Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Santuzza Baldassarri-Ghezzo
Claudio Margaglio
Tomaso Millevoi

Considerazioni sulla conferenza tenuta da M. Baldassarri a Torino nel 1961 : « Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci »

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 277-284
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_277_0>

CONSIDERAZIONI SULLA CONFERENZA TENUTA DA M. BALDASSARRI A TORINO NEL 1961: « OSSERVAZIONI SULLA STRUTTURA DEI FASCI LISCI »

di Santuzza Baldassarri-Ghezzo, Claudio Margaglio e Tomaso Millevoi (*a Padova*)*

Al Convegno Internazionale di Geometria Algebrica di Torino, nel maggio 1961, il professor Mario Baldassarri tenne una conferenza dal titolo: « Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci ».

In questa conferenza, tra l'altro, comunicò alcuni risultati, riservandosi di darne la dimostrazione in un successivo lavoro.

La malattia e l'immatura Sua scomparsa, Gli impedirono di mantenere questo Suo proposito.

Per l'importanza dei risultati raggiunti ed in vista di ulteriori applicazioni e generalizzazioni, noi, che appartenemmo al Gruppo di ricerca da Lui diretto, abbiamo creduto opportuno ricostruire le dimostrazioni omesse nella conferenza: questa nota si presenta appunto come il completamento dell'articolo « *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci* » apparso sugli *Atti del Convegno Internazionale di Geometria algebrica tenuto a Torino nei giorni* 24-27 *maggio* 1961.

1. — Riportiamo, per comodità del lettore, gli enunciati dei teoremi che compaiono nell'articolo suddetto.

Teorema 1: *Ogni fascio liscio* $\mathcal{M}^p$ *su di una varietà affine normale è localmente libero fuori da un chiuso* $X \subset V$ *con cdm* $X > 1$.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo degli AA.: Seminario Matematico - Università - Padova.

COROLLARIO 1: Ogni fascio liscio $\mathcal{M}^p$ su di una varietà quasi proiettiva V localmente normale è localmente libero fuori da un chiuso $X \subset V$ con $cdm\ X > 1$.

TEOREMA 2: *Ogni varietà quasi proiettiva V localmente normale gode della proprietà di estensione.*

TEOREMA 3: *Ogni fascio localmente libero $\mathcal{L}^p$ su di una varietà quasi proiettiva localmente normale gode della proprietà di estensione.*

TEOREMA 4: *Sia data la sequenza esatta su V, affine e normale:*

$$0 \to \mathcal{M}^p \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}^q \to \mathcal{F} \to 0 .$$

Allora $\mathcal{M}^p \in P.E.$ se e solo se $\mathcal{F}$ ha il sottofascio di torsione privo di sezioni concentrate su chiusi ammissibili.

TEOREMA 5: *Se $\mathcal{F}$ è un fascio su V, affine e normale, allora $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ gode della proprietà di estensione.*

TEOREMA 6: *Ogni fascio liscio $\mathcal{M}^p \in P.E.$ su V, affine e normale, che sia libero fuori di un chiuso ammissibile, è libero.*

TEOREMA 7: *Se V è affine e $V \in P.E.$ il nucleo della sequenza:*

$$\mathcal{A}^{q+1} \to \mathcal{M}^q \to 0$$

con $\mathcal{M}^q$ liscio, è localmente libero, e, se l'anello A è a fattorizzazione unica, è libero.

TEOREMA 8: *Nelle stesse ipotesi (del Teor. 7) se $\mathcal{J}$ è un sottofascio di $\mathcal{A}$ ammissibile, $\mathcal{H}om(\mathcal{J}, \mathcal{A})$ è localmente libero e, se A è a fattorizzazione unica, è libero. In ogni caso si ha:*

$$\mathcal{E}xt^1(\mathcal{A}/\mathcal{J}, \mathcal{A}) = 0 .$$

TEOREMA 9: *Se sulla varietà affine V ogni sequenza del tipo:*

$$\mathcal{A}^2 \to \mathcal{J} \to 0$$

ha nucleo localmente libero, allora $V \in P.E.$

TEOREMA 10: *La varietà affine $V \in P.E.$ se e solo se $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{A}/\mathcal{J}, \mathcal{A})$ è uguale a zero per ogni sottofascio $\mathcal{J}$ di $\mathcal{A}$ ammissibile ed è* *a forme intersezione completa se e solo se il duale di ogni* $\mathfrak{J}$ *siffatto è libero.*

Di alcuni di questi teoremi c'è la dimostrazione (Teor. 1, 2, 3, 4, 5, 6) ma talvolta è appena accennata. Perciò diamo qui le dimostrazioni complete.

2. — Dimostrazione del teorema 1.

Per induzione sul rango p del fascio.

Se $p = 1$, si ha un fascio di ideali, $\mathcal{M}^1 = \mathfrak{J}$. Prescindiamo innanzitutto dagli eventuali punti singolari di V, ciò che è lecito in quanto il chiuso dei punti singolari di una varietà normale ha codimensione maggiore di uno (cfr. [7] pag. 337).

Essendo d'altra parte la questione locale, basterà dimostrare che per ogni punto regolare x di V o $\mathfrak{J}_x \approx \mathcal{A}_x$ oppure esiste un intorno U di x tale che $\mathfrak{J} \mid U$ abbia fibra libera fuori da un chiuso (di U) di codimensione maggiore di uno.

Consideriamo allora un punto regolare x di V: si ha che o $\mathfrak{J}_x \approx \mathcal{A}_x$, oppure esiste un ideale $\mathfrak{F}_x$ di $\mathcal{A}_x$ con altezza maggiore di uno ed isomorfo a $\mathfrak{J}_x$. Infatti se $\mathfrak{J}_x \not\approx \mathcal{A}_x$ e se $h(\mathfrak{J}_x) = 1$, allora, considerato il M.C.D. degli elementi di $\mathfrak{J}_x$, che è un ideale principale, ($\mathcal{A}_x$ è, essendo x regolare, dominio di integrità a fattorizzazione unica, cfr. [8] pag. 406, e $h(\mathfrak{J}_x) = 1$), l'omomorfismo $\mathfrak{J}_x \to \mathcal{A}_x$ ottenuto mediante divisione per tale M.C.D. è siffatto che l'immagine $\mathfrak{F}_x$ di $\mathfrak{J}_x$ è isomorfa a $\mathfrak{J}_x$ ed inoltre $h(\mathfrak{F}_x) > 1$.

L'isomorfismo in questione $\varphi_x \colon \mathfrak{J}_x \to \mathfrak{F}_x$ si estende ad un intorno affine $U = D(f)$ di x in un isomorfismo

$$\varphi_U : \mathfrak{J} \mid U \to \mathfrak{F} \mid U .$$

Restringendo eventualmente l'intorno U possiamo supporre che tutte le componenti irriducibili della varietà degli zeri di $\Gamma(\mathfrak{F} \mid U)$ contengano x. Allora l'ideale $\Gamma(\mathfrak{F} \mid U)$ di A_f ha altezza maggiore di uno. Infatti ogni primo associato all'ideale $\Gamma(\mathfrak{F} \mid U)$, in base all'ipotesi fatta, risulta contenuto nell'ideale massimale M di A_f relativo al punto x in questione; siccome c'è corrispondenza biunivoca tra gli ideali di A_f che son contenuti in M e quelli di $\mathcal{A}_x = A_{f_s}$ con $S = A_f - M$, ne risulta che l'altezza di $\mathfrak{J}_x = A_{f_s} \cdot \Gamma(\mathfrak{J} \mid U)$ è uguale a quella di $\Gamma(\mathfrak{J} \mid U)$.

Si ha quindi che la varietà $\overline{V}$ degli zeri di $\Gamma(\mathfrak{J} \mid U)$ ha codimensione maggiore di uno, e dunque $\mathfrak{I} \mid U (\approx \mathfrak{J} \mid U)$ ha fibra libera fuori del chiuso $\overline{V}$ di codimensione maggiore di uno.

Il teorema è così dimostrato per $p = 1$.

Sia ora $p > 1$.

Consideriamo allora una iniezione

$$0 \to \mathcal{M}^p \to \mathcal{A}^p$$

ed una delle proiezioni $\mathcal{A}^p \to \mathcal{A} \to 0$ ristretta ad $\mathcal{M}^p$.

Si ottiene la sequenza esatta

$$0 \to \mathcal{M}^{p-1} \to \mathcal{M}^p \to \mathfrak{I} \to 0 \, .$$

Per tutti i punti x di un aperto ammissibile si ha allora, in base all'ipotesi induttiva

$$0 \to \mathcal{A}_x^{p-1} \to (\mathcal{M}^p)_x \to \mathcal{A}_x \to 0$$

da cui $(\mathcal{M}^p)_x \approx \mathcal{A}_x^p$ c.v.d.

Osservazione: se si toglie l'ipotesi della normalità di V il teorema in generale non sussiste, come mostra il seguente controesempio:

Sia $V = V(x^3 - y^2) \subset k^2$; consideriamo il fascio $\mathfrak{I}$ di ideali generato in $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ dalle due sezioni globali $\bar{x}$, $\bar{y}$. $\mathfrak{I}$ non è localmente libero. Infatti l'omomorfismo $\varphi : A^2 \to A$ così definito $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\bar{x} - \bar{b}\bar{y}$ ha nucleo generato da $\omega_1 = (\bar{y}, \bar{x})$, $\omega_2 = (\bar{x}^2, \bar{y})$ giacchè $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow ax - by = h(x^3 - y^2) \Rightarrow [a = hx^2 + py,\ b = hy + px]$; ora se $\mathfrak{I}$ fosse localmente libero, il modulo associato I, che risulta uguale a $Im(\varphi)$, sarebbe proiettivo, e quindi $Nc(\varphi)$ risulterebbe sommando diretto in A^2; ma sopra l'origine $[\mathcal{N}c(\varphi)]_0$ sta dentro al sottomodulo $\mathfrak{m}_0\mathcal{A}_0^2$, $\mathfrak{m}_0$ essendo l'ideale massimale di $\mathcal{A}_0$, e questo sottomodulo è invariante per automorfismi di $\mathcal{A}_0^2$ (cfr. [5] pag. 388); ciò esclude che $[\mathcal{N}c(\varphi)]_0$ sia sommando diretto in $\mathcal{A}_0^2$ e quindi che $Nc(\varphi)$ sia sommando diretto in A^2. $\mathfrak{J}$ quindi non è localmente libero, pur essendo tutte le sue fibre fuori dall'origine libere in quanto ivi i germi delle sue sezioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ hanno inverso.

3. — Dimostrazione del teorema 2.

Essendo la questione locale, possiamo supporre V affine, normale ed irriducibile.

Sia allora $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{A}(V))$ una sezione ammissibile. σ appartiene allora al corpo delle funzioni razionali su V; essendo ammissibile σ non ha poli su V (cfr. [3] pag. 134 prop. 10) e quindi è intera su $\mathcal{A}_x$ per ogni x (cfr. [3] pag. 132 prop. 8); ne segue che $\sigma \in \Gamma(V, \mathcal{A})$, essendo $\Gamma(V, \mathcal{A})$ integralmente chiuso.

4. — Nell'enunciato del teorema 7 è stata omessa la condizione che V sia non singolare. Senza questa ulteriore ipotesi il teorema non è vero, come mostra il seguente controesempio:

Sia $V = V(z^2 - xy) \subset k^3$. Consideriamo l'omomorfismo φ : : $A^2 \to I$ così definito: $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\bar{z} - \bar{b}\bar{x}$.

Il $Nc(\varphi)$ è generato dagli elementi $\omega_1 = (\bar{z}, \bar{y})$, $\omega_2 = (\bar{x}, \bar{z})$; infatti

$$\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow az - bx = h(z^2 - xy) \Rightarrow z(a - hz) = x(b - hy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [b - hy = pz\,,\ a - hz = px] \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z}) + \bar{h}(\bar{z}, \bar{y})\,.$$

$Nc(\varphi)$ non è localmente libero; infatti si ha la sequenza esatta

$$0 \to I \xrightarrow{\psi} A^2 \xrightarrow{\varphi} I \to 0$$

dove I è l'ideale generato in A dagli elementi $\bar{x}$, $\bar{z}$ e dove l'omomorfismo ψ è così definito

$$\psi(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{z})\,, \qquad \psi(\bar{z}) = (\bar{z}, \bar{y})\,. \text{ (}^1\text{)}$$

Se I fosse proiettivo $\psi(I)$ sarebbe sommando diretto in A^2, e ciò è assurdo in quanto nell'origine $[\psi(\mathfrak{J})]_0$ è contenuto in $\mathfrak{m}_0\mathcal{A}_0^2$,

---

(1) Si verifica facilmente che tali posizioni sono lecite.

essendo $\mathfrak{m}_0$ l'ideale massimale di $\mathcal{A}_0$ (cfr. n. 2 Oss. e [5] pag. 388).

Dimostriamo ora il

TEOREMA 7: *Se V è una varietà affine non singolare e $V \in P.E.$ il nucleo della sequenza*

$$\mathcal{A}^{q+1} \to \mathcal{M}^q \to 0$$

con $\mathcal{M}^q$ liscio, è localmente libero e, se l'anello A è a fattorizzazione unica, è libero.

Il nucleo dell'omomorfismo $\varphi : \mathcal{A}^{q+1} \to \mathcal{M}^q$ risulta un fascio di ideali $\mathfrak{I}$ soddisfaciente alla proprietà di estensione (cfr. Teor. 4).

Per ipotesi per ogni $x \in V$ $\mathfrak{I}_x$ è isomorfo o ad un ideale di altezza maggiore di uno, oppure ad $\mathcal{A}_x$ (cfr. la prima parte della dimostrazione del teor. 1). Nel primo caso però l'somorfismo $\varphi_x : \mathfrak{I}_x \to \mathfrak{J}_x$ si estende a tutto un intorno U di x, quindi $\mathfrak{I} \mid U$ è isomorfo ad un sottofascio ammissibile di $\mathcal{A} \mid U$; poichè $\mathfrak{I} \in P.E.$, esso risulta localmente isomorfo ad $\mathcal{A}$. c.v.d.

5. — L'enunciato del teorema 8, poichè è immediato verificare che: Se V è affine ed $\in P.E.$ e se $\mathfrak{I}$ è un sottofascio ammissibile di $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}om\,(\mathfrak{I}, \mathcal{A}) \approx \mathcal{A}$, va modificato nel modo seguente:

TEOREMA 8: *Sia V una varietà affine non singolare $\in P.E.$ ed $\mathfrak{I}$ un fascio di ideali (ovviamente di tipo finito) allora $\mathcal{H}om(\mathfrak{I}, \mathcal{A})$ è localmente libero, e se A è a fattorizzazione unica, è libero.*

Essendo $\mathfrak{I}$ di tipo finito, esiste una sequenza esatta del tipo:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{A}^n \to \mathfrak{I} \to 0 \,.$$

Dualizzandola, si ottiene:

$$0 \to \mathcal{H}om\,(\mathfrak{I}, \mathcal{A}) \to \mathcal{A}^n \to \mathcal{F}^*$$

e, dal teorema 7, segue l'asserto.

6. — Dimostrazione del teorema 9.

Verifichiamo che se $V \notin P.E.$ allora esiste un omomorfismo del tipo

$$\mathcal{A}^2 \to \mathfrak{I} \to 0$$

con nucleo non localmente libero.

Sia σ una sezione ammissibile di $\mathcal{A}$ che non si estenda e sia F/Q un suo rappresentante (F, $Q \in A$).

Sia M il sottomodulo di A^2 formato con tutti gli elementi (a, b) tali che a/b rappresenti σ.

Si ha allora la sequenza esatta:

$$0 \to M \to A^2 \xrightarrow{\varphi} A$$

con $\varphi(f, g) = Ff - Qg$.

Il fascio $\mathcal{M}$ associato ad M non è localmente libero. Infatti, indicato con $\mathfrak{J}$ l'ideale costituito con le seconde coordinate delle sezioni di $\mathcal{M}$, $\mathfrak{J}$ risulta ammissibile poichè σ è ammissibile e quindi, se $\mathcal{M}$ fosse localmente libero risulterebbe $\mathfrak{J} = \mathcal{A}$ e quindi fra le sezioni di $\mathcal{M}$ ne comparirebbe una del tipo $(s, 1)$ con $s \in A$, e si avrebbe $\sigma = s/1 = s$ sezione globale.

Osservazione: la condizione espressa dal teorema 9 non è necessaria, come mostra il controesempio al teorema 7.

7. — Dimostriamo ora la prima parte del

Teorema 10: *La varietà affine $V \in P.E.$ se e solo se $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0$ per ogni sottofascio ammissibile $\mathfrak{J}$ di $\mathcal{A}$.*

Consideriamo la sequenza esatta

$$0 \to \mathfrak{J} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathfrak{J} \to 0 \ ;$$

dualizzandola si ottiene la

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \to \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \to \mathcal{H}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A})$$

e quindi, tenuto anche conto che $\mathcal{H}om(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0$,

$$0 \to \mathcal{H}om(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \to \mathcal{H}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \to \mathcal{E}xt^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \to 0 \, .$$

Si ha allora che $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0$ se e solo se l'omomorfismo canonico $\mathcal{A}^* \to \mathfrak{J}^*$ è un isomorfismo.

Se $V \in P.E.$ ogni omomorfismo $\mathfrak{J} \to \mathcal{A}$ (con $\mathfrak{J}$ ammissibile) si estende ad un omomorfismo $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ perciò $\mathcal{A}^* \to \mathfrak{J}^*$ risulta senz'altro un isomorfismo.

Viceversa se $V \notin P.E.$ esiste un sottofascio ammissibile $\mathfrak{J}$ di $\mathcal{A}$ ed un omomorfismo $\psi : \mathfrak{J} \to \mathcal{A}$ che non si estende. Infatti se $V \notin P.E.$ esiste una sezione ammissibile σ di $\mathcal{A}$ che non si estende. Sia $\mathfrak{J}_\sigma$ il sottofascio di ideali generato dalle $f \in \Gamma(V, \mathcal{A})$ tali che $f\sigma$ si estenda. Si ha che Supp $(\mathcal{A}/\mathfrak{J}_\sigma)$ = chiuso ove σ non si estende.

Dunque $\mathfrak{J}_\sigma$ è sottofascio ammissibile di $\mathcal{A}$.

Consideriamo l'omomorfismo $\varphi : \mathfrak{J}_\sigma \to \mathcal{A}$ così definito $\varphi(f) = f\sigma$. Se φ si fattorizzasse in

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{J}_\sigma \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "j"'] & & \mathcal{A} \\ & \mathcal{A} \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

j essendo l'omomorfismo di inclusione, allora $\bar{\varphi}(1) = \sigma$ sarebbe una sezione globale; c.v.d.

Per quanto riguarda la seconda parte del teorema 10 enunciato al n. 1, essa non risulta valida, poichè, come si è visto al n. 5 basta che $V \in P.E.$ affinchè il duale di un sottofascio ammissibile di $\mathcal{A}$ sia libero.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Baldassarri: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Atti del Conv. Intern. di Geom. Alg. di Torino del 1961.

[2] P. Cartier: *Rationalitè des diviseurs.* Bull. Soc. Math. France 86 1958 p. 177-251.

[3] C. Chevalley: *Fondaments de la Géometrie Algébrique.* Math. Appr. 1957-58 Secret. Math. Paris 1958.

[4] A. Grothendieck: *Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents.* Sem. Bourbaki Exp. 149, 1959 Paris.

[5] C. Margaglio: *Sul prodotto tensoriale di fasci algebrici coerenti e lisci.* Rend. Sem. Mat. Padova vol. XXXIV (1964).

[6] J. P. Serre: *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math. 61, 1955.

[7] A. Weil: *Foundations of algebraic geometry.* Amer. Math. Soc. 1962.

[8] O. Zariski, P. Samuel: *Commutative Algebra.* Vol. II, Van Nostrand, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1965.