

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO LETTA

## **Un teorema di approssimazione per le funzioni continue rispetto a una variabile e misurabili rispetto all'altra**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 35, n° 2 (1965), p. 260-266

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1965\\_\\_35\\_2\\_260\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1965__35_2_260_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

UN TEOREMA DI APPROSSIMAZIONE  
PER LE FUNZIONI CONTINUE RISPETTO  
A UNA VARIABILE E MISURABILI  
RISPETTO ALL'ALTRA

*Nota \*) di* GIORGIO LETTA (*a Pisa*) \*\*)

Se  $X, Y$  sono intervalli chiusi e limitati della retta, e  $f$  è una funzione numerica finita, definita nel rettangolo  $X \times Y$ , si dice che  $f$  è *continua rispetto alla seconda variabile e misurabile rispetto alla prima*, se sono soddisfatte le due condizioni seguenti:

a) per quasi ogni  $x \in X$ , la funzione parziale  $f(x, \cdot)$  è continua in  $Y$ ;

b) per ogni  $y \in Y$ , la funzione parziale  $f(\cdot, y)$  è misurabile (secondo Lebesgue) in  $X$ .

Per successioni di funzioni di tale tipo, G. Stampacchia ha introdotto il concetto di convergenza quasi uniforme *di tipo semiregolare*, e ha dimostrato in proposito un notevole teorema [1].

La nozione di funzione continua rispetto a una variabile e misurabile rispetto all'altra, e il teorema di G. Stampacchia, sono stati estesi in [2] in senso « astratto »: cioè col sostituire all'intervallo  $X$  un opportuno spazio di misura, e all'intervallo  $Y$  un opportuno spazio topologico.

Nella presenta nota, riprendendo le ipotesi di [2], si dimostra

---

\*) Pervenuta in redazione il 20 aprile 1965.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Pisa.

\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca Matematica del C.N.R.

un teorema di approssimazione (teor. (1.5)), secondo il quale ogni funzione continua rispetto alla seconda variabile e misurabile rispetto alla prima è limite, nel senso della convergenza quasi uniforme di tipo semiregolare, di una successione di funzioni, ciascuna delle quali è somma di un numero finito di funzioni del tipo

$$f(x, y) = \chi_A(x) \cdot g(y),$$

con  $A$  sottoinsieme misurabile di  $X$  e  $g$  funzione continua in  $Y$  (dove  $\chi_A$  denota la funzione caratteristica di  $A$ ).

Nel caso banale in cui lo spazio  $Y$  si riduca ad un punto, il teorema degenera nel ben noto teorema di approssimazione di una funzione misurabile mediante funzioni semplici.

Come esempio di applicazione, si fa vedere come, nell'ipotesi in cui lo spazio  $X$  sia dotato anch'esso di un'opportuna struttura topologica, sia possibile dedurre dal teorema di approssimazione (come immediato suo corollario) un teorema (teor. (2.1)), che estende alla presente situazione « astratta » il noto teorema di G. Scorza Dragoni [3], riguardante la quasi-continuità di tipo semiregolare di una funzione continua rispetto a una variabile e misurabile rispetto all'altra.

**1.** – Siano:  $X$  un insieme,  $\lambda$  una misura esterna *finita* nell'insieme delle parti di  $X$ ,  $\mathfrak{L}$  la  $\sigma$ -algebra delle parti di  $X$  misurabili (secondo Carathéodory) rispetto a  $\lambda$ . Siano, inoltre,  $Y$  uno spazio topologico metrizzabile, compatto, di tipo numerabile,  $d$  una metrica compatibile con la topologia di  $Y$ ,  $H$  un sottoinsieme numerabile di  $Y$ , ovunque denso in  $Y$ .

Denoteremo con  $\mu$  (cfr. [2], n. 3) la misura esterna nell'insieme delle parti di  $S = X \times Y$ , definita ponendo, per ogni  $E \subseteq S$ ,

$$(1.1) \quad \mu(E) = \lambda(pr_1 E)$$

(dove  $pr_1 E$  designa la prima proiezione dell'insieme  $E$ ).

Denoteremo con  $\mathfrak{U}$  il sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale  $\mathbf{R}^S$  di tutte le funzioni numeriche finite definite in  $S$ ,

costituito dalle funzioni  $f \in \mathbf{R}^s$  che soddisfano alle due condizioni seguenti:

(1.2) per  $\lambda$ -quasi ogni  $x \in X$ , la funzione parziale  $f(x, \cdot)$  è continua in  $Y$ ;

(1.3) per ogni  $y \in H$ , la funzione parziale  $f(\cdot, y)$  è misurabile in  $(X, \mathfrak{L})$ .

Denoteremo con  $\mathfrak{U}_0$  il sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^s$  generato dalle funzioni  $f$  della forma:

$$(1.4) \quad f(x, y) = \chi_A(x) \cdot g(y) \quad ((x, y) \in S)$$

con  $A \in \mathfrak{L}$  e  $g$  continua in  $Y$ . Evidentemente  $\mathfrak{U}_0$  è un sottospazio di  $\mathfrak{U}$ .

Sussiste il seguente teorema di approssimazione:

(1.5) **TEOREMA:** *Nelle ipotesi sopra precisate, ogni funzione di  $\mathfrak{U}$  è limite, rispetto alla convergenza  $\mu$ -quasi uniforme<sup>1)</sup>, di una successione di funzioni di  $\mathfrak{U}_0$ .*

Alla dimostrazione del teorema (1.5) premettiamo il seguente

(1.6) **LEMMA:** *Nelle ipotesi di (1.5), se  $f \in \mathfrak{U}$ , è possibile, per ogni  $\varepsilon > 0$  e ogni  $\omega > 0$ , determinare un insieme  $I$  di  $\mathfrak{L}$ , con  $\lambda(I) < \varepsilon$ , e una partizione finita  $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$  di  $X - I$ , costituita da insiemi di  $\mathfrak{L}$ , in modo tale che, per ogni coppia  $x, x'$  di punti di  $X - I$  appartenenti a uno stesso insieme  $A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ), risulti*

$$|f(x, y) - f(x', y)| < \omega \quad \text{per} \quad y \in Y.$$

**DM.** del lemma (1.6): Per ogni intero  $n$ , si ponga:

$$g_n(x) = \sup \{ |f(x, y) - f(x, y')| : y, y' \in H, \quad d(y, y') < 1/n \} \\ (x \in X).$$

---

<sup>1)</sup> Nel senso specificato in [2], n. 1.

Per  $\lambda$ -quasi ogni  $x \in X$ ,  $f(x, \cdot)$  è uniformemente continua in  $Y$ , sicchè risulta  $g_n(x) \downarrow 0$ . La successione  $(g_n)$  di funzioni misurabili in  $(X, \mathfrak{L})$  converge dunque in misura verso zero (rispetto a  $\lambda$ ). Pertanto, fissati  $\varepsilon > 0$ ,  $\omega > 0$ , esiste un intero  $p$  tale che

$$\lambda(\{x: g_p(x) \geq \omega/3\}) < \varepsilon/2.$$

Sia  $(U_j)_{1 \leq j \leq n}$  un ricoprimento finito di  $Y$ , costituito da insiemi aperti, non vuoti, di diametro minore di  $1/p$ ; e per ogni  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) sia  $y_j$  un punto di  $U_j \cap H$ .

Sia  $J$  un insieme di  $\mathfrak{L}$ , con  $\lambda(J) < \varepsilon/2$ , tale che le funzioni  $f(\cdot, y_j)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) siano equilimitate in  $X - J$ ; e si ponga

$$I = J \cap \{x: g_p(x) \geq \omega/3\}.$$

Sia infine  $(A_i)_{1 \leq i \leq m}$  una partizione finita di  $X - I$ , costituita da insiemi di  $\mathfrak{L}$ , tale che ciascuna delle funzioni  $f(\cdot, y_j)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) abbia oscillazione minore di  $\omega/3$  su ciascuno degli insiemi  $A_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ). Si ha  $\lambda(I) < \varepsilon$ . Inoltre, se  $x, x'$  sono punti di  $X - I$  appartenenti a uno stesso insieme  $A_i$ , risulta

$$\begin{aligned} & |f(x, y) - f(x', y)| \leq |f(x, y) - f(x, y_j)| + \\ & + |f(x, y_j) - f(x', y_j)| + |f(x', y_j) - f(x', y)| < \omega \quad \text{per } y \in U_j. \end{aligned}$$

Ciò prova la tesi.

DM. del teorema (1.5): Sia  $f \in \mathfrak{U}$ . Senza ledere la generalità, si può supporre che  $f(x, \cdot)$  sia continua in  $Y$  per ogni  $x \in X$ .

Per ogni intero  $n$  si determinino, a norma di (1.6), un insieme  $I_n \in \mathfrak{L}$ , con  $\lambda(I_n) < 2^{-n}$ , e una partizione finita  $(A_i^n)_{1 \leq i \leq m(n)}$  di  $X - I_n$ , costituita da insiemi di  $\mathfrak{L}$ , in modo tale che, per ogni coppia  $x, x'$  di punti di  $X - I_n$  appartenenti a uno stesso insieme  $A_i^n$  ( $1 \leq i \leq m(n)$ ), risulti

$$|f(x, y) - f(x', y)| < 1/n \quad \text{per } y \in Y.$$

Scelto, per ogni  $n$  e ogni  $i$  ( $1 \leq i \leq m(n)$ ), un punto  $a_i^n \in A_i^n$ , si denoti con  $f_n$  la funzione (appartenente a  $\mathfrak{U}_0$ ) definita da:

$$f_n(x, y) = \sum_{i=1}^{m(n)} \chi_{A_i^n}(x) \cdot f(a_i^n, y) \quad ((x, y) \in S).$$

Posto  $I_0 = \limsup_n I_n$ , risulta  $\lambda(I_0) = 0$ . Inoltre, per ogni  $x \in X - I_0$ , la successione  $(f_n(x, \cdot))$  converge uniformemente in  $Y$  verso la funzione  $f(x, \cdot)$ . Conseguentemente ([2], teor. (2.4)) la successione  $(f_n)$  converge  $\mu$ -quasi uniformemente in  $S$  verso la funzione  $f$ .

**2.** - Mantenendo tutte le ipotesi del n. 1, supporremo ora, ulteriormente, che  $X$  sia dotato di una struttura topologica, e considereremo lo spazio  $S = X \times Y$  munito della topologia prodotto. Diremo che una funzione numerica finita  $f$ , definita in  $S$ , è  $\mu$ -quasi continua se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un insieme  $E \subseteq S$ , con  $\mu(E) < \varepsilon$ , tale che la restrizione di  $f$  al sottospazio  $S - E$  sia continua.

Sussiste il seguente teorema, nel quale è contenuto come caso particolare il teorema di G. Scorza Dragoni [3], citato nella introduzione.

(2.1) **TEOREMA:** *Se la misura esterna  $\lambda$  è legata alla topologia di  $X$  dalla seguente condizione di compatibilità:*

$$(2.2) \quad \lambda(A) = \sup \{ \lambda(F) : F \subseteq A, F \in \mathfrak{L}, F \text{ chiuso} \} \quad \text{per} \quad A \in \mathfrak{L},$$

*allora ogni funzione di  $\mathfrak{U}$  è  $\mu$ -quasi continua.*

**DEM.:** In virtù di (2.2), ogni funzione della forma (1.4) è  $\mu$ -quasi continua. Essendo l'insieme delle funzioni  $\mu$ -quasi continue un sottospazio vettoriale di  $\mathbf{R}^s$ , chiuso rispetto alla convergenza  $\mu$ -quasi uniforme, la tesi segue applicando (1.5).

**3.** - Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato soltanto funzioni definite nell'intero prodotto cartesiano  $S = X \times Y$ . I risultati conseguiti sono peraltro applicabili anche al caso di una funzione definita su un opportuno sottoinsieme di  $S$ , grazie al seguente teorema di prolungamento, il quale consente di estendere una siffatta funzione all'intero spazio  $S$ , conservandone inalterate le proprietà di continuità e di misurabilità parziali.

(3.1) **TEOREMA:** *Nelle ipotesi del n. 1, sia  $f$  una funzione*

numerica finita, definita in un sottoinsieme  $E$  di  $X \times Y$ . Si suppongano verificate le condizioni seguenti:

(3.2) per  $\lambda$ -quasi ogni  $x \in X$ , la sezione  $E(x) = \{y \in Y: (x, y) \in E\}$  è un sottoinsieme di  $Y$  coincidente con l'aderenza del proprio interno, e la funzione parziale  $f(x, \cdot)$  (ivi definita) è continua;

(3.3) per ogni  $y \in H$ , la sezione  $E(y) = \{x \in H: (x, y) \in E\}$  è un sottoinsieme di  $X$   $\lambda$ -misurabile, e la funzione parziale  $f(\cdot, y)$  (ivi definita) è misurabile rispetto ad  $\mathfrak{L}$ .

Esiste allora una funzione  $g \in \mathfrak{U}$  che prolunga  $f$ .

DIM.: Senza ledere la generalità, si può assumere la condizione (3.2) con le parole « per ogni  $x$  » in luogo delle parole « per  $\lambda$ -quasi ogni  $x$  ».

Essendo

$$pr_1 E = \bigcup^{-1} \{E(y): y \in H\} \in \mathfrak{L},$$

si può anche supporre che sia  $pr_1 E = X$ .

Si ponga allora:

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{se } (x, y) \in E, \\ \inf \{f(x, z)d(y, z): z \in E(x)\} / d(y, E(x)), & \text{se } (x, y) \in S - E. \end{cases}$$

Per ogni  $x \in X$ , la funzione  $g(x, \cdot)$  è continua in  $Y$ , in virtù del teorema di estensione di Tietze-Urysohn (cfr. [4], 4.5.1).

Rimane da provare che, per ogni fissato  $y \in H$ , la funzione  $g(\cdot, y)$  è misurabile in  $(X, \mathfrak{L})$ .

Essendo, invero

$$d(y, E(x)) = \inf \{d(y, z): z \in H \cap E(x)\},$$

risulta, per ogni  $a \in \mathbf{R}$ ,

$$\{x \in X: d(y, E(x)) < a\} = \bigcup^{-1} \{E(z): z \in H, d(y, z) < a\} \in \mathfrak{L},$$

talchè la funzione  $x \rightarrow d(y, E(x))$  è misurabile in  $(X, \mathfrak{L})$ .

Analogamente, posto

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \inf \{f(x, z)d(y, z): z \in E(x)\} \\ &= \inf \{f(x, z)d(y, z): z \in H \cap E(x)\}, \end{aligned}$$

risulta, per ogni  $a \in \mathbf{R}$ ,

$$\{x \in X : h(x, y) < a\} = \bigcup_{z \in H} \{x \in \overline{E(z)}^{-1} : f(x, z)d(y, z) < a\} \in \mathcal{L},$$

ciò che dimostra la misurabilità della funzione  $h(\cdot, y)$ .

Ne segue la tesi.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] G. STAMPACCHIA: *Sulle successioni di funzioni continue rispetto a una variabile e misurabili rispetto ad un'altra*. Rend. Acc. Linc., serie 8, vol. VI, 198-201 (1949).
- [2] G. LETTA: *Su una generalizzazione del teorema di Severini-Egoroff*. Rend. Sem. Mat. Padova, XXXI, 350-356 (1961).
- [3] G. SCORZA DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto all'altra variabile*. Rend. Sem. Mat., Padova, XVII, 102-106 (1948).
- [4] J. DIEUDONNÉ: *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York - London (1960).