overline{C} = \{g_1^{\alpha_1}, g_2^{\alpha_2}, \ldots, g_r^{\alpha_r}\}$: ogni elemento $x \in G/\overline{C}$ si può esprimere nella forma $x = \bar{g}_1^{x_1} \bar{g}_2^{x_2} \ldots \bar{g}_r^{x_r} d_r$ (dove $\bar{g}_i$ è il laterale di $\overline{C}$ rappresentato da g_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ e d_r è un elemento del derivato di $G/\overline{C}$, il quale è finito poichè è finito il derivato di G) con $1 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, r)$; quindi $G/\overline{C}$ è finito; è finito pertanto anche l'indice di $\overline{C}$ in C ed, essendo $\overline{C}$ finitamente generato, anche C risulta finitamente generato. Ne segue che esiste in C almeno un sottogruppo N, libero da torsione massimo; come tale N ha indice finito in C (essendo C finitamente generato) e quindi in G; inoltre N è un sottogruppo normale, perchè centrale. Dunque G/N è un gruppo nilpotente finito; d'altra parte $G' \cap N = 1$ (G' è finito e N libero da torsione), onde [1]):

$$\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq G'$$

Ma allora $\left(\frac{G}{N}\right)'$ è prodotto diretto di m gruppi ciclici e, applicando i risultati precedenti, si ha che $\left(\frac{G}{N}\right)'$ è generato da m commutatori, onde G' è generato da m commutatori.

---

[1]) Dato un qualunque gruppo G, se N è un sottogruppo normale di G, si ha $\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq \frac{G'}{G' \cap N}$. Infatti l'omomorfismo naturale φ di G su $\frac{G}{N}$ fa corrispondere ad ogni elemento del tipo $x^{-1}y^{-1}xy$ di G un elemento del tipo $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\,\bar{y}$ di $\frac{G}{N}$, viceversa ogni generatore $\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}\bar{x}\,\bar{y}$ di $\left(\frac{G}{N}\right)'$ proviene da almeno un elemento di G del tipo $x^{-1}y^{-1}xy$; pertanto φ, portando un sistema di generatori di G' in un sistema di generatori di $\left(\frac{G}{N}\right)'$, induce un omomorfismo $\bar{\varphi}$ di G' su $\left(\frac{G}{N}\right)'$; il nucleo di $\bar{\varphi}$ è $G' \cap N$, onde $\left(\frac{G}{N}\right)' \simeq \frac{G'}{G' \cap N}$.

2. – TEOREMA 2: *Se G è un gruppo nilpotente di classe 2 ed il suo derivato G' è prodotto diretto di m gruppi ciclici finiti T_1, $T_2, \ldots, T_m$ e di n gruppi ciclici infiniti $F_1, F_2, \ldots, F_n$, si può generare G' mediante $m + n$ commutatori. Nel caso poi che sia $m = 0$, G' si può esprimere come prodotto diretto di n gruppi ciclici generati da commutatori.*

Per $n = 0$ il teorema è vero come caso particolare del teorema precedente; procediamo allora per induzione rispetto ad n. Posto $H = T_1 \times T_2 \times \ldots \times T_m \times F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_{n-1}$, essendo H normale in G, perchè centrale, si ha [1]):

$$\left(\frac{G}{H}\right)' \simeq \frac{G'}{H} \simeq F_n \; ;$$

cioè $\frac{G}{H}$ è un gruppo che ha il derivato ciclico infinito, onde, per il teorema di I. D. Mac Donald [2], esiste un commutatore $\bar{\delta}_n$ che genera $\left(\frac{G}{H}\right)'$. Se φ è l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{H}$, esiste [1]) in G un commutatore δ_n, tale che $\varphi(\delta_n) = \bar{\delta}_n$ e, poichè $\bar{\delta}_n$ genera tutto $\left(\frac{G}{H}\right)'$, le potenze di δ_n rappresentano [1]) tutti i laterali di H in G'; inoltre si ha $\{\delta_n\} \cap H = 1$, perchè, se fosse diverso dall'unità, questo sottogruppo di $\{\delta_n\}$ dovrebbe avere indice finito in $\{\delta_n\}$. Pertanto si può scrivere:

$$G' = H \times \{\delta_n\}$$

con $\{\delta_n\}$ sottogruppo normale di G, perchè centrale. Analogamente a sopra, si ha allora:

$$\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)' \simeq \frac{G'}{\{\delta_n\}} \simeq H$$

cioè $\frac{G}{\{\delta_n\}}$ è un gruppo nilpotente di classe 2 il cui derivato è pro-

---

[1]) Cfr. nota precedente.

dotto diretto di m gruppi ciclici finiti e $n-1$ gruppi ciclici infiniti; per l'ipotesi d'induzione $\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)'$ è quindi generato da $m+n-1$ commutatori $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_m, \bar{\delta}_1, \ldots, \bar{\delta}_{n-1}$. Pertanto si possono determinare in G $m+n-1$ commutatori[1] $\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, tali che $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1}\}$ contiene almeno un rappresentante di ogni laterale di $\{\delta_n\}$ in G: ogni elemento $g' \in G'$ si può dunque esprimere nella forma

$$g' = \gamma_1^{x_1}\gamma_2^{x_2} \ldots \gamma_m^{x_m}\delta_1^{y_1}\delta_2^{y_2} \ldots \delta_n^{y_n}$$

Se poi $m=0$ ed $n=2$, si ha come sopra:

$$G' = F_1 \times \{\delta_2\}$$

e

$$\left(\frac{G}{\{\delta_2\}}\right)' \simeq \frac{G'}{\{\delta_2\}} \simeq F_1$$

onde, ripetendo per $\frac{G}{\{\delta_2\}}$ il ragionamento fatto sopra per $\frac{G}{H}$, si ha $G = \{\delta_1\} \times \{\delta_2\}$, con δ_1 e δ_2 commutatori in G. Per ipotesi di induzione possiamo allora supporre che il derivato $\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)'$ di $\frac{G}{\{\delta_n\}}$ si possa esprimere come prodotto diretto di $n-1$ gruppi ciclici generati da commutatori:

$$\left(\frac{G}{\{\delta_n\}}\right)' = \{\bar{\delta}_1\} \times \{\bar{\delta}_2\} \times \ldots \times \{\bar{\delta}_{n-1}\}.$$

Se φ è l'omomorfismo naturale di G su $\frac{G}{\{\delta_n\}}$, esistono quindi in G $n-1$ commutatori $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$, tali che $\varphi(\delta_i) = \bar{\delta}_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$; sia $K = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}\}$: dovrà essere $K \cap \{\delta_n\} = 1$, perchè $K \simeq \frac{G}{\{\delta_n\}} \simeq \frac{K \cup \{\delta_n\}}{\{\delta_n\}} \simeq \frac{K}{K \cap \{\delta_n\}}$ e, mentre K è

---

[1]) Cfr. nota p. 4.

prodotto diretto di $n-1$ gruppi ciclici infiniti, se fosse $K \cap \cap \{\delta_n\} \neq 1$, K potrebbe essere al più prodotto diretto di $n-2$ gruppi ciclici infiniti. D'altra parte, poichè $\{\bar{\delta}_i\} \cap \{\bar{\delta}_j\} = 1$ $(i, j = 1, \dots, n-1)$, deve essere $\{\delta_i\} \cap \{\delta_j\} \in \{\delta_n\}$, ma $K \cap \cap \{\delta_n\} = 1$, onde $\{\delta_i\} \cap \{\delta_j\} = 1$ $(i, j = 1, \dots, n-1)$. Pertanto:

$$G' = \{\delta_1\} \times \{\delta_2\} \times \dots \times \{\delta_n\} .$$

BIBLIOGRAFIA

[1] A. G. Kurosh: *The Theory of Groups*, vol. I, New York, 1955.

[2] I. D. Mac Donald: *On Cyclic Commutator Subgroups*. Jour. London Math. Soc., 38 (1963), 419-422.