DIONIGI GALLETTO

Sulla condizione di isotropia per i sistemi continui a trasformazioni reversibili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 246-257

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__246_0>

SULLA CONDIZIONE DI ISOTROPIA PER I SISTEMI CONTINUI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI

di DIONIGI GALLETTO (*a Padova*) *)

Nella presente nota si dimostra che una certa espressione del lavoro specifico delle forze interne di contatto è valida per i sistemi isotropi e che anzi il verificarsi di detta espressione nel caso dei sistemi a trasformazioni reversibili implica che questi siano isotropi. Detto risultato permane valido anche in presenza del vincolo interno di incomprimibilità.

Da detta espressione seguono immediatamente certe relazioni sintetiche, parte delle quali ben note, che risultano caratteristiche dei sistemi isotropi a trasformazioni reversibili. In particolare seguono le note relazioni che legano il tensore euleriano degli sforzi al trasformato del tensore di deformazione mediante la rotazione locale.

Il procedimento seguito permette anche di concludere che condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema continuo a trasformazioni reversibili sia isotropo in una data configurazione è che in ogni punto di essa esista una terna principale di deformazione che sia terna unita per il tensore lagrangiano degli sforzi.

Si noti la maggiore generalità della condizione ora enunciata rispetto a quella classica [1]) che richiede a ogni direzione principale di deformazione di essere direzione unita per il tensore lagrangiano degli sforzi.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) Cfr. [4], II, 17.

1. Generalità.

Sia $\mathscr{C}$ un sistema continuo tridimensionale, C la configurazione scelta come riferimento, C' la configurazione attuale. Lo spazio si riterrà riferito a coordinate cartesiani trirettangole, coordinate che verranno indicate rispettivamente con x^i $(i = 1, 2, 3)$ o con $x^{i'}$ a seconda che si riferiscano a punti di C o di C'.

Con $T^{i'j'}$ si indicherà il tensore (euleriano) degli sforzi e con T^{ij} il corrispondente tensore lagrangiano, definito da [2])

$$T^{ij} = \mathfrak{D} x^i_{i'} x^j_{j'} T^{i'j'}, \tag{1.1}$$

dove, al solito, è da intendersi

$$x^{i'}_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \qquad x^i_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \qquad \mathfrak{D} = \operatorname{Det} \| x^{i'}_i \| .$$

Il tensore degli sforzi si riterrà simmetrico (assenza di momenti interni di contatto, ecc.). In tale ipotesi una delle possibili espressioni lagrangiane del lavoro specifico delle forze interne di contatto nel passaggio dalla configurazione C' a un'altra infinitamente prossima è data da

$$\delta l^{(i)} = T^{ij} \delta e_{ij}, \tag{1.2}$$

con e_{ij} tensore di deformazione. Quest'ultimo è definito da

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (g'_{ij} - \delta_{ij}),$$

con

$$g'_{ij} = x^{i'}_i x^{i'}_j ,$$

e δ_{ij} simbolo di Kronecker.

Il trasformato del tensore di deformazione mediante la rotazione locale ha le componenti coincidenti con le componenti miste $e^{i'}{}_{j'}$ del ten-

---

[2]) Nelle (1.1) e nel seguito, salvo diverso, esplicito avviso, è sottinteso il simbolo di somma rispetto agli indici ripetuti.

sore di deformazione nel riferimento che si ottiene interpretando le coordinate $x^{i'}$ come particolari coordinate curvilinee della configurazione di riferimento [3]):

$$e^{i'}{}_{j'} = x^{i'}_{i} x^{j}_{j'} e_{ij}, \tag{1.3}$$

con la conseguenza, d'altronde ovvia, che gli invarianti di tale tensore coincidono con gli invarianti del tensore di deformazione.

Inoltre, posto

$$g^{i'j'} = x^{i'}_{i} x^{j'}_{i},$$

risulta

$$e^{i'}{}_{j'} = \frac{1}{2}(g^{i'j'} - \delta^{i'j'}) \equiv e_{i'}{}^{j'} \equiv e^{j'}{}_{i'}. \tag{1.4}$$

2. Una espressione del lavoro specifico delle forze interne di contatto caratteristica dei sistemi isotropi a trasformazioni reversibili.

Posto

$$T_{i'}{}^{j'} = x^{i}_{i'} x^{j'}_{j} T^{ij} \tag{2.1}$$

(componenti miste del tensore lagrangiano degli sforzi nel riferimento curvilineo $x^{i'}$ di C), all'espressione (1.2) del $\delta l^{(i)}$ si può sostituire la seguente

$$\delta l^{(i)} = T_{i'}{}^{j'} \delta e^{i'}{}_{j'} - (T^{il} e_{jl} - T^{jl} e_{il}) x^{i}_{i'} \delta x^{i'}_{j}, \tag{2.2}$$

per la cui deduzione, oltre alle (2.1), (1.3), si è tenuta presente la relazione

$$\delta x^{j}_{j'} = - x^{j}_{l'} x^{l}_{j'} \delta x^{l'}_{l},$$

conseguenza immediata dell'identità $x^{l'}_{j} x^{j}_{j'} = \delta^{l'}_{j'}$.

Nel caso in cui $\mathscr{C}$ sia isotropo in C (ossia nel caso in cui ogni terna principale di deformazione sia terna unita per il tensore T^{ij}), la (2.2)

---

[3]) Cfr. [1], 7.

si riduce a

$$\delta l^{(i)} = T_{i'}{}^{j'}\delta e^{i'}{}_{j'}, \tag{2.3}$$

in quanto, come agevolmente si può constatare, in tale caso risulta

$$T^{il}e_{jl} - T^{jl}e_{il} = 0 . \tag{2.4}$$

Infatti, sia P un arbitrario punto di C, $\mathcal{T}$ la (o una) terna principale di deformazione ad esso relativa (che è anche terna unita per il tensore T^{ij}), e_i le caratteristiche principali di deformazione e T^i le caratteristiche lagrangiane principali di tensione. Rispetto alla terna $\mathcal{T}$ le componenti del tensore di deformazione e le componenti del tensore lagrangiano degli sforzi risultano espresse da $e_i\delta_{(i)j}$, $T^i\delta^{(i)j}$, dove la parentesi apposta all'indice i sta a significare che non si deve sommare rispetto a tale indice. Rispetto alla suddetta terna il primo membro di (2.4) è pertanto espresso da

$$T^i\delta^{(i)l}e_j\delta_{(j)l} - T^j\delta^{(j)l}e_i\delta_{(i)l} = T^ie_j\delta_{(i)(j)} - T^je_i\delta_{(i)(j)},$$

ossia risulta nullo, qualunque siano gli indici i, j.

Stante il carattere tensoriale di tale risultato e l'arbitrarietà di P, segue che le (2.4) sono senz'altro verificate in tutto C, qualunque sia il riferimento cartesiano a cui si supponga riferito lo spazio.

Resta così provato che se $\mathscr{C}$ è isotropo in C la (2.3) è senz'altro verificata. Ma, almeno nel caso dei sistemi a trasformazioni reversibili, sussiste anche la proprietà inversa, ossia il verificarsi della (2.3) in corrispondenza al passaggio dalla configurazione C' a un'altra vicinissima arbitraria implica che $\mathscr{C}$ sia isotropo in C.

Prendendo per ora in considerazione il caso dei sistemi esenti da vincoli interni [4]) (il caso dei sistemi soggetti al vincolo interno di incomprimibilità verrà considerato in fine), per provare il suddetto asserto conviene innanzi tutto osservare che, stante la (2.2), il verificarsi della (2.3) in corrispondenza a $\delta x_i^{i'}$ arbitrari implica che risultino verificate le (2.4).

---

[4]) In tal caso, prescindendo da eventuali vincoli in superficie, i $\delta x_i^{i'}$ corrispondenti al passaggio dalla configurazione C' a un'altra vicinissima arbitraria risultano arbitrari. D'altra parte è evidente che l'eventuale presenza di vincoli in superficie non ha influenza sulla deduzione delle (2.4) dalla (2.3).

Ciò premesso, con $\mathfrak{T}$ si intenderà ora la (o una) terna unita per il tensore lagrangiano degli sforzi, relativa all'arbitrario punto P di C. Continuando ad indicare con e_{ij} le componenti rispetto a tale terna del tensore di deformazione, le (2.4) si scrivono

$$T^i \delta^{(i)l} e_{jl} - T^j \delta^{(j)l} e_{il} = 0,$$

ossia

$$T^i e_{(i)j} - T^j e_{i(j)} = 0, \tag{2.5}$$

eguaglianze che sono verificate se e soltanto se si verifica uno dei seguenti tre casi:

1) Caso in cui è

$$T^1 = T^2 = T^3 .$$

In tal caso il tensore lagrangiano degli sforzi è isotropo e quindi ogni direzione principale di deformazione è direzione unita per il suddetto tensore.

2) Caso in cui è

$$T^l = T^{l+1} \neq T^{l+2},$$

con l fissato [5]). In tal caso dalle (2.5) si deduce che devono essere verificate le eguaglianze

$$e_{ll+1} = e_{ll+2} = 0,$$

esprimenti che la direzione dell'asse della terna $\mathfrak{T}$ a cui corrisponde l'indice l è direzione principale di deformazione. Ne segue che esiste senz'altro una terna principale del tensore di deformazione che è terna unita per il tensore lagrangiano degli sforzi.

3) Caso in cui è

$$T^1 \neq T^2 \neq T^3 .$$

---

[5]) È ovvio che se l'indice $l + \alpha$ ($\alpha = 1, 2$) supera 3 va diminuito di 3.

In tal caso dalle (2.5) si deduce che devono essere verificate le eguaglianze

$$e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0,$$

esprimenti che la terna $\mathfrak{T}$ è anche terna principale di deformazione.

Si ha quindi la conclusione che il verificarsi delle (2.5) implica in ogni caso che in ciascun punto P di C una terna principale di deformazione ad esso relativa sia terna unita per il tensore T^{ij}. Ora detta evenienza, almeno nel caso dei sistemi a trasformazioni reversibili, è sufficiente, da sola, ad assicurare l'isotropia in C del sistema in esame.

Infatti essa è sufficiente per provare che l'energia libera termodinamica dipende dal tensore di deformazione unicamente per il tramite dei suoi invarianti principali. Basta rifarsi, ad es., alla dimostrazione che si dà in [4] [6]) per provare che se $\mathscr{C}$ è isotropo in C l'energia libera dipende dalle e_{ij} nel modo suddetto: in tale dimostrazione non viene affatto sfruttata la proprietà che ogni direzione principale di deformazione è direzione unita per il tensore T^{ij}, ma unicamente la proprietà che una terna principale di deformazione è terna unita per il tensore T^{ij}. Una volta provato che l'energia libera dipende dalle e_{ij} unicamente per il tramite degli invarianti principali, segue agevolmente, come è ben noto, che ogni direzione principale di deformazione è direzione unita per T^{ij}, ossia che $\mathscr{C}$ è isotropo in C.

Resta così provato che, *nel caso dei sistemi a trasformazioni reversibili (esenti da vincoli interni), la* (2.3) *si verifica se e soltanto se l'energia libera termodinamica dipende dalle componenti del tensore di deformazione unicamente per il tramite dei suoi invarianti principali.*

3. Relazioni sintetiche caratteristiche dei sistemi isotropi a trasformazioni reversibili.

In questo numero si proverà che certe relazioni che legano lo stress alla deformazione, parte delle quali ben note, sono caratteristiche dei sistemi isotropi a trasformazioni reversibili.

---

[6]) Cfr. [4], II, 17. Si veda anche la dimostrazione che dello stesso teorema viene data in [2].

Nell'ipotesi che $\mathscr{C}$ sia a trasformazioni reversibili, si ha

$$\delta l^{(i)} = - \delta F - E' \delta T' , \tag{3.1}$$

con F energia libera termodinamica, E' e T' entropia e temperatura dello stato attuale.

Continuando a ritenere il sistema in esame esente da vincoli interni, dalla (3.1), nella quale si sostituisca la (2.3), si ottengono le seguenti relazioni, *caratteristiche dei sistemi isotropi esenti da vincoli interni* [7]),

$$T_{i'}{}^{j'} = - \frac{1}{2 - \delta_{i'j'}} \frac{\partial F}{\partial e^{i'}{}_{j'}} . \tag{3.2}$$

Da esse si deducono le seguenti espressioni per le componenti contravarianti del tensore lagrangiano degli sforzi nel riferimento curvilineo $x^{i'}$ di C:

$$T^{i'j'} = - \frac{1}{2 - \delta_{j'l'}} \frac{\partial F}{\partial e^{l'}{}_{j'}} g^{i'l'} .$$

Da queste ultime infine, ricordate le (1.1), seguono immediatamente le relazioni

$$T'^{i'j'} = - \frac{\mathfrak{D}^{-1}}{2 - \delta_{j'l'}} \frac{\partial F}{\partial e^{l'}{}_{j'}} g^{i'l'} , \tag{3.3}$$

---

[7]) A rigore, stante l'eguaglianza $e^{i'}{}_{j'} = e^{j'}{}_{i'}$, dà contributo effettivo all'espressione (2.3) del $\delta l^{(i)}$ soltanto la parte simmetrica di $T_{i'}{}^{j'}$ e pertanto il secondo membro delle (3.2) esprime soltanto detta parte. Si può però agevolmente constatare che questa coincide con $T_{i'}{}^{j'}$, e che quindi risulta $T_{i'}{}^{j'} = T_{j'}{}^{i'}$, partendo dalle relazioni

$$T^{ij} = - \frac{\partial F}{\partial e_{ij}}$$

le quali, per le (2.1), danno luogo alle

$$T_{i'}{}^{j'} = - \frac{\partial F}{\partial e_{ij}} x^i_{i'} x^{j'}_j .$$

Nell'ipotesi che $\mathscr{C}$ sia isotropo in C, esplicitando in esse le $\dfrac{\partial F}{\partial e_{ij}}$, si ottengono le (3.2′), ossia le (3.2). Resta così provato che nel caso dei sistemi isotropi valgono senz'altro le (3.2).

Viceversa, se non verificate le (3.2), è intanto $T_{i'}{}^{j'} = T_{j'}{}^{i'}$, e inoltre risulta verificata la (2.3), con la conseguenza che $\mathscr{C}$ risulta isotropo in C.

Le (3.2), conformemente a quanto asserito, sono quindi caratteristiche dei sistemi isotropi (a trasformazioni reversibi i, esenti da vincoli interni).

che, ricordate le (1.4), esprimono il tensore euleriano degli sforzi in funzione del trasformato mediante la rotazione locale del tensore di deformazione. Esse coincidono con quelle stabilite, con diverso procedimento, al n. 11 del cap. III di [5]. Il procedimento qua seguito permette, in più, di asserire che esse sono caratteristiche dei sistemi isotropi esenti da vincoli interni.

Dal fatto che l'energia libera dipenda dal tensore di deformazione unicamente per il tramite degli invarianti principali

$$I_1 = e_{ii} \equiv e^{i'}{}_{i'}, \qquad I_2 = \frac{1}{2}\,[(I_1)^2 - e_{ij}e_{ij}] \equiv \frac{1}{2}\,[(I_1)^2 - e^{i'}{}_{j'}e^{i'}{}_{j'}],$$

$$I_3 = \mathrm{Det}\,\|\,e_{ij}\,\| \equiv \mathrm{Det}\,\|\,e^{i'}{}_{j'}\,\|,$$

o, il che è lo stesso, per il tramite di I_1, I_2, $\mathfrak{D}$, segue che le (3.2) si esplicitano nelle [8])

$$T_{i'}{}^{j'} = -\left(\frac{\partial F}{\partial I_1} + I_1\,\frac{\partial F}{\partial I_2}\right)\delta^{j'}_{i'} + \frac{\partial F}{\partial I_2}\,e^{i'}{}_{j'} - \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{D}}\,\mathfrak{D}g_{i'j'}\,. \tag{3.2'}$$

Queste, sostituite nelle (3.3), dànno luogo alle ben note relazioni stabilite in [5] [9]), equivalenti a quelle di Finger [10]).

* * *

Indicate con $\bar{e}_{i'j'}$ le componenti del tensore di deformazione inerente allo spostamento inverso, risulta

$$\bar{e}_{i'j'} = \frac{1}{2}\,(g_{i'j'} - \delta_{i'j'})\,. \tag{3.4}$$

---

[8]) Si tenga presente che risulta

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\mathrm{Det}\,\|\,g^{i'j'}\,\|} = \sqrt{\mathrm{Det}\,\|\,2e^{i'}{}_{j'} + \delta^{i'}{}_{j'}\,\|},$$

e che pertanto si ottiene

$$\frac{1}{2-\delta_{i'j'}}\,\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial e^{i'}{}_{j'}} = \frac{1}{2-\delta_{i'j'}}\,\frac{1}{\mathfrak{D}}\,g_{i'j'}\mathfrak{D}^2(2-\delta_{i'j'}) = \mathfrak{D}g_{i'j'},$$

con

$$g_{i'j'} = x^i_{i'}x^i_{j'}\,.$$

[9]) Cfr. [5], III, 11.

[10]) Cfr. [3], III, § 1, 4.

Dall'identità

$$g^{l'k'}g_{h'k'} = \delta^{l'}_{h'},$$

tenute presenti le (3.4), (1.4), si deduce

$$-\, g^{l'k'}\delta\bar{e}_{h'k'} = g_{h'k'}\delta e^{l'}{}_{k'},$$

e da questa segue, stante l'eguaglianza $e^{i'}{}_{j'} = e^{j'}{}_{i'}$,

$$\frac{\partial \bar{e}_{h'k'}}{\partial e^{l'}{}_{j'}} = -\,(2 - \delta_{j'l'})g_{h'j'}g_{k'l'}\,.$$

Si ha pertanto

$$\frac{1}{2-\delta_{j'l'}}\frac{\partial F}{\partial e^{l'}{}_{j'}}g^{i'l'} = \frac{1}{2-\delta_{j'l'}}\frac{1}{2-\delta_{h'k'}}\frac{\partial F}{\partial \bar{e}_{h'k'}}\frac{\partial \bar{e}_{h'k'}}{\partial e^{l'}{}_{j'}}g^{i'l'} =$$

$$= -\,\frac{1}{2-\delta_{h'i'}}\frac{\partial F}{\partial \bar{e}_{h'i'}}g_{h'j'},$$

con la conseguenza che, ricordate le (3.3), risulta

$$T'^{i'j'} = \frac{\mathfrak{D}^{-1}}{2-\delta_{i'l'}}\frac{\partial F}{\partial \bar{e}_{i'l'}}g_{j'l'}\,. \tag{3.5}$$

Da queste, tenuto presente che gli invarianti del tensore e_{ij} si possono esprimere in funzione degli invarianti del tensore $\bar{e}_{i'j'}$ e che quindi F si può intendere funzione di questi ultimi, seguono ormai subito le note formule stabilite al n. 12 del cap. III di [5].

4. Caso dei sistemi soggetti al vincolo interno di incomprimibilità.

Nel caso in cui $\mathscr{C}$ sia soggetto al vincolo interno di incomprimibilità, sussiste il legame

$$\mathfrak{D} = \lambda(T, T'; x^1, x^2, x^3), \tag{4.1}$$

con T temperatura dello stato di riferimento e con la funzione λ che assume il valore 1 ogni qualvolta sia $T' \equiv T$.

A differenza del caso dei sistemi esenti da vincoli interni, sussistendo presentemente il legame (4.1), segue che le variazioni $\delta x_i^{i'}$ esprimenti il passaggio dalla configurazione C' a un'altra vicinissima arbitraria [10]) non sono più arbitrarie ma soggette al legame

$$\mathfrak{D} x^i_{i'} \delta x^{i'}_i = \frac{\partial \lambda}{\partial T'} \delta T' . \tag{4.2}$$

Però, nonostante questo legame per le variazioni $\delta x_i^{i'}$, il verificarsi dell'eguaglianza

$$(T^{il} e_{jl} - T^{jl} e_{il}) x^i_{i'} \delta x^{i'}_j = 0 \tag{4.3}$$

in corrispondenza al suddetto passaggio ha ancora come conseguenza le relazioni (2.4).

Per provare l'asserto si supponga in un primo tempo che risulti $\delta T' \neq 0$. Ciò premesso, si osservi che uno dei nove addendi che compaiono a primo membro di (4.2) è certo diverso da zero: sia, ad es., $\mathfrak{D} x^3_{3'} \delta x^{3'}_3$. Convenendo che gli indici greci possano assumere soltanto i valori 1, 2, da (4.2) si ottiene

$$\delta x^{3'}_3 = \frac{1}{x^3_{3'}} \left(- x^\alpha_{i'} \delta x^{i'}_\alpha - x^3_{\alpha'} \delta x^{\alpha'}_3 + \frac{1}{\mathfrak{D}} \frac{\partial \lambda}{\partial T'} \delta T' \right) , \tag{4.4}$$

mentre l'eguaglianza (4.3) si scrive

$$\begin{aligned}(T^{hl} e_{\alpha l} - T^{\alpha l} e_{hl}) x^h_{i'} \delta x^{i'}_\alpha + (T^{hl} e_{3l} - T^{3l} e_{hl}) x^h_{\alpha'} \delta x^{\alpha'}_3 + \\ + (T^{hl} e_{3l} - T^{3l} e_{hl}) x^h_{3'} \delta x^{3'}_3 = 0 ,\end{aligned}$$

dove le variazioni $\delta x^{i'}_\alpha$, $\delta x^{\alpha'}_3$ sono arbitrarie, mentre la variazione $\delta x^{3'}_3$ è espressa dalla (4.4). Risultando per ipotesi $\delta T' \neq 0$, si ha pertanto

$$(T^{hl} e_{3l} - T^{3l} e_{hl}) x^h_{3'} = 0$$

e inoltre, per l'arbitrarietà di $\delta x^{i'}_\alpha$, $\delta x^{\alpha'}_3$,

$$(T^{hl} e_{\alpha l} - T^{\alpha l} e_{hl}) x^h_{i'} = 0 ,$$

$$(T^{hl} e_{3l} - T^{3l} e_{hl}) x^h_{\alpha'} = 0 ,$$

ossia, in definitiva,

$$(T^{hl} e_{jl} - T^{jl} e_{hl}) x^h_{i'} = 0 .$$

Da queste eguaglianze, moltiplicando ambo i membri per $x^{i'}_i$, seguono immediatamente le (2.4).

Nel caso in cui invece risulti $\delta T' = 0$, la (4.2) diventa

$$x^i_{i'}\delta x^{i'}_i = 0$$

e il ruolo di questa e della (4.3) si esaurisce nell'imporre che risulti

$$(T^{hl}e_{jl} - T^{jl}e_{hl})x^h_{i'} = kx^j_{i'},$$

con k parametro a priori indeterminato. È però sufficiente moltiplicare ambo i membri per $x^{i'}_i$ per ottenere

$$T^{il}e_{jl} - T^{jl}e_{il} = k\delta^j_i,$$

da cui, risultando il primo membro identicamente nullo non appena è $i = j$, si deduce che k è necessariamente nullo, ossia che sono ancora verificate le (2.4).

Provato che anche nel caso dei sistemi incomprimibili la (4.3) implica le eguaglianze (2.4), la dimostrazione data al n. 2 per provare che il verificarsi della (2.3) implica che $\mathscr{C}$ sia isotropo in C si trasporta al presente caso immutata.

Si può quindi concludere che *nel caso dei sistemi a trasformazioni reversibili, il verificarsi della* (2.3) *implica che* $\mathscr{C}$ *sia isotropo, indipendentemente dalla presenza o meno del vincolo interno di incomprimibilità.*

* * *

Ricordando le (1.4), risulta

$$x^i_{i'}\delta x^{i'}_i \equiv x^l_{i'}x^{l'}_i x^i_{l'}\delta x^{i'}_i = g_{i'l'}\delta e^{i'}{}_{l'},$$

e pertanto la (4.2) si può scrivere

$$\mathfrak{D}g_{i'l'}\delta e^{i'}{}_{l'} = \frac{\partial\lambda}{\partial T'}\,\delta T'\,.$$

Sussistendo nel caso dei sistemi incomprimibili tale legame fra le variazioni $\delta e^{i'}{}_{l'}$, $\delta T'$, le (3.2) vanno sostituite con le relazioni

$$T_{i'}{}^{j'} = -\frac{1}{2-\delta_{i'j'}}\left(\frac{\partial F}{\partial e^{i'}{}_{j'}} - p\mathfrak{D}g_{i'j'}\right), \tag{4.5}$$

ove p è il solito parametro caratterizzante la pressione vincolare interna. Esse sono caratteristiche dei sistemi isotropi incomprimibili, a trasformazioni reversibili.

BIBLIOGRAFIA

[1] Galletto D.: *Qualche osservazione di cinematica delle deformazioni finite*. Memorie dell'Acc. Patav. di Sc. Lett. e Arti, Classe di Sc. Mat. e Nat., vol. LXXVIII (1965-66), pp. 213-222.

[2] Gasparini I.: *Sopra una proprietà caratteristica dei sistemi isotropi*. Boll. U.M.I., s. II, anno V (1943), pp. 13-18.

[3] Grioli G.: *Mathematical Theory of Elastic Equilibrium (Recent Results)*, Ergeb. angew. Math. n. 7, Berlin, Springer (1962).

[4] Signorini A.: *Lezioni di fisica matematica*. Anno acc. 1952-53, Roma, Veschi (litografie).

[5] Signorini A.: *Trasformazioni termoelastiche finite*. Mem. 1ª, Ann. di Mat., s. IV, vol. XXII (1943) pp. 33-143.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 maggio 1966.