

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO DE FRANCHIS

Qualche generalizzazione connessa con lo spazio dell'Appell

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 37 (1967), p. 104-111

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__104_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUALCHE GENERALIZZAZIONE CONNESSA CON LO SPAZIO DELL'APPELL

di FRANCO DE FRANCHIS (*a Palermo*) *)

Introduzione.

Generalizzando il concetto di spazio solidale ad un sistema rigido, l'Appell ²⁾ ha associato al moto di un qualsivoglia sistema materiale S uno spazio rispetto al quale sono nulli il risultante ed il momento baricentrale risultante delle quantità di moto. Tale spazio minimizza l'energia cinetica di S , come ha osservato l'Almansi.

Recentemente, il Prof. A. Bressan ³⁾ ha mostrato, tra l'altro, che lo spazio dell'Appell è caratterizzato come lo spazio mobile per cui l'energia cinetica assoluta di S si decompone nella somma dell'energia cinetica relativa e di quella di trascinamento, comunque si scelga lo spazio assoluto (fisso).

Mi sono proposto di generalizzare, tra l'altro, il risultato di A. Bressan testè indicato riferendo il moto di S , anzicchè ad uno spazio (necessariamente) rigido, a fluidi animati di moto omografico.

I. Preliminari concernenti il principio dei moti relativi.

Sia S un sistema in moto e siano O , α_i ($i = 1, 2, 3$) un punto e tre vettori non complanari, funzioni geometriche (regolari) del tempo. Consi-

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Palermo.

¹⁾ P. APPELL, « Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu », *Comptes Rendus*, T. 106, 1918.

²⁾ A. BRESSAN, « Osservazioni di Cinematica e di Dinamica connesse con lo spazio di energia cinetica minima », *Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, Serie II, Vol. XIII, 1964.

deriamo il riferimento omografico $(O, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, o brevemente (O, \mathbf{a}) , rispetto al quale, in ogni istante, le coordinate y^s ($s=1, 2, 3$) del generico punto P di S sono definite dalla:

$$(1) \quad P = O + y^s \mathbf{a}_s,$$

essendo s indice di somma variabile da 1 a 3.

Chiameremo velocità di P rispetto al riferimento prescelto:

$$(2) \quad \mathbf{v} = \dot{y}^s \mathbf{a}_s.$$

Riguardiamo (O, \mathbf{a}) come riferimento fisso e consideriamo un secondo riferimento omografico (Ω, \mathbf{b}) come mobile. Useremo indici latini e greci per le componenti di vettori (o tensori) nei riferimenti (O, \mathbf{a}) e (Ω, \mathbf{b}) rispettivamente.

Consideriamo come moto di trascinamento il moto di quest'ultimo rispetto al primo e intendiamo che, in relazione ai riferimenti omografici considerati, le nozioni di velocità assoluta, relativa e di trascinamento siano introdotte come suole farsi con riguardo ai riferimenti rigidi.

Per il particolare significato attribuito ai riferimenti (O, \mathbf{a}) e (Ω, \mathbf{b}) , [Cfr. (2)] è la velocità assoluta del punto P di S .

Le coordinate z^ρ ($\rho = 1, 2, 3$) di P rispetto al riferimento (Ω, \mathbf{b}) sono date dalla:

$$(3) \quad P = \Omega + z^\rho \mathbf{b}_\rho.$$

Siano:

$$(4) \quad \Omega = O + y_\Omega^i \mathbf{a}_i, \quad \mathbf{b}_\rho = b_{i(\rho)}^i \mathbf{a}_i \quad (\rho = 1, 2, 3)$$

le relazioni tra gli elementi relativi ai due riferimenti omografici. Si ha, per le (1) e (3):

$$(5) \quad P - O = y^s \mathbf{a}_s = (y_\Omega^i + z^\rho b_{i(\rho)}^i) \mathbf{a}_i$$

e quindi:

$$(6) \quad y^s = y_\Omega^i + z^\rho b_{i(\rho)}^i.$$

La velocità relativa di P è:

$$(7) \quad \mathbf{v}^{(r)} = \dot{z}^\rho \mathbf{b}_\rho = \dot{z}^\rho b_{i(\rho)}^i \mathbf{a}_i.$$

La velocità di trascinamento dello stesso punto, cioè la velocità (rispetto al riferimento assoluto) del punto solidale al riferimento mobile e

sovrapposto a P nell'istante attuale, è espressa da:

$$(8) \quad \mathbf{v}^{(\tau)} = \dot{\Omega} + z^{\rho} \dot{\mathbf{b}}_{\rho}$$

ove i punti denotano derivate temporali rispetto al riferimento (O, \mathbf{a}) , cosicchè, per le (4):

$$(9) \quad \mathbf{v}^{(\tau)} = (\dot{y}_{\Omega}^i + z^{\rho} \dot{b}_{(\rho)}^i) \mathbf{a}_i .$$

In base a (5)₂ la (2) può scriversi:

$$(10) \quad \mathbf{v} = (\dot{y}_{\Omega}^i + z^{\rho} \dot{b}_{(\rho)}^i + \dot{z}^{\rho} b_{(\rho)}^i) \mathbf{a}_i ,$$

cosicchè, a norma delle (7) e (9), si assoda (a titolo di preliminare considerato per comodità del lettore) che la legge di composizione delle velocità

$$(11) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\tau)} + \mathbf{v}^{(\sigma)} ,$$

ben nota nel caso in cui almeno il riferimento assoluto sia rigido, vale anche nel caso considerato ³).

2. Sulla velocità di deformazione e sul momento baricentrale generalizzato delle quantità di moto.

Supponiamo che S sia un sistema continuo. Allora, derivando la (11) rispetto alle coordinate assolute y^s :

$$(12) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y^s} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(\tau)}}{\partial y^s} + \frac{\partial \mathbf{v}^{(\sigma)}}{\partial y^s} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(\tau)}}{\partial z^{\lambda}} \frac{\partial z^{\lambda}}{\partial y^s} + \frac{\partial \mathbf{v}^{(\sigma)}}{\partial y^s} .$$

Con riguardo alle componenti, posto:

$$(13) \quad V_{\rho}^{(\sigma)i} = \frac{\partial v^i}{\partial y^s} , \quad V_{\sigma}^{(\tau)\lambda} = \frac{\partial v^{(\tau)\lambda}}{\partial z^{\sigma}} , \quad V_{\rho}^{(\tau)i} = \frac{\partial v^{(\tau)i}}{\partial y^s} ,$$

da (12) segue il principio dei moti relativi per la velocità di deformazione:

$$(14) \quad V_{\rho}^{(\sigma)i} = V_{\sigma}^{(\tau)\lambda} \frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^s} \frac{\partial y^i}{\partial z^{\lambda}} + V_{\rho}^{(\tau)i} = V_{\rho}^{(\tau)i} + V_{\rho}^{(\sigma)i} .$$

³ Nel caso in cui Ω ed i vettori \mathbf{b}_{ρ} ($\rho = 1, 2, 3$) sono solidali col riferimento (O, \mathbf{a}) , per la (9) risulta $\mathbf{v}^{(\tau)} = 0$, onde per la (11) $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(\sigma)}$; ciò autorizza a chiamare la velocità \mathbf{v} di P rispetto al riferimento (O, \mathbf{a}) *velocità di P rispetto ad F* , F essendo il fluido solidale con tale riferimento.

Supponiamo che S sia in quiete rispetto al riferimento (O, \mathbf{a}) , onde $V_{(\mathbf{a})}^{\mathbf{a}'} = 0$. Allora per (14) risulta che il gradiente di velocità del riferimento (O, \mathbf{a}) rispetto al riferimento (Ω, \mathbf{b}) è opposto a quello del secondo riferimento rispetto al primo.

Detta μ la massa totale di S si ha:

$$(15) \quad \Sigma m y^s = \mu y_{\mathbf{a}}^s, \quad \Sigma m z^e = \mu z_{\mathbf{a}}^e.$$

Introduciamo ora, in relazione al riferimento (O, \mathbf{a}) , il tensore doppio [momento baricentrale generalizzato delle quantità di moto relative al baricentro, ossia relative al riferimento (G, \mathbf{a})]:

$$(16) \quad K_{(\mathbf{a})}^{i's} = \Sigma m (y^i - y_{\mathbf{a}}^i) (v^s - v_{\mathbf{a}}^s) = \Sigma m (y^i - y_{\mathbf{a}}^i) v^s, \quad (v_{\mathbf{a}}^s = \dot{y}_{\mathbf{a}}^s).$$

Allora per (9) si ha

$$(17) \quad K_{(\mathbf{a})}^{(\tau)is} = \Sigma m (y^i - y_{\mathbf{a}}^i) (v^{(\tau)s} - v_{\mathbf{a}}^{(\tau)s}) = \Sigma m (y^i - y_{\mathbf{a}}^i) (z^e - z_{\mathbf{a}}^e) \dot{b}_{(\mathbf{a})}^s.$$

Ora osserviamo che per (9) e (13)₃ si ha:

$$(18) \quad V_{\mathbf{m}}^{(\tau)s} = \frac{\partial z^e}{\partial y^m} \dot{b}_{(\mathbf{a})}^s \quad \text{onde} \quad \dot{b}_{(\mathbf{a})}^s = \frac{\partial y^m}{\partial z^e} V_{\mathbf{m}}^{(\tau)s}.$$

Da (6) e (18)₂ seguono le relazioni:

$$(19) \quad \dot{b}_{(\mathbf{a})}^s = V_{\mathbf{m}}^{(\tau)s} b_{(\mathbf{a})}^m,$$

che generalizzano le formule di Poisson in quanto esprimono in modo omografico i derivati rispetto al tempo dei vettori b_{σ} in funzione dei vettori medesimi.

Per (19) e (6) si ha:

$$(20) \quad (z^e - z_{\mathbf{a}}^e) \dot{b}_{(\mathbf{a})}^s = V_{\mathbf{m}}^{(\tau)s} (z^e - z_{\mathbf{a}}^e) b_{(\mathbf{a})}^m = V_{\mathbf{m}}^{(\tau)s} (y^m - y_{(\mathbf{a})}^m).$$

Allora, posto:

$$(21) \quad A_{\mathbf{a}}^{im} = \Sigma m (y^i - y_{\mathbf{a}}^i) (y^m - y_{\mathbf{a}}^m),$$

in base a (6) e (17) si ha la relazione

$$(22) \quad K_{(\mathbf{a})}^{(\tau)is} = A_{\mathbf{a}}^{im} V_{\mathbf{m}}^{(\tau)s},$$

che generalizza il ben noto legame tra velocità angolare e momento ba-

ricentrale delle quantità di moto (il quale legame è basato sull'omografia di inerzia) al caso di un qualunque atto di moto omografico.

Riuscirà utile pure osservare che per (11) e (16) si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$(23) \quad K_{(\sigma)}^{(\sigma)'} = K_{(\sigma)}^{(\sigma)'} + K_{(\sigma)}^{(\sigma)'} .$$

3. Generalizzazione di una caratterizzazione dello spazio dell'Appell.

Sulla base delle precedenti premesse, ci proponiamo ora di stabilire se è possibile determinare, in funzione del tempo, i vettori \mathbf{b}_σ in modo da estendere i suaccennati risultati ottenuti dal Prof. Bressan.

La forza viva \mathfrak{T} del sistema S rispetto al riferimento omografico assoluto può, per la (11), assumere l'aspetto:

$$(24) \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} \Sigma m(\mathbf{v}^{(r)} + \mathbf{v}^{(\tau)}) \times (\mathbf{v}^{(r)} + \mathbf{v}^{(\tau)}) = \mathfrak{T}^{(r)} + \mathfrak{T}^{(\tau)} + \Sigma m \mathbf{v}^{(r)} \times \mathbf{v}^{(\tau)} ,$$

con manifesto significato dei simboli.

Per le (8) è:

$$(25) \quad \Sigma m \mathbf{v}^{(r)} \times \mathbf{v}^{(\tau)} = \Sigma m \mathbf{v}^{(r)} \times \mathbf{v}_\sigma^{(\tau)} + \Sigma m \mathbf{v}^{(r)} \times (z^\sigma - z_\sigma^\sigma) \dot{\mathbf{b}}_\sigma .$$

Da (15)₂ segue $\Sigma m \mathbf{v}^{(r)} = \mu \mathbf{v}_\sigma^{(r)}$. Inoltre, intendendo

$$(26) \quad \mathbf{v}_i^{(\tau)} = \mathbf{v}^{(\tau)} \times \mathbf{a}_i , \quad \mathbf{v}_\sigma^{(\tau)} = \mathbf{v}^{(\tau)} \times \mathbf{b}_\sigma ,$$

per (6) e (19) si ha:

$$(27) \quad \mathbf{v}^{(\tau)} \times (z^\sigma - z_\sigma^\sigma) \dot{\mathbf{b}}_\sigma = v_i^{(\tau)} (y^i - y_\sigma^i) V_i^{(\tau)\sigma} = v_\sigma^{(\tau)} (z^\lambda - z_\sigma^\lambda) V_\lambda^{(\tau)\sigma} .$$

Quindi la (25) diviene [cfr. (16)]:

$$(28) \quad \Sigma m \mathbf{v}^{(r)} \times \mathbf{v}^{(\tau)} = \mu \mathbf{v}_\sigma^{(r)} \times \mathbf{v}_\sigma^{(\tau)} + K_{(\sigma)}^{(\sigma)\lambda} V_\lambda^{(\tau)\sigma} .$$

Si pensi ora assegnato il riferimento (Ω, \mathbf{b}) e si imponga la condizione che, comunque si scelga il riferimento omografico assoluto (O, \mathbf{a}) , sussista la decomposizione:

$$(29) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{(r)} + \mathfrak{T}^{(\tau)} .$$

Per (24) e (28) la (29) equivale alla

$$(30) \quad \mu \mathbf{v}_\sigma^{(r)} \times \mathbf{v}_\sigma^{(\tau)} + K_{(\sigma)}^{(\sigma)\lambda} V_\lambda^{(\tau)\sigma} = 0 .$$

Se si assumono le \mathbf{a}_σ coincidenti sempre con le \mathbf{b}_σ , cosicchè per (18) $V_\lambda^{(\sigma)\iota} = 0$, è anche $V_\lambda^{(\sigma)\sigma} = 0$; quindi la condizione sopra imposta implica che per ogni scelta della funzione O del tempo sia

$$(31) \quad \mu \mathbf{v}_\sigma^{(\sigma)} \times \mathbf{v}_\sigma^{(\sigma)} = 0 .$$

Fissato ad arbitrio il vettore \mathbf{v}^* , si scelga ulteriormente l'origine O in modo che nell'istante attuale essa transiti per G con velocità $-\mathbf{v}^*$ rispetto al riferimento (Ω, \mathbf{b}) di trascinamento; è allora $\mathbf{v}_\sigma^{(\sigma)} = \mathbf{v}^*$ e per l'arbitrarietà di quest'ultimo vettore la precedente implica:

$$(32) \quad \mathbf{v}_\sigma^{(\sigma)} = 0 .$$

Ora, assegnati ad arbitrio 9 scalari $\overline{V}_\lambda^{(\sigma)\sigma}$ ($\sigma, \lambda = 1, 2, 3$), è sempre possibile scegliere il riferimento assoluto in modo che, nell'istante attuale, l'origine si trovi in G ed il gradiente di deformazione del riferimento assoluto rispetto al riferimento di trascinamento sia $-\overline{V}_\sigma^{(\sigma)\lambda}$; nell'istante attuale sarà allora $V_\lambda^{(\sigma)\sigma} = \overline{V}_\lambda^{(\sigma)\sigma}$, quindi, per (30) e (32), $K_\sigma^{(\sigma)\lambda} \overline{V}_\lambda^{(\sigma)\sigma} = 0$.

Per l'arbitrarietà delle $\overline{V}_\lambda^{(\sigma)\sigma}$, ne segue:

$$(33) \quad K_{(\sigma)\sigma}^{(\sigma)\lambda} = 0 .$$

Le condizioni (32) e (33), oltre che necessarie sono evidentemente sufficienti perchè valga la (30) comunque si scelga il riferimento (O, \mathbf{a}) .

Concludendo, le (32) e (33) caratterizzano lo spazio mobile (Ω, \mathbf{b}) per cui la decomposizione (29) della forza viva vale comunque si scelga il riferimento omografico assoluto.

5. Sulla determinazione del riferimento omografico che generalizza lo spazio dell'Appell. Proprietà di minimo.

Vogliamo dimostrare che se il moto di S soddisfa a certe condizioni (certamente verificate dai sistemi continui) è sempre possibile scegliere le funzioni vettoriali \mathbf{b}_σ del tempo t in modo che abbiano luogo le (33).

A tale scopo, supponiamo noto il moto di S rispetto al riferimento (O, \mathbf{a}) , cosicchè possiamo calcolare le $K_{(\sigma)\sigma}^{(\sigma)\iota\sigma}$ e le A_σ^{im} come funzioni di t . Per (23), le (33) equivalgono alle:

$$(34) \quad K_{(\sigma)\sigma}^{(\sigma)\iota\sigma} = K_\sigma^{(\sigma)\iota\sigma}$$

e le (22) assumono la forma:

$$(35) \quad K_{(s)}^{(s)} = A_{\sigma}^{im} V_m^{(s)s}.$$

Per ogni ammissibile valore dell'indice s le (35) si possono considerare come tre equazioni lineari nelle tre incognite $V_m^{(s)s}$ ($m = 1, 2, 3$).

Con riguardo ad un sistema particellare, è facile mostrare che *condizione caratteristica per l'annullarsi del determinante $|A|$ dei coefficienti del sistema (35) è che il sistema materiale S appartenga ad un piano*⁴).

Invero, consideriamo la forma quadratica $A^{im}\eta_i\eta_m$ nelle componenti covarianti η_i che il generico vettore $P - G$ ha nel riferimento (O, a) . Per le (21) è:

$$(36) \quad A^{im}\eta_i\eta_m = \sum m_{(i)} y_{(s)}^i y_{(s)}^m \eta_i \eta_m = \sum m_{(s)} [(P - G) \times (P_i - G)]^2 \geq 0,$$

essendo la somma estesa a tutti i punti P_i di S .

Da un lato, la (36)_s vale come uguaglianza se, e solo se, $P - G$ è ortogonale a tutti i vettori $P_i - G$ il che, per $P \neq G$, ha luogo se, e solo se, i punti P_i sono complanari; dall'altro lato, la validità di (36)_s come uguaglianza ha luogo per qualche $P \neq G$ se, e solo se, è $|A| = 0$. Dunque vale il precedente asserto.

Ne segue che, supposto il sistema S mai contenuto in un piano, in virtù delle (35) risultano assegnate, in funzione del tempo, le $V_m^{(s)s}$. Allora, per ogni ammissibile valore di s , le (19) forniscono tre equazioni differenziali del primo ordine lineari e normali nelle funzioni incognite $b_{(s)}^m$ ($m = 1, 2, 3$) di t . Queste equazioni consentono di determinare, assegnatine i valori iniziali, i vettori b_{σ} in funzione del tempo.

Indicheremo con \mathcal{F}' il fluido ideale animato del moto omografico (G, b) e lo diremo associato ad S .

La decomposizione (29), supposta valida qualunque sia il riferimento omografico assoluto, purchè si assuma \mathcal{F}' come fluido di trascinamento, mette in luce la circostanza che il riferimento omografico di trascinamento testè caratterizzato è quello rispetto al quale il sistema ha (ad ogni istante) energia cinetica minima. Invero, se ha luogo la (29), nel passaggio dal riferimento indicato a qualunque altro, occorrerà sommare a $\mathcal{E}^{(r)}$ la quantità non negativa $\mathcal{E}^{(r)}$.

⁴) Nel caso in cui i riferimenti siano rigidi (anzichè animati di moto omografico) il caso eccezionale è caratterizzato dall'appartenenza di S ad una retta (anzichè ad un piano). Cfr. § 4 nel loc. cit. in nota (3).

Come caso particolare della precedente affermazione si può osservare che per (29) è certo $\mathfrak{T}^{(r)} \leq \mathfrak{T}^{(e)}$ essendo $\mathfrak{T}^{(e)}$ l'energia cinetica di S rispetto allo spazio rigido associato ad S dall'Appell (cioè lo spazio rispetto a cui si annullano le velocità angolare e baricentrale di S).

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° marzo 1966.