

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAMBERTO CATTABRIGA

**Complementi alla mia nota : su una classe  
di polinomi ipoellittici**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 37 (1967), p. 60-74

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_37\\_\\_60\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__60_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

COMPLEMENTI ALLA MIA NOTA:  
SU UNA CLASSE DI POLINOMI IPOELLITTICI

*di* LAMBERTO CATTABRIGA (*a Ferrara*) \*)

In una precedente nota [2] ho definito e studiato una nuova classe di polinomi ipoellittici chiamati  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittici ed un'altra classe, in questa contenuta, costituita da polinomi soddisfacenti ad una valutazione là indicata come condizione  $\bar{d}$ .

Nella presente nota si prova (n. 1) che ogni polinomio  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittico soddisfa alla condizione  $\bar{d}$ , onde le due classi di polinomi introdotte in [2] coincidono. Nel n. 2 è contenuto un completamento del teorema 1 di [2], utilizzato poi nel n. 3. In questo si esamina brevemente il caso particolare di polinomi chiamati fortemente  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittici, estendendo a questi alcuni risultati di G. C. Barozzi [1], relativi a polinomi fortemente quasi-ellittici.

Dopo che la mia nota [2] era stata inviata per la pubblicazione, è apparsa qui una breve nota di V. P. Michailov [5] nella quale è introdotta una classe di polinomi più generale di quella da me studiata in [2] ed apparentemente coincidente con quella dei polinomi multi-quasi-ellittici definiti da J. Friberg [3]. Una parte dei risultati della presente nota è contenuta in alcune affermazioni che si trovano enunciate in [5] senza alcun cenno di dimostrazione.

**I.** Sia  $\tilde{s} = (s_0, s) \in \mathcal{O}^{\nu+1}$ ,  $\nu \geq 1$ ;  $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0 \in \mathcal{C}$ ,  $\sigma_0, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ;  $s = \sigma + i\tau \in \mathcal{O}^\nu$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\nu)$ ,  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in \mathbb{R}^\nu$ ;  $s_k = \sigma_k + i\tau_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ ,  $\tilde{\sigma} = (\sigma_0, \sigma) \in \mathbb{R}^{\nu+1}$ . Sia  $P(\tilde{s}) = \sum_{\tilde{\alpha}} c_{\tilde{\alpha}} s^{\tilde{\alpha}}$ ,  $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_\nu) \in \mathbb{R}^{\nu+1}$ ,

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

un polinomio in  $\bar{s}$  a coefficienti complessi costanti che scriveremo anche nella forma  $P(\bar{s}) = P(s_0, s) = \sum_0^n s_0^{n-j} P_j(s)$  con  $P_j(s) = \sum_{\alpha} c_{j\alpha} s^{\alpha}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu}) \in R^{\nu}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , polinomi in  $s$  a coefficienti complessi costanti. Sia  $a_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ , il massimo esponente con cui  $s_k$  figura isolato in  $P(\bar{s})$ , ossia in  $P_n(s)$ .

Supporremo che

$$a) P_0(s) \equiv c_{00} \neq 0, \quad a_k > 0, \quad k = 1, \dots, \nu.$$

Sia  $a = \max_k a_k$  e poniamo  $q = (q_1, \dots, q_{\nu}) = (a/a_1, \dots, a/a_{\nu})$  e  $\langle q, \alpha \rangle = \sum_1^{\nu} q_k \alpha_k$ . Sia poi  $(P_j) = \{ \alpha \in R^{\nu}; c_{j\alpha} \neq 0 \}$ ,

$$m_j = \max_{\alpha \in (P_j)} \langle q, \alpha \rangle$$

il  $q$ -grado di  $P_j(s)$  e  $P'_j(s) = \sum_{\langle q, \alpha \rangle = m_j} c_{j\alpha} s^{\alpha}$ . Risulta  $m_0 = 0$  ed  $m_n \geq a$ . Supporremo che

$$b) m_j < m_n, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

È ben noto che l'ipotesi a) è soddisfatta se  $P$  è ipoellittico. Ciò accade anche per l'ipotesi b). Infatti, posto  $|s| = \sum_1^{\nu} |s_k|^{1/q_k}$  e per  $\sigma \neq 0$ ,  $\sigma'_k = \sigma_k |\sigma|^{-q_k}$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ ,  $\sigma' = (\sigma'_1, \dots, \sigma'_{\nu})$ , è

$$P_j(\sigma) = P_j(|\sigma|^{q\sigma'}) = |\sigma|^{m_j} P'_j(\sigma') + R_j(|\sigma|^{q\sigma'}), \quad j = 0, \dots, n,$$

con  $\lim_{|\sigma| \rightarrow +\infty} R_j(|\sigma|^{q\sigma'}) / |\sigma|^{m_j} = 0$ . D'altra parte se  $P$  è ipoellittico, osservato che  $\partial^{n-j} P(0, \sigma) / \partial \sigma_0^{n-j} = (n-j)! P_j(\sigma)$ ,

$$(1) \quad \frac{P_j(\sigma)}{P(0, \sigma)} = \frac{P_j(\sigma)}{P_n(\sigma)} = \frac{|\sigma|^{m_j - m_n} [P'_j(\sigma') + R_j(|\sigma|^{q\sigma'}) / |\sigma|^{m_j}]}{P'_n(\sigma') + R_n(|\sigma|^{q\sigma'}) / |\sigma|^{m_n}}$$

dovrà tendere a zero per  $\sum_1^{\nu} \sigma_k^2 \rightarrow +\infty$ . Ma è <sup>1)</sup>, qualunque sia  $\sigma'$  e per ogni  $j = 0, \dots, n-1$ .

$$|\sigma| \leq \sum_1^{\nu} (1/q_k |\sigma_k| - 1/q_k + 1) \leq \sum_1^{\nu} |\sigma_k| + \nu \leq \nu^{1/2} (\sum_1^{\nu} \sigma_k^2)^{1/2} + \nu^2$$

<sup>1)</sup> Si veda [4], p. 99.

<sup>2)</sup> Si utilizza la disuguaglianza  $x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0$ , vera per ogni  $x > 0$  se  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

e quindi, se

$$|\sigma| > 2\nu, \quad |\sigma| \leq 2\nu^{1/2} \left( \sum_k \sigma_k^2 \right)^{1/2}.$$

Per ogni fissato  $\sigma'$ ,  $|\sigma'| = 1$ , la (1) deve quindi tendere a zero per  $|\sigma| \rightarrow +\infty$  e perciò deve essere  $m_j < m_n$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Ciò vale anzi qualunque sia il vettore  $q$ , con  $q_k \geq 1$ . Le ipotesi a) e b) sono dunque soddisfatte da ogni polinomio ipoellittico  $P(\bar{s})$ .

Sia ora  $j_0 = 0$  e

$$p_h = \max_{j_h < j \leq n} \frac{m_j - m_{j_h}}{j - j_h}, \quad h = 0, \dots, r-1,$$

$$j_{h+1} = \max_{j_h < j \leq n} \{j; \quad m_j = m_{j_h} + p_h(j - j_h)\}, \quad h=0, \dots, r-1,$$

ove  $r$  è tale che  $j_r = n$ ,

$$m_{j_{h+1}} = m_{j_h} + p_h(j_{h+1} - j_h) = \sum_0^h p_i(j_{i+1} - j_i) = \max_{0 \leq j < j_{h+1}} m_j.$$

Risulta

$$p_0 > p_1 > \dots > p_{r-1} > 0, \quad 0 = j_0 < j_1 < \dots < j_r = n.$$

Per comodità di notazioni porremo  $p_{-1} = +\infty$  e  $p_r = 0$ . Sia infine

$$m_j^* = m_{j_h} + p_h(j - j_h), \quad j_h \leq j \leq j_{h+1}, \quad h = 0, \dots, r-1.$$

In [2] abbiamo osservato che per  $h = 1, \dots, r$  e  $j = 0, \dots, n$  è  $p_{h-1}(n-j) + m_j^* \leq p_{h-1}(n-j_h) + m_{j_h}$ , il segno eguale verificandosi soltanto per  $j = j_{h-1}, \dots, j_h$ . Per  $p \in (p_h, p_{h-1})$ ,  $h=0, \dots, r$ , è inoltre  $p(n-j) + m_j^* \leq p(n-j_h) + m_{j_h}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , il segno eguale verificandosi soltanto per  $j = j_h$ . Per  $p > 0$ , posto

$$\tilde{q}(p) = (q_0(p), q(p)) = (q_0(p), q_1(p), \dots, q_r(p)) = \begin{cases} (p, q) & \text{se } p \geq 1, \\ (1, q/p) & \text{se } p < 1, \end{cases}$$

il  $\tilde{q}(p)$ -grado del polinomio  $P(\tilde{s})$  è dunque  $\mu(p) = (p(n-j_h) + m_{j_h}) q_0(p)/p$  per  $p \in (p_h, p_{h-1}]$ ,  $h = 1, \dots, r$ , e per  $p > p_0$ ,  $h = 0$ . I termini di  $P(\tilde{s})$  aventi  $\tilde{q}(p)$ -grado eguale a  $\mu(p)$  sono quelli contenuti nei polinomi

$$s_0^{n-j_h} \tilde{P}_{h-1}(\tilde{s}) = s_0^{n-j_h} \sum_{\substack{j_h \\ j_{h-1}^* \\ m_j = m_j}} s_0^{j_h-j} P'_j(s) \quad \text{se } p = p_{h-1}, \quad h = 1, \dots, r,$$

e quelli contenuti nei polinomi

$$s_0^{n-j_h} P'_{j_h}(s) \quad \text{se} \quad p \in (p_h, p_{h-1}), \quad h = 0, \dots, r.$$

Da ciò segue facilmente il

LEMMA: *Se il polinomio  $P(\bar{s})$  soddisfa alle a) e b) risulta*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\mu(p)} P(t^{\bar{q}(p)} \bar{s}) = \begin{cases} s_0^{n-j_h} \tilde{P}_{h-1}(\bar{s}) & \text{se } p = p_{h-1}, \quad h=1, \dots, r, \\ s_0^{n-j_h} P'_{j_h}(s) & \text{se } p \in (p_h, p_{h-1}), \quad h=0, \dots, r, \end{cases}$$

uniformemente rispetto ad  $\bar{s}$  contenuto in insiemi limitati <sup>3)</sup>.

Contemporaneamente resta anche provato che

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\mu(p)} \sum_0^r |t^{q_i(p)} s_0|^{n-j_i} |t^{q_i(p)} s|^{m_i} = \\ = & \begin{cases} |s_0|^{n-j_{h-1}} |s|^{m_{j_{h-1}}} + |s_0|^{n-j_h} |s|^{m_{j_h}} & \text{se } p = p_{h-1}, \quad h=1, \dots, r, \\ |s_0|^{n-j_h} |s|^{m_{j_h}} & \text{se } p \in (p_h, p_{h-1}), \quad h=0, \dots, r, \end{cases} \end{aligned}$$

uniformemente rispetto ad  $\bar{s}$  contenuto in insiemi limitati.

Sia ora  $\beta = \inf_j \beta_j$ , con  $\beta_j = m_j^* - q$ -grado di  $(P_j(s) - P'_j(s))$  per gli  $j$  per cui  $m_j = m_j^*$  e  $\beta_j = m_j^* - m_j$  per gli  $j$  per cui  $m_j < m_j^*$ , e  $\gamma$  un numero positivo minore di  $1/2 \inf_{0 \leq h \leq r} (p_{h-1} - p_h)$ . Si vede facilmente che per  $p \in [p_{h-1} - \gamma, p_{h-1} + \gamma]$ ,  $h = 1, \dots, r$ , il  $\bar{q}(p)$ -grado dei polinomi  $P(\bar{s}) - s_0^{n-j_h} \tilde{P}_{h-1}(\bar{s})$  è minore di  $\mu(p) - \inf(\beta, \gamma)$ . Lo stesso accade del  $\bar{q}(p)$ -grado dei polinomi  $P(\bar{s}) - s_0^{n-j_h} P'_{j_h}(s)$ ,  $h = 0, \dots, r$ , se  $p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma)$ ,  $h = 0, \dots, r-1$  e  $p \in (0, p_{r-1} - \gamma)$ ,  $h = r$ .

Posto

$$A_p(\bar{s}) = \begin{cases} s_0^{n-j_h} \tilde{P}_{h-1}(\bar{s}) & \text{per } p \in [p_{h-1} - \gamma, p_{h-1} + \gamma], \quad h = 1, \dots, r, \\ s_0^{n-j_h} P'_{j_h}(s) & \text{per } p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma), \quad h=0, \dots, r-1, \\ & \text{e } p \in (0, p_{r-1} - \gamma), \quad h = r, \end{cases}$$

è quindi

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\mu(p)} [P(t^{\bar{q}(p)} \bar{s}) - A_p(t^{\bar{q}(p)} \bar{s})] = 0$$

uniformemente rispetto a  $p \in (0, +\infty)$  e ad  $\bar{s}$  contenuto in insiemi limitati. Analogamente, posto

<sup>3)</sup>  $(t^{q(p)} \bar{s}) = (t^{q_0(p)} s_0, \dots, t^{q_r(p)} s_r)$ . Analogamente nel seguito  $(t^{q(p)} s) = (t^{q_1(p)} s_1, \dots, t^{q_r(p)} s_r)$ . Questo lemma completa il lemma del n. 1 di [2].

$$B_p(\tilde{s}) = \begin{cases} |s_0|^{n-j_{h-1}} |s|^{m_{j_{h-1}}} + |s_0|^{n-j_h} |s|^{m_{j_h}} & \text{per } p \in [p_{h-1} - \gamma, p_{h-1} + \gamma], \quad h=1, \dots, r, \\ |s_0|^{n-j_h} |s|^{m_{j_h}} & \text{per } p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma), \quad h=0, \dots, r-1, \\ & p \in (0, p_{r-1} - \gamma), \quad h=r, \end{cases}$$

è

$$(3) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\mu(p)} \left[ \sum_0^r |t^{q_0(p)} s_0|^{n-j_i} |t^{q(p)} s|^{m_{j_i}} - B_p(t^{\vec{q}(p)} \tilde{s}) \right] = 0$$

uniformemente rispetto a  $p \in (0, +\infty)$  e ad  $\tilde{s}$  contenuto in insiemi limitati.

Supponiamo ora che  $P(\tilde{s})$  soddisfi anche alla

$$c) \quad \tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) \neq 0 \quad \forall \quad \tilde{\sigma} \in \Gamma = \{ \tilde{\sigma} \in R^{v+1}; \quad \sigma \in R^v - \{0\}, \quad \sigma_0 \in R \}, \\ h = 1, \dots, r.$$

In [2], posto  $\tilde{q}(p_h) = \tilde{q}^{(h)}$ ,  $h=0, \dots, r-1$ , abbiamo chiamato ( $\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)}$ ) *-quasi-ellettico* un polinomio  $P(\tilde{s})$  soddisfacente alle a), b), c). Per un tale polinomio risulta <sup>4)</sup>

$$| \tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) | \geq C | \sigma |^{m_{j_{h-1}}} ( | \sigma_0 |^{j_h - j_{h-1}} + | \sigma |^{m_{j_h} - m_{j_{h-1}}} ), \quad \forall \tilde{\sigma} \in R^{v+1}, \quad h = 1, \dots, r \\ | P'_{j_h}(\sigma) | \geq C | \sigma |^{m_{j_h}}, \quad \forall \sigma \in R^v, \quad h = 1, \dots, r$$

con  $C$  costante positiva <sup>5)</sup>, onde pure

$$| A_p(\tilde{\sigma}) | \geq C B_p(\tilde{\sigma}) \quad \forall \tilde{\sigma} \in R^{v+1} \quad \text{e} \quad \forall p \in (0, +\infty).$$

Se  $C_1 < C$ , per i  $\tilde{\sigma} \in R^{v+1}$  e i  $p \in (0, +\infty)$  tali che

$$(4) \quad C_1 \left| \sum_0^r | \sigma_0 |^{n-j_i} | \tilde{\sigma} |^{m_{j_i}} - B_p(\tilde{\sigma}) \right| + | A_p(\tilde{\sigma}) - P(\tilde{\sigma}) | \leq (C - C_1) B_p(\tilde{\sigma})$$

risulta quindi

$$C_1 \left| \sum_0^r | \sigma_0 |^{n-j_i} | \sigma |^{m_{j_i}} - B_p(\tilde{\sigma}) \right| + C_1 B_p(\tilde{\sigma}) \leq | A_p(\tilde{\sigma}) | - | A_p(\tilde{\sigma}) - P(\tilde{\sigma}) |$$

onde, per ogni  $\tilde{\sigma} \in R^{v+1}$  tale che per almeno un  $p \in (0, +\infty)$  sia sod-

<sup>4)</sup> Si veda [2], n. 4

<sup>5)</sup> Anche nel seguito, salvo esplicita indicazione, denoteremo con  $C, C_0, C_1, \dots, C', \dots$  delle costanti positive indipendenti dalle variabili che entrano nelle singole maggiorazioni, il cui valore potrà variare da formula a formula.

disfatta la (4),

$$(5) \quad |P(\tilde{\sigma})| \geq |A_p(\tilde{\sigma})| - |A_p(\tilde{\sigma}) - P(\tilde{\sigma})| \geq C_1 \sum_0^r |\sigma_0|^{n-j_i} |\sigma|^{m_{j_i}}.$$

Sia ora  $|s|_p = \sum_1^v |s_k|^{1/q_k(p)}$ ,  $p \in (0, +\infty)$ ;  $|\tilde{s}|_p = |s_0|^{1/q_0(p)} + |s|_p$   
 e se  $\tilde{\sigma} \neq 0$   $\sigma_k(p) = \sigma_k |\tilde{\sigma}|_p^{-q_k(p)}$ ,  $k = 0, \dots, v$ ,  $\tilde{\sigma}(p) = (\sigma_0(p), \sigma(p)) =$   
 $= (\sigma_0(p), \dots, \sigma_v(p))$ . È

$$(6) \quad |s|_p \leq |s|_p^{q_0(p)} \leq C(p) |s|_p^p$$

con  $C(p) = p^{q_0(p)-p}$  e

$$(6') \quad |s_0| + |s|_p \leq |\tilde{s}|_p^{q_0(p)} \leq 2^p p (|s_0| + |s|_p)^p,$$

$$|s_0|^{1/p} + |s| \leq |\tilde{s}|_p^{q_k(p)/q_k} = |\tilde{s}|_p^{q_0(p)/p} \leq \sup(1, (2^p)^{1/p-1}) (|s_0|^{1/p} + |s|);$$

inoltre  $|\tilde{\sigma}(p)|_p = 1 \forall \sigma \in R^{r+1} - \{0\}$  e  $\forall p \in (0, +\infty)$ .

I limiti (2) e (3) con  $\tilde{\sigma}(p)$  in luogo di  $\tilde{s}$  saranno uniformi rispetto a  $\sigma \in R^{r+1} - \{0\}$  e  $p \in (0, +\infty)$ . È poi

$$B_p(\tilde{\sigma}) = \begin{cases} |\tilde{\sigma}|_p^{\mu(p)} [|\sigma_0(p)|^{n-j_h} |\sigma(p)|^{m_{j_h}} + |\tilde{\sigma}|_p^{-(p_{h-1}-p)(j_h-j_{h-1})} |\sigma_0(p)|^{n-j_{h-1}} |\sigma(p)|^{m_{j_{h-1}}}] \\ \quad \text{se } p \in [p_{h-1} - \gamma, p_{h-1}], \quad h = 1, \dots, r, \\ |\tilde{\sigma}|_p^{\mu(p)} [|\sigma_0(p)|^{n-j_{h-1}} |\sigma(p)|^{m_{j_{h-1}}} + |\tilde{\sigma}|_p^{-(p-p_{h-1})(j_h-j_{h-1})} |\sigma_0(p)|^{n-j_h} |\sigma(p)|^{m_{j_h}}] \\ \quad \text{se } p \in [p_{h-1}, p_{h-1} + \gamma], \quad h = 1, \dots, r, \end{cases}$$

$$B_p(\tilde{\sigma}) = |\tilde{\sigma}|_p^{\mu(p)} |\sigma_0(p)|^{n-j_h} |\sigma(p)|^{m_{j_h}}$$

se

$$p \in (p_h + \gamma, p_{h-1} - \gamma), \quad h = 0, \dots, r-1, \quad p \in (0, p_{r-1} - \gamma), \quad h=r.$$

Se per un  $\delta \in (0, 1)$  è soddisfatta una delle

$$(7) \quad \begin{array}{ll} |\sigma_0(p)| > \delta & \text{se } p \geq p_0, \\ |\sigma_0(p)| > \delta \text{ e } |\sigma(p)| > \delta & \text{se } p \in (p_{r-1}, p_0), \\ |\sigma(p)| > \delta & \text{se } p \in (0, p_{r-1}], \end{array}$$

è allora

$$B_p(\tilde{\sigma}) \geq C_2 |\tilde{\sigma}|_p^{\mu(p)},$$

con  $C_2$  dipendente soltanto da  $\delta$ . Scelto  $C_1 = C/2$ , i  $\sigma \in R^{r+1} - \{0\}$  e  $p \in (0, +\infty)$  per cui è soddisfatta una delle (7) verificheranno quindi anche la (4) se

$$(8) \quad C/2 \left| \tilde{\sigma} \Big|_p^{-\mu(p)} \left| \sum_{i=1}^r \left| \tilde{\sigma} \Big|_p^{q_i(p)} \sigma_0(p) \right|^{n-j_i} \left| \tilde{\sigma} \Big|_p^{q_i(p)} \sigma(p) \right|^{m_j} \right. \\ \left. - B_p(|\tilde{\sigma} \Big|_p^{q(p)} \tilde{\sigma}(p)) \right| + \left| \tilde{\sigma} \Big|_p^{-\mu(p)} \left| A_p(|\tilde{\sigma} \Big|_p^{q(p)} \tilde{\sigma}(p)) - P(|\tilde{\sigma} \Big|_p^{q(p)} \tilde{\sigma}(p)) \right| \leq C_2 C/2 .$$

Ciò accade non appena  $|\tilde{\sigma} \Big|_p$  è sufficientemente grande,  $|\tilde{\sigma} \Big|_p > L$ , con  $L$  dipendente soltanto da  $\delta$ . La (5) varrà dunque per ogni  $\tilde{\sigma} \in R^{r+1} - \{0\}$  tale che per almeno un  $p > 0$  valga una delle (7) e sia  $|\tilde{\sigma} \Big|_p > L$ . Mostriamo che esiste una costante positiva  $C_0$  tale che ciò si verifica per ogni  $\tilde{\sigma}$  con  $|\sigma_0| + |\sigma| \geq C_0$ .

Dalla (6') segue

$$C'(p) \frac{|\sigma_0|}{|\sigma_0| + |\sigma|^p} \leq |\sigma_0(p)| \leq \frac{|\sigma_0|}{|\sigma_0| + |\sigma|^p} , \\ C''(p) \frac{|\sigma|}{|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|} \leq |\sigma(p)| \leq \frac{|\sigma|}{|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|} ,$$

con  $C'(p) = 2^{-p} \nu^{-1}$  e  $C''(p) = \inf(1, (2\nu)^{-1/p+1})$ ,  $\forall \tilde{\sigma} \in R^{r+1} - \{0\}$  e  $p > 0$ . Per  $\delta < C'(p)$  è quindi  $|\sigma_0(p)| > \delta$ , se  $|\sigma| < |\sigma_0|^{1/p} (C'(p)/\delta - 1)^{1/p}$ ; per  $\delta < C''(p)$  è  $|\sigma(p)| > \delta$ , se  $|\sigma| > |\sigma_0|^{1/p} (C''(p)/\delta - 1)^{-1}$ .

Sia ora  $p \in [p_{r-1}, p_0]$ ,  $2\delta < \inf(C'(p_0), C''(p_{r-1}))$  e  $|\sigma_0| + |\sigma| > 0$ . Se  $|\sigma| < |\sigma_0|^{1/p_0} (C'(p_0)/\delta - 1)^{1/p_0}$  è dunque  $|\sigma_0(p_0)| > \delta$ ; se invece  $|\sigma| \geq |\sigma_0|^{1/p_0} (C'(p_0)/\delta - 1)^{1/p_0}$  allora o è anche  $|\sigma| > |\sigma_0|^{1/p_{r-1}} (C''(p_{r-1})/\delta - 1)^{-1}$  nel quale caso risulta  $|\sigma(p_{r-1})| > \delta$ , oppure è  $|\sigma| \leq |\sigma_0|^{1/p_{r-1}} (C''(p_{r-1})/\delta - 1)^{-1}$ . Il primo caso si presenta sempre se  $|\sigma_0| \leq 1$ ; nel secondo riuscendo  $|\sigma_0| > 1$  e  $|\sigma| / |\sigma_0|^{1/p}$  funzione continua e crescente di  $p$  in  $[p_{r-1}, p_0]$ , esiste certamente un  $p \in (p_{r-1}, p_0)$  tale che  $(C''(p_{r-1})/\delta - 1)^{-1} < |\sigma| / |\sigma_0|^{1/p} < (C'(p_0)/\delta - 1)^{1/p_0}$  e quindi tale che  $(C''(p)/\delta - 1)^{-1} < |\sigma| / |\sigma_0|^{1/p} < (C'(p)/\delta - 1)^{1/p}$  poichè per  $p \in (p_{r-1}, p_0)$  è  $C''(p) > C''(p_{r-1})$  e  $C'(p_0) < C'(p)$ . Per ogni  $\tilde{\sigma} \in R^{r+1}$  con  $|\sigma_0| + |\sigma| > 0$  è dunque sempre verificata una delle (7) per almeno un  $p \in [p_{r-1}, p_0]$ .

Osserviamo ora che se  $p \geq 1$

$$|\tilde{\sigma} \Big|_p = |\sigma_0|^{1/p} + |\sigma| \geq |\sigma_0|^{1/p} + p |\sigma|^{1/p} + 1 - p ,$$



onde se  $|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|^{1/p} \geq p$ , per  $p \in [p_{r-1}, p_0]$  è

$$|\tilde{\sigma}|_p \geq 1/p(|\sigma_0|^{1/p} + |\sigma|^{1/p}) \geq 1/p_0(|\sigma_0| + |\sigma|)^{1/p_0}.$$

Se  $p < 1$ , per (6) è

$$|\tilde{\sigma}|_p \geq |\sigma_0| + |\sigma|^p \geq 1/p|\sigma_0|^p + |\sigma|^p + 1 - 1/p$$

e quindi se  $|\sigma_0|^p + |\sigma|^p \geq 1/p$ , per  $p \in [p_{r-1}, p_0]$  è

$$|\tilde{\sigma}|_p \geq p(|\sigma_0|^p + |\sigma|^p) \geq p_{r-1}(|\sigma_0| + |\sigma|)^{p_{r-1}}.$$

Pertanto se  $|\sigma_0| + |\sigma| > \sup(p_0^*, p_{r-1}^{-1/p_{r-1}})$  risulta

$$|\tilde{\sigma}|_p \geq \kappa(|\sigma_0| + |\sigma|)^\kappa, \quad \forall p \in [p_{r-1}, p_0],$$

con  $\kappa = \inf(1/p_0, p_{r-1})$ , onde sarà  $|\tilde{\sigma}|_p > L \forall p \in [p_{r-1}, p_0]$  se  $|\sigma_0| + |\sigma| > (L/\kappa)^{1/\kappa}$ . Per tali  $\tilde{\sigma}$  è quindi verificata la (8). Posto  $C_0 = \sup(p_0^*, p_{r-1}^{-1/p_{r-1}}, (L/\kappa)^{1/\kappa})$  resta così provato il

TEOREMA 1: Se  $P(\tilde{s})$  soddisfa alle a), b), c) esistono due costanti positive  $C_0$  e  $C_1$  tali che per ogni  $\tilde{\sigma} \in \mathbb{R}^{r+1}$  con  $|\sigma_0| + |\sigma| \geq C_0$  è

$$|P(\tilde{\sigma})| \geq C_1 \sum_h^r |\sigma_0|^{n-j_h} |\sigma|^{m_{j_h}},$$

cioè: se  $P$  è  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittico esso soddisfa alla d) di [2].

Da questo risultato e da quanto esposto in [2] \*) segue facilmente il

COROLLARIO: Se  $P$  è  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ -quasi ellittico esso è più forte <sup>?)</sup> di ogni polinomio  $Q(\tilde{s}) = \sum_0^n s_0^{n-j} Q_j(s)$ , tale che i polinomi  $Q_j$  abbiano  $q$ -grado non superiore ad  $m_j$ ,  $j = 0, \dots, n$ ; in particolare  $P$  e  $P'(\tilde{s}) = \sum_0^n s_0^{n-j} P'_j(s)$  sono egualmente forti.

$m_j = m_j^*$

\*) Si veda la prima parte del n. 4.

?) Nel senso definito in [4].

**2.** Come in [2] poniamo  $q_k(p_h) = q_k^{(h)}$ ,  $h = 0, \dots, r-1$ ;  $k = 0, \dots, \nu$ . Per  $i = 1, \dots, \nu$ , sia  $s^{(i)} = (s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_\nu) \in C^\nu$ ,  $|s^{(i)}|_h = \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k|^{1/q_k^{(h)}}$  e, per  $s^{(i)} \neq 0$ ,  $s'_k = s_k |s^{(i)}|_h^{-q_k^{(h)}}$ ,  $k = 0, \dots, i-1, i+1, \dots, \nu$ ,  $s^{(i)'} = (s'_0, \dots, s'_{i-1}, s'_{i+1}, \dots, s'_\nu)$ . Con  $\sigma^{(i)}$  e  $\tau^{(i)}$ ,  $\sigma'_k$  e  $\tau'_k$ ,  $\sigma^{(i)'}$  e  $\tau^{(i)'}$  indichiamo rispettivamente le parti reali ed i coefficienti dell'immaginario di  $s^{(i)}$ ,  $s'_k$  e  $s^{(i)'}$ . È sempre  $|s^{(i)'}|_h = 1$ .

Supponiamo che  $P(\tilde{s})$  soddisfi alle *a*), *b*), *c*). Tutti i polinomi  $P_{j_h}$ ,  $h = 1, \dots, r$ , sono allora  $q$ -quasi-ellittici, onde tutti i numeri  $m_{j_h}/q_k$ ,  $h = 1, \dots, r$ ;  $k = 1, \dots, \nu$ , sono interi positivi. I polinomi in  $\lambda$

$$(9) \quad \tilde{P}_{h-1}(s'_0, \dots, s'_{i-1}, \lambda, s'_{i+1}, \dots, s'_\nu), \quad h = 1, \dots, r,$$

hanno dunque grado  $m_{j_h}/q_i$  qualunque sia  $s^{(i)'}$ . Per  $\tau^{(i)'} = 0$ ,  $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_{i-1}, \sigma'_{i+1}, \dots, \sigma'_\nu) \in R^{\nu-1} - \{0\}$  tali polinomi hanno tutti gli zeri con parte immaginaria non nulla qualunque sia  $\sigma'_0 \in R$ . Se invece  $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_{i-1}, \sigma'_{i+1}, \dots, \sigma'_\nu) = 0$  i polinomi (9) hanno  $m_{j_{h-1}}/q_i$  zeri nulli qualunque sia  $\sigma'_0 \in R$ , che ora è necessariamente diverso da zero, ed i rimanenti zeri con parte immaginaria non nulla. Ognuno dei polinomi (9) ha dunque per  $\tau^{(i)'} = 0$   $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$  zeri con parte immaginaria non nulla qualunque sia  $\sigma^{(i)'}$ . Per essi riuscirà

$$|\operatorname{Im} \lambda(\sigma^{(i)'})| > 4\delta', \quad \forall \sigma^{(i)'},$$

con  $\delta'$  costante positiva. Per ogni  $s^{(i)'}$  con  $|\tau^{(i)'}|_h$  sufficientemente piccolo,  $|\tau^{(i)'}|_h < \varepsilon'$ , ognuno dei polinomi (9) ha quindi  $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$  zeri tali che

$$|\operatorname{Im} \lambda(s^{(i)'})| > 2\delta'.$$

Dal lemma del n. 1 segue che per ogni  $s^{(i)'}$  fissato è

$$(10) \quad \lim_{|s^{(i)}|_{h-1} \rightarrow \infty} |s^{(i)}|_{h-1}^{-\mu(p_{h-1})} P(s'_0 |s^{(i)}|_{h-1}^{q_0^{(h-1)}}, \dots, s'_{i-1} |s^{(i)}|_{h-1}^{q_{i-1}^{(h-1)}}, \lambda |s^{(i)}|_{h-1}^{q_i^{(h-1)}}, s'_{i+1} |s^{(i)}|_{h-1}^{q_{i+1}^{(h-1)}}, \dots, s'_\nu |s^{(i)}|_{h-1}^{q_\nu^{(h-1)}}) = s_0'^{n-j_h} \tilde{P}_{h-1}(s'_0, \dots, s'_{i-1}, \lambda, s'_{i+1}, \dots, s'_\nu),$$

$$h = 1, \dots, r,$$

uniformemente rispetto ad  $s^{(i)'}$ . Per  $h = r$  i due polinomi in  $\lambda$  a primo ed a secondo membro di (10) sono entrambi di grado  $m_n/q_i$ , qualunque sia  $s^{(i)'}$ . Per  $|s^{(i)}|_{r-1} \rightarrow +\infty$ ,  $s^{(i)'}$  fissato, gli zeri del polinomio a primo

membro tendono a quelli del polinomio a secondo membro uniformemente rispetto ad  $s^{(i)'}$ . Per gli zeri di  $P(\vec{s})$ , considerato come polinomio in  $s_i$ , risulta quindi

$$(11) \quad |s_i(s^{(i)})| \leq C' |s^{(i)}|_{r-1}^{q_i^{(r-1)}} \leq C(|s_0|^{q_i/p_{r-1}} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^v |s_k|^{q_i/q_k})$$

per  $|s^{(i)}|_{r-1}$  sufficientemente grande; inoltre per  $(m_n - m_{j_{r-1}})/q_i$  di tali zeri è

$$(12) \quad |\text{Im } s_i(s^{(i)})| > \delta' \left( \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^v |s_k|^{1/q_k^{(r-1)}} \right)^{q_i^{(r-1)}} > C_1 \delta' (|s_0|^{q_i/p_{r-1}} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^v |s_k|^{q_i/q_k})$$

per  $|s^{(i)}|_{r-1}$  sufficientemente grande e  $|\tau^{(i)}|_{r-1} < \varepsilon' |s^{(i)}|_{r-1}$ , mentre gli altri  $m_{j_{r-1}}/q_i$  tendono a zero per  $|s^{(i)}|_{r-1} \rightarrow +\infty$  se  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_v) = 0$ . Per  $h < r$  ed  $s_0 \neq 0$ , il polinomio in  $\lambda$  a secondo membro di (10) ha effettivamente grado  $m_{j_h}/q_i$ , mentre i coefficienti delle potenze di  $\lambda$  di esponente  $> m_{j_h}/q_i$  e  $< m_{j_{h-1}}/q_i$  del polinomio a primo membro tendono a zero per  $|s^{(i)}|_{h-1} \rightarrow +\infty$ . Ragionando come in [2]<sup>8)</sup>, si vede allora che il polinomio in  $\lambda$  a primo membro di (10) ha  $(m_n - m_{j_h})/q_i$  zeri il cui modulo tende all'infinito per  $|s^{(i)}|_{h-1} \rightarrow +\infty$ ,  $s_0 \neq 0$  e i restanti  $m_{j_h}/q_i$  che tendono agli zeri del polinomio in  $\lambda$  a secondo membro. Vi sono dunque  $m_{j_{h-1}}/q_i$  zeri di  $P(\vec{s})$ , considerato come polinomio in  $s_i$ , che tendono a zero per  $|s^{(i)}|_{h-1} \rightarrow +\infty$ ,  $s_0 \neq 0$ ,  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_v) = 0$  ed  $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$  zeri tali che

$$|\text{Im } s_i(s^{(i)})| > C_1 \delta' (|s_0|^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^v |s_k|^{q_i/q_k})$$

$\forall s^{(i)} \in C^v$  con  $s_0 \neq 0$ ,  $|\tau^{(i)}|_{h-1} < \varepsilon' |s^{(i)}|_{h-1}$ ,  $|s^{(i)}|_{h-1}$  sufficientemente grande e

$$|s_i(s^{(i)})| \leq C (|s_0|^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^v |s_k|^{q_i/q_k})$$

per  $|s^{(i)}|_{h-1}$  sufficientemente grande,  $s_0 \neq 0$ . Se  $s_0 = 0$ , considerando la (10) per  $h = r$  e ragionando come qui sopra si vede che  $P(\vec{s})$ , considerato come polinomio in  $s_i$ , ha  $m_n/q_i$  zeri che soddisfano alle (11) e (12).

<sup>8)</sup> Si veda la nota <sup>4)</sup>.

Tenuto conto che

$$\left( \sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k| \right)^{\nu} - C_1 \leq \sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k|^{1/q_k^{(h)}} \leq \sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k| + C_2$$

$\gamma = \inf_{h,k} (1/q_k^{(h)})$ , vale dunque il

**TEOREMA 2:** Se  $P$  è  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittico, allora per ogni  $i = 1, \dots, \nu$ , esso ha  $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$ ,  $h = 1, \dots, r$ , zeri  $s_i(s^{(i)})$  tali che

$$|s_i(s^{(i)})| \leq C(|s_0|^{a_i/\nu_{h-1}} + \sum_{\substack{1 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k|^{a_i/a_k}),$$

per ogni  $s^{(i)}$  con  $\sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k| > L$  e

$$|\operatorname{Im} s_i(s^{(i)})| > \delta(|s_0|^{a_i/\nu_{h-1}} + \sum_{\substack{1 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k|^{a_i/a_k}),$$

per ogni  $s^{(i)}$  con  $\sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |\tau_k| < \varepsilon \sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |\sigma_k|$ ,  $\sum_{\substack{0 \\ k \neq i}}^{\nu} |s_k| > L$ ;  $C, \delta, \varepsilon, L$  costanti positive.

**3.** Chiameremo *fortemente*  $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, q^{(r-1)})$ -quasi-ellittico un polinomio  $P(\tilde{s})$  soddisfacente alle a), b), e

$$c') \quad \operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) \neq 0, \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Gamma = \{\tilde{\sigma} \in R^{\nu+1}; \quad \sigma \in R^{\nu} - \{0\}, \quad \sigma_0 \in R\},$$

$$h = 1, \dots, r,$$

$$\operatorname{Re} c_{00} \neq 0.$$

In tal caso risulta

$$\operatorname{Re} \tilde{P}_0(\tilde{\sigma}) = \sum_{\substack{j_1 \\ m_j = m^*}}^{\tilde{j}_1} \sigma_0^{j_1-j} \operatorname{Re} P'_j(\sigma) \neq 0, \quad \forall \tilde{\sigma} \in R^{\nu+1} - \{0\},$$

onde  $\operatorname{Re} \tilde{P}_0(\tilde{\sigma})$  ha sempre lo stesso segno in  $R^{\nu+1} - \{0\}$ .  $\tilde{P}_0$  è allora fortemente quasi-ellittico e quindi i numeri  $j_1$  e  $m_{j_1}/q_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ , sono tutti pari;  $\operatorname{Re} \tilde{P}_0(\tilde{\sigma})$  ha in  $R^{\nu+1} - \{0\}$  lo stesso segno di  $\operatorname{Re} c_{00}$ .

Anche  $P_{j_1}$  è fortemente quasi-ellittico e  $\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)$  ha in  $R^r - \{0\}$  lo stesso segno di  $\operatorname{Re} \tilde{P}_0(\vec{\sigma})$ .

Per  $\nu \geq 2$   $\Gamma$  è connesso, onde ciascuna delle  $\operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(\vec{\sigma})$ ,  $h = 2, \dots, r$ , conserverà ivi sempre lo stesso segno. D'altra parte per  $j = j_1 + 1, \dots, j_2$ , è

$$\left| \frac{\operatorname{Re} P'_j(\sigma)}{\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)} \right| \leq C |\sigma|^{m_j^* - m_{j_1}}, \quad m_j^* > m_{j_1},$$

e quindi

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} \tilde{P}_1(\vec{\sigma})}{\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)} = \sigma_0^{j_2 - j_1}, \quad \forall \sigma_0 \in R.$$

$\sigma_0^{j_2 - j_1}$  deve quindi avere sempre lo stesso segno per ogni  $\sigma_0 \in R - \{0\}$ , onde anche  $j_2$  deve essere pari.  $\operatorname{Re} \tilde{P}_1(\vec{\sigma})$  ha dunque in  $\Gamma$  lo stesso segno di  $\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)$  ossia quello di  $\operatorname{Re} c_{00}$ . Di questo stesso segno sarà anche  $\operatorname{Re} P'_{j_2}(\sigma) = \operatorname{Re} \tilde{P}_1(0, \sigma)$  per ogni  $\sigma \in R^r - \{0\}$ .  $P_{j_2}$  è perciò fortemente quasi-ellittico e quindi i numeri  $m_{j_2}/q_k$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ , sono tutti pari.

Se  $\nu = 1$ , ognuna delle  $\operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(\vec{\sigma})$ ,  $h = 2, \dots, r$ , conserverà lo stesso segno in ciascuno dei due semipiani  $\sigma > 0$  e  $\sigma < 0$ . È ancora

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re} \tilde{P}_1(\vec{\sigma})}{\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)} = \sigma_0^{j_2 - j_1},$$

onde  $j_2$  deve essere ancora pari.  $\operatorname{Re} \tilde{P}_1(\vec{\sigma})$  ha quindi lo stesso segno di  $\operatorname{Re} P'_{j_1}(\sigma)$ , ossia ancora quello di  $\operatorname{Re} c_{00}$ , sia per  $\sigma > 0$  che per  $\sigma < 0$ . Si giunge così anche in questo caso alle stesse conclusioni del caso  $\nu \geq 2$ , ove soltanto si ponga  $q = q_1 = 1$ .

Allo stesso modo si ragiona sugli altri polinomi  $\tilde{P}_{h-1}(\vec{\sigma})$ .

Sul polinomio  $\operatorname{Re} P(\vec{\sigma})$  si possono ripetere i ragionamenti che provano il teorema 1. Vale dunque il

**TEOREMA 3:** *Se  $P$  è fortemente  $(\vec{q}^{(0)}, \dots, \vec{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittico tutte le  $\operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(\vec{\sigma})$ ,  $h = 1, \dots, r$ , hanno in  $\Gamma$  lo stesso segno di  $\operatorname{Re} c_{00}$ ; di tale segno sono pure le  $\operatorname{Re} P'_{j_h}(\sigma)$ ,  $h = 1, \dots, r$ , in  $R^r - \{0\}$ , cioè i polinomi  $P_{j_h}$  sono tutti fortemente quasi-ellittici, ed i numeri  $j_h$  e  $m_{j_h}/q_k$ ,  $h = 1, \dots, r$ ;  $k = 1, \dots, \nu$ , sono tutti pari. Inoltre per ogni  $\vec{\sigma} \in R^{r+1}$  con  $|\sigma_0| + |\sigma| \geq C_0$*

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} P(\vec{\sigma}) \geq C_1 \sum_0^r \sigma_0^{n-h} \sum_1^\nu \sigma_k^{m_{j_h}/q_k}.$$

Osserviamo che indicato con  $a_{hk}$  il coefficiente di  $s_k^{m_j h / q_k}$ ,  $k = 1, \dots, \nu$ , in  $P'_k$ ,  $h = 1, \dots, r$ , anche le  $\operatorname{Re} a_{hk}$  hanno tutte lo stesso segno di  $\operatorname{Re} c_{00}$ . Anche il polinomio

$$\Pi(\tilde{s}) = c_{00} s_0^n + \sum_1^r s_0^{n-j_h} \sum_1^\nu a_{hk} s_k^{m_j h / q_k} = \Pi_0(s) s_0^n + \sum_1^r s_0^{n-j_h} \Pi_h(s)$$

soddisfa quindi alle a), b), c') onde per il corollario del teorema 1 i polinomi  $P$ ,  $P'$  e  $\Pi$  sono tutti egualmente forti.

Per  $t \in [0, 1]$  e  $h = 1, \dots, r$  poniamo ora

$$\tilde{P}_{h-1}(t; \tilde{s}) = s_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(s) + \Pi_h(s) + t[\tilde{P}_{h-1}(s) - s_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(s) - \Pi_h(s)].$$

Da

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) > 0 \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Gamma, \quad h = 1, \dots, r,$$

e

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} \Pi_h(\sigma) > 0 \quad \forall \sigma \in R^\nu - \{0\}, \quad h = 0, \dots, r,$$

segue che se

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} [\tilde{P}_{h-1}(\tilde{\sigma}) - \sigma_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(\sigma) - \Pi_h(\sigma)] < 0,$$

allora il suo modulo è necessariamente minore di

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} [\sigma_0^{j_h - j_{h-1}} \Pi_{h-1}(\sigma) + \Pi_h(\sigma)].$$

È dunque

$$\operatorname{Re} c_{00} \cdot \operatorname{Re} \tilde{P}_{h-1}(t; \tilde{\sigma}) > 0, \quad \forall \tilde{\sigma} \in \Gamma \quad \text{e} \quad \forall t \in [0, 1], \quad h = 1, \dots, r.$$

Per ogni  $\sigma \in R^\nu - \{0\}$  i polinomi in  $\lambda$   $P_{h-1}(t; \lambda, \sigma)$  abbiano  $n_{0, h-1}^+(t)$  zeri con coefficiente dell'immaginario positivo ed  $n_{0, h-1}^-(t)$  zeri con coefficiente dell'immaginario negativo. È  $n_{0, h-1}^+(t) + n_{0, h-1}^-(t) = j_h - j_{h-1}$ . Per  $\nu \geq 2$  i numeri  $n_{0, h-1}^+(t)$  ed  $n_{0, h-1}^-(t)$  non dipendono da  $\sigma \in R^\nu - \{0\}$  essendo questo insieme connesso in  $R^\nu$ . Tali numeri non dipendono neppure da  $t$ , poichè per ogni  $t \in [0, 1]$  nessuno dei polinomi considerati può avere zeri reali. È dunque

$$(13) \quad n_{0, h-1}^+(1) = n_{0, h-1}^+(0) = (j_h - j_{h-1})/2 = n_{0, h-1}^-(0) = n_{0, h-1}^-(1).$$

Secondo quanto è stato provato al n. 2, qualunque sia  $t \in [0, 1]$  i polinomi in  $\lambda \tilde{P}_{h-1}(t; \sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \lambda, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu)$   $i = 1, \dots, \nu$ ;  $h = 1, \dots, r$ , hanno sempre  $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/q_i$  zeri con parte immaginaria non nulla per ogni  $\sigma^{(i)} \in R^\nu - \{0\}$  ed  $m_{j_{h-1}}/q_i$  zeri con parte immaginaria non nulla se  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu) \in R^{\nu-1} - \{0\}$ , nulli per  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu) = 0$ . Siano  $n_{i, h-1}^+(t)$  ed  $n_{i, h-1}^-(t)$  quelli fra i primi con coefficiente dell'immaginario rispettivamente positivo e negativo. Se  $\nu \geq 2$  tali numeri non dipendono da  $\sigma^{(i)} \in R^\nu - \{0\}$  poichè altrimenti essendo tale insieme connesso in  $R^\nu$  il polinomio considerato avrebbe o uno zero reale per un  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu) \in R^{\nu-1} - \{0\}$ , o uno zero reale non nullo per  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu) = 0, \sigma_0 \neq 0$ , oppure un ulteriore zero nullo per  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu) = 0, \sigma_0 = 0$ . Essi non dipendono neppure da  $t$  poichè altrimenti fissato un  $\sigma^{(i)} \in R^\nu - \{0\}$  con  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu) \neq 0$ , vi sarebbe un  $t \in [0, 1]$  in corrispondenza al quale il polinomio in  $\lambda \tilde{P}_{h-1}(t; \sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, \lambda, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu)$  avrebbe uno zero reale. È quindi

$$(14) \quad n_{i, h-1}^+(1) = n_{i, h-1}^+(0) = n_{i, h-1}^-(0) = n_{i, h-1}^-(1) = (m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/2q_i .$$

Se  $\nu = 1$  ciascuno dei polinomi  $\tilde{P}_{h-1}(t; \bar{s})$  è divisibile per  $s_1^{m_{j_h-1}/q_1}$  ed i polinomi  $Q'_{h-1}(t; \bar{\sigma}) = \sigma_1^{-m_{j_h-1}/q_1} \tilde{P}_{h-1}(t; \bar{\sigma})$  sono tutti fortemente quasi-ellittici. La validità delle (13) e (14) è allora caso particolare di un risultato di G. C. Barozzi [1] <sup>9)</sup>.

Ricordando il teorema 2 ed il teorema 1 di [2] si conclude che

**TEOREMA 4:** *Se  $P$  è fortemente  $(\bar{q}^{(0)}, \dots, \bar{q}^{(r-1)})$ -quasi-ellittico il polinomio  $P(s_0, \sigma)$  ha per  $h = 1, \dots, r$ ,  $(j_h - j_{h-1})/2$  zeri  $s_0(\sigma)$  con*

$$\text{Im } s_0(\sigma) > \delta | \sigma |^{p_{h-1}} ,$$

ed altrettanti con

$$\text{Im } s_0(\sigma) < - \delta | \sigma |^{p_{h-1}} ,$$

per  $\sum_{k=1}^{\nu} |\sigma_k| > L$  e ciascuno dei polinomi  $P(\sigma_0, \dots, \sigma_{i-1}, s_i, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_\nu)$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ ,  $(m_{j_h} - m_{j_{h-1}})/2q_i$  zeri  $s_i(\sigma^{(i)})$  con

$$\text{Im } s_i(\sigma^{(i)}) > \delta ( | \sigma_0 |^{q_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{\nu} |\sigma_k|^{q_i/q_k} )$$

---

<sup>9)</sup> Tale risultato, che riguarda il caso di polinomi fortemente quasi-ellittici in un numero qualunque di variabili, è provato con ragionamenti simili a quelli tenuti qui sopra.

ed altrettanti con

$$\operatorname{Im} s_i(\sigma^{(i)}) < -\delta(|\sigma_0|^{a_i/p_{h-1}} + \sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^p |\sigma_k|^{a_i/a_k}), \quad h = 1, \dots, r,$$

per  $\sum_{\substack{k \\ k \neq i}}^p |\sigma_k| > L$ ;  $L$  e  $\delta$  costanti positive.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] BAROZZI G. C.: *Sul multi-indice degli operatori quasi-ellittici*, Boll. U.M.I., (3), 19, 1964.
- [2] CATTABRIGA L.: *Su una classe di polinomi ipoellittici*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 36, 1966.
- [3] FRIBERG J.: *Asymptotic behaviour of spectral functions for multi quasi-elliptic differential operators*. Conferenza tenuta il 2 agosto 1965 al « Séminaire de Mathématiques Supérieures » dell'Università di Montréal.
- [4] HÖRMANDER L.: *Linear partial differential operators*, Springer, 1963.
- [5] MICHAILOV V. P.: *Sul comportamento all'infinito di una certa classe di polinomi*, Doklady Akad. Nauk SSSR, 164, n. 3, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 gennaio 1966.