

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIANFRANCO CAPRIZ

**Sulle condizioni imposte dal secondo principio della
termodinamica alle equazioni costitutive**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 36, n° 1 (1966), p. 25-36

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_25_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE CONDIZIONI IMPOSTE
DAL SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA
ALLE EQUAZIONI COSTITUTIVE

di GIANFRANCO CAPRIZ (*a Pisa*) *)

Riassunto - Si determinano condizioni di compatibilità tra il secondo principio della termodinamica e le equazioni costitutive di un continuo, soggetto ad un vincolo interno. Decomposto il tensore di stress nella somma dello stress di equilibrio (secondo la definizione di Coleman) e dello stress dissipativo, si mostra come quest'ultimo sia legato ad una funzione di dissipazione, quando valga un principio proposto da Ziegler.

1. Introduzione.

In alcune recenti memorie¹⁾ vari Autori hanno fatto uso di una opportuna formulazione del secondo principio della termodinamica per stabilire condizioni di compatibilità tra quel principio e le equazioni costitutive di certe classi di continui (i ma-

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Centro Studi Calcolatrici Elettroniche, Università, Pisa.

¹⁾ Si veda, anche per ulteriori riferimenti e la terminologia, B.D. COLEMAN: On global and local forms of the second law of thermodynamics, in "Proprietà di media e teoremi di confronto in fisica matematica"; Corso C.I.M.E., 1963.

teriali « elastico-viscosi », i materiali « semplici », ecc.). Come si proverà in questo lavoro condizioni di compatibilità possono essere stabilite in ipotesi ben generali sulle equazioni costitutive ed anche per casi nei quali i parametri presenti nelle equazioni costitutive sono legati tra loro da vincoli.

Punto di partenza delle nostre considerazioni sono:

1) L'equazione di Neumann, quale formulazione differenziale del primo principio della termodinamica

$$(1.1) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = p^{(\sigma)} - \rho^{-1}h_{i,i} + q;$$

nell'equazione intervengono l'energia interna specifica ε , la potenza delle forze intime per unità di massa $p^{(\sigma)}$, l'intensità specifica delle sorgenti di calore q ed il vettore h_i che rappresenta il flusso di calore.

2) La disuguaglianza di Clausius-Duhem, quale conseguenza locale del secondo principio della termodinamica

$$(1.2) \quad \frac{d\eta}{dt} \geq \frac{q}{\theta} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{h_i}{\theta} \right)_{,i};$$

qui η è l'entropia specifica, θ la temperatura assoluta e ρ la densità.

3) Il principio di equipresenza, per il quale se una variabile appare in una equazione costitutiva quale variabile indipendente, essa deve apparire anche nelle altre, a meno che la sua presenza non contrasti con i due principi della termodinamica.

Indicheremo con φ_α ($\alpha = 1, \dots, N$) le variabili che intervengono nelle equazioni costitutive

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}(\varphi_\alpha; X_H), \\ h_i &= h_i(\varphi_\alpha; X_H), \\ \eta &= \eta(\varphi_\alpha; X_H), \\ \mathcal{F} &= \mathcal{F}(\varphi_\alpha; X_H). \end{aligned}$$

Abbiamo introdotto esplicitamente qui le caratteristiche dello

stress di Cauchy σ_{ij} ma si poteva anche far riferimento alle caratteristiche dello stress di Piola-Kirchhoff P_{iM} o di Piola-Cosserat Y_{LM} ; anche l'intervento diretto del potenziale termodinamico \mathcal{F} piuttosto che dall'energia interna ε non è necessario, ma serve a semplificare qualche formula. Del resto, note \mathcal{F} ed η , è nota ε

$$(1.4) \quad \varepsilon = \mathcal{F} + \eta\theta .$$

Nello scrivere le (1.1), (1.2) sono state adottate le solite convenzioni riguardanti derivazioni e contrazioni di indici; sono stati usati indici minuscoli per far riferimento alla configurazione attuale C e quelli maiuscoli per far riferimento alla configurazione invariabile C_* (ne risulta così evidente il carattere di vettore doppio per P_{iM}); è stata introdotta la notazione X_H per le coordinate in C_* . Una dipendenza esplicita dei membri destri delle (1.3) dalle X_H indica la mancanza di omogeneità del materiale in C_* .

Per la potenza specifica dello stress $p^{(\sigma)}$ potrà convenire di usare alternativamente l'espressione che coinvolge σ_{ij} ed il tensore velocità di deformazione $D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$, (v_i , componenti di velocità)

$$(1.5) \quad p^{(\sigma)} = \frac{\sigma_{ij} D_{ij}}{\rho} ,$$

oppure le espressioni equivalenti:

$$(1.6) \quad p^{(\sigma)} = \frac{P_{kM} v_{k,M}}{\rho_*} , \quad p^{(\sigma)} = \frac{Y_{LK}}{2} \frac{dC_{LM}}{dt} ,$$

ove appaiono la densità ρ_* in C_* e le caratteristiche dello strain

$$C_{LK} = x_{i,L} x_{i,K} .$$

Ogni scelta delle (1.3) serve a specificare un materiale speciale M . In riguardo alle variabili φ_α si suppone che si possano

ottenere con derivazioni o integrazioni quando si conoscano le funzioni

$$(1.7) \quad x_i = x_i(X_H, t), \quad \theta = \theta(X_H, t),$$

che esprimono le coordinate attuali x_i e la temperatura attuale θ di ciascuna particella X_H in funzione del tempo.

Così, note le (1.7), rimane individuato un processo termodinamico ammissibile in M .

Converrà ora introdurre la seguente definizione: diremo che una variabile termodinamica ψ non appartenente (oppure appartenente) al gruppo della φ_α è indipendente se, assegnate *opportuna*mente N (o $N - 1$) costanti Φ_α , in modo da potersi interpretare come valori delle φ_α (o delle φ_α diverse da ψ) in un certo punto \tilde{X}_H ad un certo istante \tilde{t} durante un processo ammissibile, ed assegnata *arbitrariamente* una costante Ψ , esiste almeno un processo ammissibile in M tale che nel punto \tilde{X}_H ed all'istante \tilde{t} : $\psi = \Psi$ e $\varphi_\alpha = \Psi_\alpha$ (per le φ_α diverse da ψ).

Osserviamo infine che, coll'intervento del potenziale termodinamico, è possibile mettere la (1.2) nella forma

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} + \eta \frac{d\theta}{dt} - p^{(\sigma)} + \frac{h_i \theta_{,i}}{\rho \theta} \leq 0$$

o anche più esplicitamente,

$$(1.8) \quad \sum_{\alpha}^N \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_\alpha} \dot{\varphi}_\alpha + \eta \dot{\theta} - \frac{P_{kM} v_{k,M}}{\rho_*} + \frac{h_i \theta_{,i}}{\rho \theta} \leq 0.$$

È a quest'ultima forma che noi faremo riferimento in seguito.

2. Condizioni imposte dal secondo principio alle equazioni costitutive.

Se θ è una variabile indipendente ed η non è identicamente nulla, allora tra le variabili φ_α deve apparire θ oppure $\dot{\theta}$.

Infatti se θ e $\dot{\theta}$ fossero entrambe escluse, la (1.8) si potrebbe scrivere così

$$f + \eta\dot{\theta} \leq 0,$$

con f ed η indipendenti da $\dot{\theta}$; ma allora la disuguaglianza non può sussistere per valori arbitrari di $\dot{\theta}$.

Se tra le φ_α appare θ ma non $\dot{\theta}$, e $\dot{\theta}$ è indipendente, allora

$$(2.1) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} = -\eta,$$

quindi le due ultime equazioni costitutive (1.3) sono legate l'una all'altra.

Infatti dalla (1.8) segue

$$f_1 + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} \leq 0,$$

dove f_1 ed il fattore di $\dot{\theta}$ sono ora indipendenti da $\dot{\theta}$; la disuguaglianza allora non può sussistere per valori arbitrari di $\dot{\theta}$ se non vale la (2.1).

Se le variabili $v_{h,K}$ sono indipendenti e lo stress non è identicamente nullo, allora tra le φ_α devono apparire almeno le $x_{h,K}$ o le $v_{h,K}$.

Infatti se tutte le $x_{h,K}$, $v_{h,K}$ fossero escluse, la (1.8) si potrebbe scrivere

$$f_2 - \frac{P_{k,M} v_{k,M}}{\varrho_*} \leq 0,$$

con f_2 e P_{kM} indipendenti da $v_{k,M}$. Ma la disuguaglianza non può allora sussistere se non è $P_{kM} = 0$.

Se tra le φ_α appaiono la $x_{h,K}$ ma non le $v_{h,K}$ e se le $v_{h,K}$ sono indipendenti allora

$$(2.2) \quad P_{hK} = \varrho_* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x_{h,K})},$$

quindi la prima e l'ultima delle equazioni costitutive (1.3) sono legate tra loro.

La dimostrazione segue la linea delle precedenti.

Se tra le variabili φ_α non appare, ad esempio, $\dot{\varphi}_1$, se $\dot{\varphi}_1$ è indipendente e se φ_1 è diversa da θ e da una qualunque delle $x_{h,K}$, allora \mathcal{F} è indipendente da φ_1 .

Per chiarire questo enunciato si osservi che non va escluso che una delle φ_α sia la derivata temporale totale di un'altra delle φ_α ; ma si riconosce poi che va posta una limitazione al principio di equipresenza. La dimostrazione è ancora simile a quella delle proprietà precedenti.

Si noti una conseguenza immediata delle osservazioni già fatte:

Se le variabili φ_α si riducono alle $x_{h,K}$ e θ e se $v_{h,K}$ e θ sono indipendenti allora il materiale è a deformazioni reversibili; è cioè un materiale per il quale le trasformazioni adiabatiche ($h_i \equiv 0$) sono trasformazioni reversibili.

Valgono infatti allora le (2.1), (2.2) e la (1.8) si riduce alla disuguaglianza

$$h_i \theta_i \leq 0 ;$$

nelle trasformazioni adiabatiche poi finisce col valere qui il segno di eguaglianza.

3. Materiali soggetti ad un vincolo interno. Materiali elastico-viscosi incompressibili.

Supponiamo in questo paragrafo che le variabili φ_α siano soggette *soltanto* ad un vincolo del tipo

$$(3.1) \quad G(\varphi_\alpha) = 0 .$$

Allora la (1.8) va intesa valida per i valori di φ_α , $\dot{\varphi}_\alpha$ per i quali vale la (3.1) e la

$$(3.2) \quad \sum_1^N \frac{\partial G}{\partial \varphi_\alpha} \dot{\varphi}_\alpha = 0 .$$

Introducendo un moltiplicatore arbitrario λ potremo dire che rimane imposto alle φ_α , $\dot{\varphi}_\alpha$ di soddisfare alla disuguaglianza

$$\sum_I^N \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi_\alpha} - \lambda \frac{\partial G}{\partial \varphi_\alpha} \right) \dot{\varphi}_\alpha + \eta \dot{\theta} - \frac{P_{h,K} v_{h,K}}{\varrho_*} + \frac{h_{,i} \theta_{,i}}{\varrho \theta} \leq 0,$$

per qualunque scelta di λ (e delle altre variabili che vi appaiono), senza ormai alcun diretto richiamo al vincolo.

Potremo allora adattare i risultati del paragrafo precedente; ad esempio: se tra le φ_α appare θ ma non $\dot{\theta}$ e $\dot{\theta}$ è soggetta solo al vincolo che discende dalla (3.1) allora

$$(3.3) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial G}{\partial \theta} = -\eta.$$

Se tra le φ_α appaiono le $x_{h,K}$ ma non le $v_{h,K}$ e le $v_{h,K}$ sono soggette al più al vincolo che discende dalle (3.1) allora

$$(3.4) \quad P_{h,K} = \varrho_* \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x_{h,K})} - \lambda \frac{\partial G}{\partial (x_{h,K})} \right].$$

Come applicazione delle considerazioni in questo paragrafo e del precedente si considerino i materiali M_1 elastico-viscosi incomprimibili per i quali si suppone: (1) che le variabili φ_α siano le variabili seguenti $x_{h,K}$, $v_{h,K}$, θ , $\theta_{,i}$ e (2) che $x_{h,K}$, $v_{h,K}$ soddisfino al vincolo di incomprimibili e temperatura costante ²⁾.

Se si prescinde dal vincolo di incomprimibilità i quattro gruppi di variabili sono indipendenti, nel senso specificato al n. 2. Infatti se $a(t)$, $a_i(t)$, $A_{iH}(t)$ sono rispettivamente uno scalare, un vettore ed un vettore doppio funzioni arbitraria del tempo e se \tilde{X}_H è un punto della configurazione di riferimento, allora esiste almeno un processo termodinamico ammissibile durante il quale $\theta(X_H, t)$, $\theta_{,i}(X_H, t)$, $x_{i,K}(X_H, t)$ assumono i valori $a(t)$, $a_i(t)$, $A_{iH}(t)$ in \tilde{X}_H . Si consideri infatti il processo definito delle relazioni

$$x_i = \delta_{iH} \tilde{X}_H + A_{iH}(X_H - \tilde{X}_H),$$

²⁾ Il caso di materiali elastico-viscosi non soggetti al vincolo di incomprimibilità è trattato nelle lezioni citate in nota ¹⁾.

e

$$\theta = \alpha + A_{iH} a_i(X_H - \widetilde{X}_H)$$

ossia

$$\theta = \alpha + a_i(x_i - \tilde{x}_i) ,$$

con ovvio significato di x_i ; si tratta di un processo ammissibile durante il quale ad un dato istante si possono assegnare arbitrariamente i valori di θ , $\theta_{,i}$, $x_{h,k}$ e delle loro derivate temporali (in particolare di $v_{h,k}$) nel punto \widetilde{X}_H .

Il vincolo di incomprimibilità a temperatura costante si può intendere espresso da una equazione del tipo

$$(3.5) \quad \det(x_{h,k}) = f(\theta, \theta_*) ,$$

dove f è una funzione caratteristica del materiale, dipendente dalla temperatura θ_* nella configurazione di riferimento (ed eventualmente da X_H), ma in ogni caso tale che

$$f(\theta_*, \theta_*) = 1.$$

A causa delle (3.5) i gradienti $x_{h,k}$ e la temperatura θ non si possono più ritenere indipendenti e neanche $v_{h,k}$, $\dot{\theta}$, poichè dalla (3.5) segue che

$$(3.6) \quad \frac{\partial[\det(x_{h,k})]}{\partial(x_{i,j})} v_{i,j} = \frac{df}{d\theta} \dot{\theta} .$$

I vincoli (3.5), (3.6) sono del tipo dei vincoli (3.1), (3.2); poichè di più $\dot{\theta}$ non interviene tra le φ_α possiamo affermare che

$$(3.7) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} + p \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\eta$$

ove p è il moltiplicatore incognito.

Invocando poi la quinta proprietà del n. 2 ed osservando che, nonostante il vincolo, $a_{h,k} = \frac{d}{dt}(x_{h,k})$ e $\dot{\theta}_{,i}$ sono indipendenti, si conclude che \mathcal{F} non dipende da $v_{h,k}$ e $\theta_{,i}$.

Queste due variabili possono però intervenire nelle altre equazioni costitutive, sicchè, in generale, è impossibile giungere ad una formula analoga alla (3.4); un risultato più debole può però ancora essere ottenuto.

Supponiamo dunque che sia

$$P_{hK} = P_{hK}(x_{i,J}; v_{i,J}; \theta; \theta_{,i});$$

introduciamo lo « stress d'equilibrio »

$$P_{hK}^{(0)}(x_{i,J}, \theta) = P_{hK}(x_{i,J}; 0; \theta; 0),$$

e chiamiamo $P_{hK}^{(1)}$ la differenza

$$(3.8) \quad P_{hK}^{(1)} = P_{hK} - P_{hK}^{(0)}.$$

Osserviamo che ormai il secondo principio si riduce a richiedere che sia

$$(3.9) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x_{h,K})} v_{h,K} + \frac{h_i \theta_{,i}}{\varrho \theta} - \frac{P_{kM} v_{k,M}}{\varrho_*} - p \frac{\partial [\det (x_{h,K})]}{\partial (x_{i,J})} v_{i,J} \leq 0$$

per qualunque scelta delle variabili indipendenti che vi appaiono e per p assegnato dalla (3.7). Introduciamo nella disuguaglianza (3.9) un parametro moltiplicativo μ per i gradienti $v_{i,J}$ ed annulliamo il vettore $\theta_{,i}$.

Ne segue

$$\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x_{h,K})} - p \frac{\partial [\det (x_{i,J})]}{\partial (x_{h,K})} - \frac{P_{hK}^{(0)} + P_{hK}^{(1)}(x_{i,J}; v_{i,J}; \theta; 0)}{\varrho_*} \right] v_{h,K} \right\} \leq 0$$

o anche, per la definizione di $P_{hK}^{(1)}$,

$$\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x_{h,K})} - p \frac{\partial [\det (x_{i,J})]}{\partial (x_{h,K})} - \frac{P_{hK}^{(0)}}{\varrho_*} \right] v_{h,K} + g(\mu) \right\} \leq 0,$$

ove $g(\mu)$ è infinitesimo con μ .

Si conclude che deve essere

$$(3.10) \quad P_{hK}^{(0)} = \varrho_* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (x_{h,K})} - p \frac{\partial [\det (x_{i,J})]}{\partial (x_{h,K})};$$

è questa la forma « debole » della (3.4) alla quale volevamo arrivare. Il secondo principio richiede ancora che sia

$$\frac{h_i \theta_{,i}}{\rho \theta} \leq \frac{P_{hM}^{(1)} v_{k,M}}{\rho_*}$$

4. Il principio di Ziegler della massima potenza dello stress dissipativo.

Per i materiali elastico-viscosi di cui si è detto al paragrafo precedente rimane ancora aperta la questione della determinazione delle $P_{hK}^{(1)}$ come funzioni delle variabili $x_{h,K}$, $v_{h,K}$, θ e $\theta_{,i}$. Sarebbe desiderabile il poter ridurre tale problema a quello della determinazione di un'unica funzione, così come si è già ridotto il problema della determinazione delle $P_{hK}^{(0)}$ ($x_{h,K}$, θ) a quello della ricerca della forma del solo potenziale termodinamico $\mathcal{F}(x_{h,K}, \theta)$.

In proposito Ziegler ³⁾ ha proposto l'adozione di un postulato, del quale qui vogliamo dare un adattamento specifico. Si tratta di questo: quando siano note le funzioni $P_{hK}^{(1)}(x_{i,j}, v_{i,j}, \theta, \theta_{,i})$ è possibile costruire la funzione

$$(4.1) \quad D(x_{i,j}, v_{i,j}, \theta, \theta_{,i}) = \frac{P_{hK}^{(1)} v_{h,K}}{\rho_*}$$

che si può interpretare come *funzione di dissipazione*, dando a $P_{hK}^{(1)}$ l'attributo di *componente dissipativa dello stress*, attributo che pare giustificato dalla definizione (3.8) e dalla (3.10).

Viceversa, si può pensare che sia possibile assegnare a priori la funzione $D(x_{i,j}, v_{i,j}, \theta, \theta_{,i})$ prima ancora di conoscere le $P_{hK}^{(1)}(x_{i,j}, v_{i,j}, \theta, \theta_{,i})$. Poi in riguardo a queste funzioni si ammette il seguente *postulato di Ziegler*: le funzioni

$$P_{hK}^{(1)} = P_{hK}^{(1)}(x_{i,j}; v_{i,j}; \theta_{,i}; \theta)$$

³⁾ Si veda H. ZIEGLER, *Thermodynamic aspects of continuum mechanics*, tra le lezioni citate in nota ¹⁾.

sono tali che, assegnate in un qualunque punto di un continuo elastico-viscoso le componenti dello stress dissipativo, i gradienti di velocità $v_{i,j}$ rendono ivi estrema la potenza specifica dello stress.

In altre parole le variabili $v_{i,j}$ sono tali da rendere estrema il prodotto $P_{ij} v_{i,j}$ entro i vincoli stabiliti dalla (4.1) e, nel caso che ci interessa, dalla (3.6). Introdotti due moltiplicatori λ , μ il postulato si trascrive nelle condizioni

$$\frac{\partial}{\partial v_{i,j}} \left\{ P_{ik}^{(1)} v_{h,k} - \lambda [D(x_{h,k}, v_{h,k}, \theta, \theta, \dot{\theta}) - P_{ik}^{(1)} v_{h,k}] + \right. \\ \left. - \mu \left[\frac{\partial[\det(x_{h,k})]}{\partial(x_{h,k})} v_{h,k} - \frac{\partial f(\theta, \theta_*)}{\partial \theta} \dot{\theta} \right] \right\} = 0$$

o anche nelle

$$(1 + \lambda) P_{ij}^{(1)} = \lambda \frac{\partial D}{\partial(v_{i,j})} - \mu \frac{\partial[\det(x_{h,k})]}{\partial(x_{i,j})}.$$

Un richiamo ai vincoli permette di eliminare λ

$$(4.2) \quad P_{ij}^{(1)} = \frac{q_* D + q f \dot{\theta}}{\frac{\partial D}{\partial(v_{h,k})} v_{h,k}} \frac{\partial D}{\partial(v_{i,k})} - q \frac{\partial[\det(x_{h,k})]}{\partial(x_{i,j})};$$

qui si è posto per brevità $q = \mu(1 + \lambda)^{-1}$.

Basta ora assegnare la funzione di dissipazione perchè risultino determinate le $P_{ij}^{(1)}(x_{h,k}, v_{h,k}, \theta, \theta, \dot{\theta})$, a meno dell'ingognita q .

Di solito converrà pensare alle componenti di stress dissipativo di Cauchy $\sigma_{ij}^{(1)}$ piuttosto che alle $P_{ij}^{(1)}$

$$\sigma_{ij}^{(1)} = \frac{x_{i,k}}{\det(x_{n,m})} P_{jk}^{(1)};$$

e far riferimento ad una espressione di D ove intervengano come variabili indipendenti le $v_{i,j}$ piuttosto che le $v_{i,j}$. Invece della

(4.2) converrà allora far uso di una sua immediata conseguenza

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \frac{eD + q \frac{d(lgf)}{dt}}{\frac{\partial D}{\partial(v_{m,n})} v_{m,n}} \frac{\partial D}{\partial(v_{i,j})} - q \delta_{ij} ;$$

qui δ_{ij} indica al solito il simbolo di Kroneker.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 maggio 1965.