RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

J. PEETRE

Applications de la théorie des espaces d'interpolation aux développements orthogonaux

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 133-145

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__133_0>

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES ESPACES D'INTERPOLATION AUX DÉVELOPPEMENTS ORTHOGONAUX

di J. PEETRE (*Lund*) *)

Introduction.

Cet article appartient à une série d'articles où l'on donnera des applications concrètes de la théorie des espaces d'interpolation dans l'Analyse classique; voir [6], [7], [8] pour les autres articles de cette série. Dans une certaine mesure il est aussi suite d'un autre travail antérieur [9], sur les développements orthogonaux.

Soit Ω un espace localement compact muni d'une mesure positive dm. Dans les cas concrets Ω est toujours une variété indéfiniment différentiable à l dimensions et, par rapport à chaque système de coordonnées locales $x = (x_1, \ldots, x_l)$, dm est de la forme $w(x)dx$ où $w(x) = w(x_1, \ldots, x_l)$ est une fonction positive indéfiniment différentiable et $dx = dx_1, \ldots, dx_l$ désigne la mesure de Haar, mais tout ce que nous allons faire vaut dans ce cadre plus général.) Nous désignons par $L_2(\Omega)$ l'espace Hilbertien des fonctions à carré intégrable par rapport à $d\mu$.

Soit E_λ une famille spectrale dans $L_2(\Omega)$, *nulle* pour $\lambda < 0$.

Etant données $f \in L_2(\Omega)$ et $\varphi = \varphi(\lambda)$ une fonction positive mesurable (pour la famille spectrale E_λ) on pose:

$$E_\lambda^\varphi f(x) = \int_0^\infty \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) dE_\mu f(x) \qquad (\varphi\text{-moyenne de } f)$$

Exemple 0.1.: Si

$$\varphi(\lambda) = \varphi^{(\alpha)}(\lambda) = \begin{cases} (1-\lambda)^\alpha & \text{si} \quad \lambda < 1 \\ 0 & \text{»} \quad \lambda \geqslant 1 \end{cases} \qquad (\alpha \geqslant 0)$$

*) Indirizzo dell'A.: Institut de mathematiques, Lund, Suéde (Svezia).

on obtient les moyennes de Riesz d'ordre α; on va écrire $E_\lambda^\alpha f(x) = E_\lambda^{\varphi^{(\alpha)}} f(x)$. Evidemment on a $E_\lambda^0 f(x) = E_\lambda f(x)$.

On se propose d'étudier, dans des hypothéses convenables sur φ, la convergence p.p. de $E_\lambda^\varphi f(x)$ pour $\lambda \to \infty$. Remarquons que si la limite de $E_\lambda^\varphi f(x)$ existe elle doit être $f(x)$ p.p.

La présentation se simplifie un peu si l'on ajoute l'hypothèse auxilière suivante sur E_λ:

(H) *On a* $E_\lambda^\varphi f(x) \to f(x)$ p.p., $\lambda \to \infty$, *quelle que soit* $f \in L_2(\Omega)$, *pourvu que* φ *soit à support compact et indéfiniment différentiable pour* $\lambda \neq 0$, *avec*

$$(0.1) \qquad |\varphi(\lambda) - \varphi(0)| \leqslant C_0 \lambda^\varkappa, \quad |\varphi^{(j)}(\lambda)| \leqslant C_j \lambda^{\varkappa - j} (j = 1, 2, \ldots) ,$$

C_0, C_j $(j = 1, 2, \ldots)$, $\varkappa$ *étant des contantes positives dependant de* φ.

Par example, la condition (0.1) est remplie lorsque φ est indéfiniment différentiable aussi pour $\lambda = 0$; en effet, dans ce cas on peut prendre $\varkappa = 1$.

Les φ qu'on rencontre le plus fréquemment en pratique satisfont toujours la condition (0.1) dans un voisinage de $\lambda = 0$. Donc si l'hypothèse (H) a lieu on peut se ramener alors au cas où φ s'annulle dans un voisinage de $\lambda = 0$. D'après un théorème connu souvent attribué à Saks (voir [9]) il suffit alors de démontrer que, quelle que soit $f \in L_2(\Omega)$, on a

$$\sup |E_\lambda^\varphi f(x)| < \infty \text{ p.p.},$$

car la convergence a certainement lieu lorsque $f \in L_2(\Omega)$ est telle que $E_\lambda f$ est constante pour λ assez grand, et ces f forment évidement un sous-ensemble dense de $L_2(\Omega)$.

D'autre part, l'hypothèse (H) a lieu dans plusieurs cas importants:

Exemple 0.2: Le cas $\Omega = R^l$ (espace numérique à l dimensions), E_λ étant la résolution spectrale correspondant à l'opérateur de convolution A défini par

$$A\,\mathrm{f}\,(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} H(\xi) \hat{\mathrm{f}}\,(\xi) d\xi \quad (\widehat{\ }, \text{ transformation de Fourier}),$$

où $H = H(\xi)$ est une fonction donnée, homogène d'ordre > 0, positive, indéfiniment différentiable pour $\xi \neq 0$; voir [7], [4].

Exemple 0.3.: Le cas $\Omega = T^l$ (tore à l dimensions), E_λ étant la résolution spectrale correspondant à l'operateur de convolution A défini par

$$A\,\mathrm{f}\,(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{\xi \text{ entier}} e^{ix\xi} H(\xi)\widehat{\mathrm{f}}\,(\xi) \quad (\widehat{\ }, \text{ transformation de Fourier}),$$

où $H = H(\xi)$ est comme au exemple 0.2.

Exemple 0.4.: Le cas Ω = variété *compacte* quelconque, E_λ étant la résolution spectrale correspondant à un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint; voir [10].

Un cas particulier important est de plus le cas (cas discret) où E_λ est constante sauf pour $\lambda = \lambda_n$ où λ_n est une suite croissante avec $\lambda_n \to \infty$ pour $n \to \infty$. On a maintenant

$$E_\lambda^\varphi f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) P_n f(x),$$

avec

$$P_n = E_{\lambda_n + 0} - E_{\lambda_n - 0}\,.$$

En particulier lorsque P_n est de rang 1:

$$P_n f(x) = a_n u_n(x), \qquad a_n = \int f(x)\,\overline{u_n(x)}\,d\mu,$$

on obtient

$$E_\lambda^\varphi f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\lambda_n}{\lambda}\right) a_n u_n(x);$$

c'est la situation classique de la théorie des *séries orthogonales*, le lecteur pourrait consulter le livre de Kaczmarz et Steinhaus [2] ou bien celui d'Alexits [1].

Au nº 1 on va donner une condition suffisante générale (th. 1.2) sur φ pour qu'on ait $E_\lambda^\varphi f(x) \to \varphi(0)f(x)$ p.p. pour $\lambda \to \infty$ quelle que soit $f \in L_2(\Omega)$. On va appliquer ensuite (nº 2) cette condition à quelques φ particulières. On retrouve ainsi des théorèmes bien-connus dans la théorie des séries orthogonales (exemple 2.1 et 2.2) ainsi qu'un résultat supplémentaire qui semble nouveau (exemple 2.3).

1. Un critère de convergence général.

Notations: On désigne par L_q, où $1 \leqslant q \leqslant \infty$, l'espace des fonctions numériques φ telles que

$$\| \varphi \|_{L_q} = \left(\int_0^\infty | \varphi(\lambda) |^q \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{1/q} < \infty .$$

De même, on désigne par $\dot{W}_q$ l'espace des fonctions numériques φ telles que

$$\| \varphi \|_{\dot{W}_q} = \left\| \lambda \frac{d\varphi}{d\lambda} \right\|_{L_q} < \infty .$$

Si X est un espace de Banach on désigne par $L_p(\Omega; X)$, où $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'espace des fonctions f à valeurs dans X de puissance p ème intégrable par rapport à dm:

$$\| f \|_{L_p(\Omega;X)} = \left(\int_\Omega \| f(x) \|_X^p \, dm \right)^{1/p} < \infty .$$

Si X_0 et X_1 sont des espaces de Banach tous les deux continûment plongés dans un espace vectoriel topologique $\mathfrak{X}$, on pose (deux conditions équivalentes!)

$$(X_0, X_1)_{\theta,r} = \left\{ a \mid \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty \right\} =$$

$$= \left\{ a \mid a = \int_0^\infty a(t) \frac{dt}{t}, \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t, a(t)))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty \right\},$$

avec $0 < \theta < 1$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, où l'on a posé

$$K(t, a) = K(t, a; X_0, X_1) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\| a_0 \|_{X_0} + t \| a_1 \|_{X_1}),$$

$$J(t, a) = J(t, a; X_0, X_1) = \max (\| a \|_{X_0}, t \| a \|_{X_1}) .$$

Pour plus de renseignements sur ces espaces le lecteur pourrait consulter

[11] (voir également [3]) ou bien le résumé de la théorie qu'on a fait dans [6], [7].

Commençons par le résultat simple suivant (voir [9], prop. 2.1).

THÉORÈME 1.1.: *Soit* $\varphi \in L_2$. *Alors pour tout* $f \in L_2(\Omega)$ *on a*:

$$E_\lambda^\varphi f(x) \in L_2(\Omega;\, L_2) \quad \left(\text{c'est-à-dire que } \int_\Omega \int_0^\infty |\, E_\lambda^\varphi f(x)\, |^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\, dm < \infty\right). \tag{1.1}$$

En particulier, on a:

$$\int_0^\infty |\, E_\lambda^\varphi f(x)\, |^2 \frac{d\lambda}{\lambda} < \infty \quad \text{p.p.}$$

Démonstration: D'après la formule de Parseval on a:

$$\|\, E_\lambda^\varphi f\, \|^2 = \int_0^\infty \left|\, \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\right|^2 d\, \|\, E_\mu f\, \|^2 \qquad (\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(\Omega)})\,.$$

D'où (Fubini):

$$\int_\Omega \int_0^\infty |\, E_\lambda^\varphi f(x)\, |^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\, dm = \int_0^\infty \|\, E_\lambda^\varphi f\, \|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \left|\, \varphi\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\right|^2 d\, \|E_\mu f\|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} = \int_0^\infty |\, \varphi(\lambda)\, |^2 \frac{d\lambda}{\lambda}\, \|\, f\, \|^2 < \infty\,.$$

La démonstration est complète.

Soit maintenant $\varphi \in \dot{W}_2$. Alors le th. 1.1 appliqué à $\lambda \dfrac{d\varphi}{d\lambda}$ montre que

$$E_\lambda^\varphi f(x) \in L_2(\Omega;\, \dot{W}_2)\,. \tag{1.2}$$

Interpolation entre (1.1) et (1.2) donne ensuite.

THÉORÈME 1.2.: *Soit* $\varphi \in (L_2,\, \dot{W}_2)_{1/2,1}$. *Alors pour tout* $f \in L_2(\Omega)$ *on a*:

$$E_\lambda^\varphi f(x) \in L_2(\Omega;\, L_\infty) \quad \left(\text{c'est-à-dire que } \int_\Omega (\sup_\lambda |\, E_\lambda^\varphi f(x)\, |\,)^2\, dm < \infty\right).$$

En particulier, on a:

$$\sup_{\lambda} \mid E_\lambda^\varphi f(x) \mid < \infty \text{ p.p.}$$

Par conséquent, si l'hypothèse (H) a lieu et si φ satisfait à la condition (0.1) *dans un voisinage de $\lambda = 0$, on a:*

$$E_\lambda^\varphi f(x) \to \varphi(0) f(x) \text{ p.p. pour } \lambda \to \infty .$$

Démonstration: On se rappelle que

$$\| \psi \|_{L_\infty} \leqslant c \| \psi \|_{L_2}^{1/2} \| \psi \|_{\dot{W}_2}^{1/2} . \tag{1.3}$$

Mais (1.3) s'écrit aussi

$$\| \psi \|_{L_\infty} \leqslant c t^{-(1/2)} J(t, \psi; L_2, \dot{W}_2) .$$

D'où, si $\psi = \int_0^\infty \psi(t) \frac{dt}{t}$,

$$\| \psi \|_{L_\infty} \leqslant \int_0^\infty \| \psi(t) \|_{L_\infty} \frac{dt}{t} \leqslant c \int_0^\infty t^{-(1/2)} J(t, \psi; L_2, \dot{W}_2) \frac{dt}{t}$$

ou bien, si l'on fait varier $\psi(t)$,

$$\| \psi \|_{L_\infty} \leqslant c \| \psi \|_{(L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1}};$$

en effet, ce n'est, essentiellement, qu'un cas très particulier du théorème de Soboleff (voir [6]). Ceci appliqué à $\psi = E_\lambda^\varphi f(x)$ donne

$$\| E_\lambda^\varphi f(x) \|_{L_\infty} \leqslant c \| E_\lambda^\varphi f(x) \|_{(L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1}} \text{ p.p.}$$

et par suite

$$\| E_\lambda^\varphi f(x) \|_{L_2(\Omega; L_\infty)} \leqslant c \| E_\lambda^\varphi f(x) \|_{L_2(\Omega; (L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1})} .$$

Mais, d'une façon générale, X_0 et X_1 étant quelconques, on a:

$$(L_q(\Omega; X_0),\ L_q(\Omega; X_1))_{\theta, r} \subset L_q(\Omega; (X_0, X_1)_{\theta, r}),\ r \leqslant q;$$

car on a:

$$K(t, f: L_q(\Omega; X_0), \quad L_q(\Omega; X_1)) \sim \| K(t, f; X_0, X_1) \|_{L_q(\Omega)}$$

($\sim$, équivalence de normes) .

Donc

$$\| E_\lambda^\varphi f(x) \|_{L_2(\Omega; L_\infty)} \leqslant c \| E_\lambda^\varphi f(x) \|_{(L_2(\Omega; L_2),\, L_2(\Omega; \dot{W}_2))_{(1/2),1}} . \tag{1.4}$$

Considérons maintenant l'application linéaire

$$T : \varphi \to E_\lambda^\varphi f(x) .$$

D'après (1.1) et (1.2) on a:

$$T : L_2 \to L_2(\Omega; L_2),$$

$$T : \dot{W}_2 \to L_2(\Omega; \dot{W}_2) .$$

Donc par interpolation

$$T : (L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1} \to (L_2(\Omega; L_2), \; L_2(\Omega; \dot{W}_2))_{(1/2),1}$$

d'où, grâce à (1.4), également

$$T : (L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1} \to L_2(\Omega; L_\infty) .$$

Ceci achève la démonstration.

2. Exemples concrets.

Nous montrons maintenant comment on peut retrouver à l'aide du th. 1.2 quelques résultats classiques.

Exemple 2.1.: Soit $\varphi = \varphi^{(\alpha)}$ (voir exemple 0.1.). Vue l'hypothèse (H) on se ramène tout de suite au cas $\varphi = \varrho\, \varphi^{(\alpha)}$ avec

$$\varrho(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \geqslant \dfrac{2}{3} \\ 0 & \text{si} \quad \lambda \leqslant \dfrac{1}{3} \end{cases} .$$

Or on a:

$$\varphi = \varrho\varphi^{(\alpha)} \in (L_2, \dot{W}_2)_{\theta,\infty} \quad \text{pour} \quad \theta < \alpha + \frac{1}{2}, \ 0 < \theta < 1 . \tag{2.1}$$

En effet, si l'on pose, pour $0 < t \leqslant 1$,

$$\varphi_0(\lambda) = \eta\left(\frac{1-\lambda}{t}\right)\varphi(\lambda), \qquad \varphi_1(\lambda) = \left(1 - \eta\left(\frac{1-\lambda}{t}\right)\right)\varphi(\lambda), \tag{2.2}$$

avec

$$\eta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \lambda \geqslant 1, \end{cases}$$

on voit que

$$\| \varphi_0(\lambda) \|_{L_2} \leqslant Ct^\theta, \qquad \| \varphi_1(\lambda) \|_{\dot{W}_2} \leqslant Ct^{(\theta-1)}$$

D'où:

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant Ct^\theta, \qquad 0 < t \leqslant 1 .$$

De même, si l'on pose, pour $t > 1$,

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi(\lambda), \qquad \varphi_1(\lambda) = 0, \tag{2.3}$$

on trouve

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant C \leqslant Ct^\theta, \qquad t > 1 .$$

D'où (2.1). Il résulte maintenant de (2.1) que

$$\varphi = \varrho\varphi_\alpha \in (L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1} \quad \text{pour} \quad \alpha > 0 .$$

En appliquent ensuite le th. 1.2 on trouve ainsi que, sous l'hypothèse (H), on a, quelle que soit $f \in L_2(\Omega)$,

$$E_\lambda^\alpha f(x) \to f(x) \ \text{p.p.} \quad \text{pour} \quad \lambda \to \infty \quad \text{pour} \quad \alpha > 0 .$$

Ce n'est, essentiellement, qu'un résultat classique dû à Kaczmarz-Zygmund (voir [1], p.p. 101-103; voir également [9], th. 2.1 et 2.2).

Exemple 2.2.: Soit $\varphi = \varphi^{(0)}$ (voir exemple 0.1, $\alpha = 0$). *Nous ne consi-*

dérons que le cas discret. Nous cherchons d'évaluer $E_\lambda f$ pour $\lambda < \lambda_N$, N entier donné. Pour cela il suffit evidemment de supposer que $P_n f = 0$ pour $n \geqslant N$. Alors on a, quel que soit λ,

$$E_\lambda f = E_\lambda^0 f = \sum_{\lambda_n < \min(\lambda, \lambda_N)} P_n f \,.$$

Donc il suffit de considérer les valeurs $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_N$ seulement. On voit également qu'on peut remplacer $\varphi^{(0)}$ par une fonction $\varphi_\delta^{(0)}$ telle que

$$\varphi_\delta^{(0)}(\lambda) = \varphi(\lambda) \quad \text{pour} \quad 0 < \lambda \leqslant 1 - \delta \quad \text{et pour} \quad \lambda \geqslant 1,$$

$$|\,\varphi_\delta^{(0)}(\lambda)\,| \leqslant C, \quad \left|\frac{d}{d\lambda}\varphi_\delta^{(0)}(\lambda)\right| \leqslant C\delta^{-1} \quad \text{pour} \quad 1 - \delta < \lambda < 1,$$

où l'on a posé:

$$\delta = \delta_N = \min_{n<N}\left(1 - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right) . \tag{2.4}$$

Vue l'hypothèse (H) on se ramène encore au cas $\varphi = \varrho\varphi_\delta^{(0)}$ avec ϱ comme an exemple 2.1. On a maintenant:

$$\varphi = \varrho\varphi_\delta^{(0)} \in (L_2, \dot{W}_2)_{(1/2),1} \qquad \|\,\varphi\,\|_{(L_2,\dot{W}_2)_{(1/2),1}} \leqslant C\log\frac{1}{\delta} . \tag{2.5}$$

En effet, si l'on définit φ_0 et φ_1 par (2.2) on trouve

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant Ct^{1/2}, \qquad 2\delta \leqslant t \leqslant 1 .$$

De même si l'on définit φ_0 et φ_1 par (2.3) on trouve

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant C, \qquad t > 1 .$$

Reste évidemment seulement le cas $0 < t < 2\delta$. Dans ce cas posons:

$$\varphi_0(\lambda) = 0, \qquad \varphi_1(\lambda) = \varphi(\lambda) .$$

On trouve aisément:

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant Ct(1 + \delta^{-(1/2)}) \leqslant Ct\delta^{-(1/2)}, \, 0 < t < 2\delta .$$

D'où enfin:

$$\| \varphi \|_{(L_2 \dot{W}_2)_{(1/2),1}} \leqslant C \int_0^\infty \frac{K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2)}{t^{1/2}} \frac{dt}{t} \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\int_0^{2\delta} + \int_{2\delta}^1 + \int_1^\infty \frac{K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2)}{t^{1/2}} \frac{dt}{t} \right) \leqslant C \log \frac{1}{\delta} ,$$

ce qui établit (2.5). En appliquant le th. 1.2 on trouve ainsi que, sous l'hypothèse (H), quelle que soit $f \in L_2(\Omega)$, on a:

$$\left(\int (\sup_{\lambda \leqslant \lambda_N} | E_\lambda f(x) |)^2 \, \mathrm{dx} \right)^{1/2} \leqslant C \log \frac{1}{\delta} \| f \| . \tag{2.6}$$

Considérons ensuite (2.6) dans deux cas particuliers:

a) $\lambda_n = n$.

b) $\lambda_n \geqslant k \lambda_{n-1}$, $k > 1$ (« condition lacunaire d'Hadamard »):

Cas a): On a, dans ce cas, $\delta_N \approx \dfrac{1}{N}$. Donc il vient:

$$\left(\int_\Omega (\sup_{\lambda < \lambda_N} | E_\lambda f(x) |)^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant C \log N \| f \| . \tag{2.7}$$

Or ce n'est que l'essentiel du théorème classique célèbre de Menchoff-Rademacher (voir [1], pp. 75-79) qui dit encore un peu plus:

$$\int_\Omega \left(\sup_\lambda \frac{| E_\lambda f(x) |}{\log \lambda} \right)^2 dx < \infty$$

d'où en particulier

$$\sup_\lambda \frac{| E_\lambda f(x) |}{\log \lambda} < \infty \quad \text{p.p.}$$

Signalons encore deux cas où vaut (2.7) et par suite l'analogue du théorème de Menchoff-Rademacher: 1° $\Omega = T^l$, $A = -\Delta$ (opérateur de Laplace usuel) — grâce à des résultats connus en théorie des nombres sur la distribution de sommes de l carrés. 2° $\Omega = S^l$ (sphere unité de R^{l+1}),

$A = -\Delta$ (opérateur de Laplace-Beltrami) — parce que maintenant on a $\lambda_n = n(n + l - 1)$. Remarquons d'ailleurs que dans le cas 1° avec $l = 1$ on peut remplacer dans (2.7), $\log N$ par $(\log N)^{1/2}$; c'est le théorème de Kolmogoroff-Seliverstoff-Plessner (voir [1] pp. 154-158); ou, en effet, même par $\log \log N$, d'après un résultat profond plus récent dû à Carleson. D'autre part, pour $l > 1$, Mitchell [5] a obtenu un résultat beaucoup moins précis par la méthode de ces auteurs. Donc voici effectivement un cas où les méthodes de la théorie des développements orthogonaux sont plus fortes que la méthode de Kolmogoroff-Seliverstoff-Plessner. Remarquons aussi que *nous ignorons si l'on peut étendre le théorème de Menchoff-Rademacher au cas non-discret.* Certainement il y a quelquechose dans la méthode qui est strictement lié au cas discret.

Cas b): On a, dans ce cas, $\delta_N \approx 1$. Donc il vient

$$\left(\int_\Omega (\sup_{\lambda<\lambda_N} |E_\lambda f(x)|)^2 \, dx\right)^{1/2} \leqslant C \, \| f \| \, .$$

D'une façon analogue, on peut maintenant retrouver un théorème classique de Kolmogoroff (voir [1], p.p. 111-113).

Finalement considérons un exemple d'une nature un peu différente.

Exemple 2.3.: Soit

$$\varphi(\lambda) = \varphi^{[\beta]}(\lambda) = \frac{e^{i\lambda} - 1}{\lambda^\beta} \, , \quad 0 < \beta < 1 \, .$$

Comme ci-dessus exemple 2.1 et 2.2 on se ramène au cas $\varphi = \varrho \; \varphi^{[\beta]}$; en effet on notera que la condition (0.1) a effectivement lieu avec $k = 1 - \beta$. Nous allons montrer que

$$\varphi = \varrho \varphi^{[\beta]} \in (L_2, \dot{W}_2)_{\beta,\infty} \, . \tag{2.8}$$

Comme $\varphi \in L_2$ on aura alors également:

$$\varphi = \varrho \varphi^{[\beta]} \in (L_2, W_2)_{(1/2),1} \quad \text{pour} \quad \beta > \frac{1}{2} \, . \tag{2.9}$$

Pour cela posons, pour $0 < t < 1$,

$$\varphi_0(\lambda) = \zeta(t\lambda)\varphi(\lambda), \quad \varphi_1(\lambda) = (1 - \zeta(t\lambda))\varphi(\lambda)$$

avec

$$\zeta(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ 1 & \text{»} \quad \lambda > 2 . \end{cases}$$

Comme $\varphi_0(\lambda) = 0(\lambda^{-\beta})$ et s'annulle pour $\lambda \leqslant t^{-1}$ on voit que

$$\| \varphi_0 \|_{L_2} \leqslant Ct^\beta ,$$

et, de même, par un calcul simple

$$\| \varphi_1 \|_{\dot{W}_2} \leqslant Ct^{\beta-1} .$$

D'où

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant Ct^\beta , \quad 0 < t \leqslant 1 .$$

Si on définit φ_0 et φ_1 par (2.3) on trouve de plus

$$K(t, \varphi; L_2, \dot{W}_2) \leqslant C \leqslant Ct^\beta , \quad t > 1 .$$

Donc (2.8) ainsi que (2.9) sont établis. Il résulte de (2.9) que, sous l'hypothése (H), quelle que soit $f \in D(A^\beta)$, le domaine de la puissance β ème de A, l'opérateur dont E_λ est la résolution spectrale, on a $\left(t = \dfrac{1}{\lambda}\right)$

$$e^{itA}f(x) = f(x) + 0(t^\beta) \text{ p.p.} \quad \text{pour} \quad t \to 0 \quad \text{pour} \quad \beta > \frac{1}{2} .$$

$\Big($On peut montrer que ce résultat est faux pour $\beta \leqslant \dfrac{1}{2}\Big)$. On voit aisément que (2.9) — et par suite le résultat ci-dessus — valent encore pour $\beta = 1$. Dans ce cas on le peut reformuler comme suit: Pour tout $f \in L_2(\Omega)$ on a:

$$\frac{1}{t} \int_0^t e^{isA} f(x) ds \to f(x) \text{ p.p.} \quad \text{pour} \quad t \to 0 .$$

C'est donc un espèce de *théorème ergodique local* (au sens de Wiener) pour le groupe e^{itA} .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALEXITS G.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen.* Berlin, 1960.

[2] KACZMARZ S. et STEINHAUS H.: *Theorie der Orthogonalreihen.* Varsovie, 1935.

[3] LIONS J. L. et PEETRE J.: *Sur une classe d'espace d'interpolation.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 1964, 19, 5-68.

[4] LÖFSTRÖM J.: *Some theorems on interpolation spaces with approximation in L_p.* A paraître aux Math. Ann.

[5] MITCHELL J.: *On the spherical convergence of multiple Fourier series.* Amer. J. Math., 1951, 73, 211-226.

[6] PEETRE J.: *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff.* Ann. Inst. Fourier, 1966, 16, 279-317.

[7] PEETRE J.: *Application de la théorie des espaces d'interpolation dans l'Analyse Harmonique.* Richerche Mat. 1966, 15, 3-36.

[8] PEETRE J.: *Absolute convergence of eigenfunction expansions.* A paraître aux Math. Ann.

[9] PEETRE J.: *Some remarks on continuous orthogonal expansions and eigenfunctions expansion for positive self-adjoint elliptic operators with variable coefficients.* Math. Scand., 1966, 17, 56-64.

[10] PEETRE J.: *Estimates for spectral functions.* Math. Z., 1966, 92, 146-153.

[11] PEETRE J.: *Espaces d'interpolation, généralisations, applications.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 1964, 34, 133-161.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 marzo 1966.