Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

V. Fedri

Sugli amalgami di p-gruppi finiti non immergibili in un p-gruppo finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 98-103

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__98_0>

SUGLI AMALGAMI DI P-GRUPPI FINITI NON IMMERGIBILI IN UN P-GRUPPO FINITO

di V. FEDRI (*a Firenze*) *)

Graham Higman [1] ha dato una condizione necessaria e sufficiente perchè l'amalgama di 2 p-gruppi finiti sia immergibile in un p-gruppo finito.

Nella seguente nota, tenendo conto della suddetta condizione, si trova (§ 1) l'esempio « minimo » di amalgama di 2 p-gruppi non immergibile in un p-gruppo finito, intendendo per esempio « minimo » quello relativo a 2 p-gruppi A e B, di ordine il più piccolo possibile compatibile con le nostre ipotesi.

Si dà, inoltre (§ 2), la definizione di amalgama di 2 p-gruppi A e B, costruito a partire da un isomorfismo φ di un sottogruppo U di A su un sottogruppo V di B, cioè, dell'amalgama dei 2 p-gruppi A e B ottenuto identificando gli elementi di U e V corrispondenti in φ; a seconda dell'isomorfismo posto tra U e V si ottengono amalgami diversi che possono essere, o meno, immergibili in un p-gruppo finito; si dimostra, però, che sotto particolari ipotesi ($U \lhd A$ e $V \lhd B$, oppure, U e V abeliani elementari) esiste sicuramente almeno un isomorfismo di U su V, tale che l'amalgama corrispondente sia immergibile in un p-gruppo finito. Infine si trova l'esempio « minimo » (« minimo » nel senso sopradetto) di insieme di 2 p-gruppi A e B, dotati di 2 sottogruppi U e V tra loro isomorfi, tale che nessun amalgama costruito a partire da un qualche isomorfismo di U su V, sia immergibile in un p-gruppo finito.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

1. DEFINIZIONE 1: Si chiama *amalgama* AUB un insieme costituito da 2 gruppi A e B aventi a comune un sottogruppo $U = A \cap B$.

DEFINIZIONE 2: Dati 2 amalgami AUB e $\overline{A}\overline{U}\overline{B}$ si chiama *isomorfismo* di AUB su $\overline{A}\overline{U}\overline{B}$ un'applicazione biunivoca φ di AUB su $\overline{A}\overline{U}\overline{B}$ tale che $\varphi(A) = \overline{A}$, $\varphi(B) = \overline{B}$ e se x e y appartengono entrambi ad A o a B si abbia $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

TEOREMA DI HIGMAN [1]: *Dati 2 p-gruppi finiti A e B aventi a comune un sottogruppo U, l'amalgama AUB è immergibile in un p-gruppo finito se e solo se esistono una serie principale di A (A_i), e una serie principale di B (B_i), tali che:*

$$U \cap (A_i) = U \cap (B_i)\ .$$

Nella ipotesi che U sia normale in A e in B, tale condizione è equivalente a quella che $\mathrm{Aut}_A\, U$ e $\mathrm{Aut}_B\, U$ generino un p-gruppo, dove con $\mathrm{Aut}_A\, U$ si indica il gruppo degli automorfismi indotti da A su U (vedi [1]).

COROLLARIO (Higman [1]): *Se 2 p-gruppi A e B hanno in comune un sottogruppo U ciclico, l'amalgama AUB è immergibile in un p-gruppo finito.*

In virtù del teorema di Higman si pone il seguente

PROBLEMA 1: Dati 2 interi α e β, ambedue > 0, qual è il valore minimo di $\alpha + \beta$ per cui esista un amalgama AUB, con $|A| = p^\alpha$ e $|B| = p^\beta$, non immergibile in un p-gruppo finito?

Si considerino 2 p-gruppi A e B con $|A| = p^2$ e $|B| = p^\beta (\beta \geqslant 2)$ e $A \nsubseteq B$. Allora in ogni amalgama AUB si ha che $A \cap B$, se non è l'elemento unità, è un sottogruppo di ordine p, cioè ciclico, e quindi per il corollario del teorema di Higman ogni amalgama di 2 tali gruppi è immergibile in un p-gruppo finito.

Siano, allora, A e B 2 p-gruppi di ordine p^3:

$$\begin{array}{llll}
A = \{a_1, a_2\} & \text{con} & a_1^{p^2} = a_2^p = 1 & a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2 = a_1^p \\
B = \{b_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3\} & \text{con} & b_1^p = \overline{a}_2^p = \overline{a}_3^p = 1 & \overline{a}_2^{-1}\overline{a}_3^{-1}\overline{a}_2\overline{a}_3 = 1 \\
 & & & b_1^{-1}\overline{a}_3^{-1}b_1\overline{a}_3 = \overline{a}_2 \\
 & & & b_1^{-1}\overline{a}_2^{-1}b_1\overline{a}_2 = 1\ .
\end{array}$$

Si considerino il sottogruppo U di A generato da a_1^p e a_2 e il sottogruppo V di B, generato da $\overline{a}_2$ e $\overline{a}_3$: sia U che V sono abeliani elementari di ordine p^2 e tra essi si può porre un isomorfismo φ tale che $\varphi(a_1^p) = \overline{a}_3$ e $\varphi(a_2) = \overline{a}_2$.

Identificando (e indicando con il medesimo simbolo) elementi di U e V corrispondenti in φ, si ottiene l'amalgama AUB con

$$A = \{a_1, a_2\} \qquad B = \{b_1, a_1^p, a_2\} \qquad A \cap B = U = \{a_1^p, a_2\}$$
$$a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2 = a_1^p, \qquad b_1^{-1}a_1^{-p}b_1a^p = a_2 \qquad b_1^{-1}a_2^{-1}b_1a_2 = 1 \; .$$

Tale amalgama non è immergibile in un p-gruppo finito.

Infatti l'unico sottogruppo normale di ordine p di A è $\{a_1^p\}$ mentre l'unico sottogruppo normale di ordine p di B è $\{a_2\}$; ne segue, perciò, che non esistono serie principali di A e di B tali che

$$U \cap (A_i) = U \cap (B_i) \; .$$

Concludendo, *il valore minimo di* $\alpha + \beta$, *richiesto dal problema* 1, *è* 6 *e si ottiene per* $\alpha = \beta = 3$.

2. DEFINIZIONE 4: Dati 2 gruppi A e B, contenenti rispettivamente un sottogruppo U e un sottogruppo V, tra loro isomorfi, sia φ un isomorfismo di U su V; si chiama *amalgama costruito a partire da* A, B, U, V *e* φ, l'amalgama costituito dai 2 gruppi A e B quando si siano identificati gli elementi di U e V corrispondenti in φ. Tale amalgama si indicherà con $(AUB)^\varphi$.

TEOREMA 1: *Dati* 2 *p-gruppi A e B, un sottogruppo normale U di A e un sottogruppo normale V di B, tra loro isomorfi, esiste almeno un isomorfismo ψ di U su V tale che l'amalgama $(AUB)^\psi$ sia immergibile in un p-gruppo finito.*

Sia φ un isomorfismo di U su V e sia $v = \varphi(u)$ con $u \in U$ e $v \in V$, se identifichiamo gli elementi di U con gli elementi di V corrispondenti in φ, ogni elemento a di A induce su V un automorfismo a^* tale che

$$v^{a^*} = \varphi(u^a) \quad \text{per ogni} \quad u \in U \quad \text{e} \quad v \in V \; .$$

Gli automorfismi a^* costituiscono evidentemente un gruppo, che si indicherà con $\mathrm{Aut}_A^\varphi V$.

I 2 gruppi $\mathrm{Aut}_A^\varphi V$ e $\mathrm{Aut}_B V$ sono p-gruppi e quindi sono contenuti in 2 p-sottogruppi di Sylow del gruppo di tutti gli automorfismi di V, $\mathrm{Aut}\, V$.

Sia $\mathrm{Aut}_A^\varphi V \subseteq S_1$ e $\mathrm{Aut}_B V \subseteq S_2$ con S_1 e S_2 p-sottogruppi di Sylow di $\mathrm{Aut}\, V$.

Per il 2° teorema di Sylow esiste un automorfismo δ di V, tale che

$$\delta^{-1}(\mathrm{Aut}_A^\varphi V)\delta \subseteq S_2 .$$

Ci basterà dimostrare che $\delta^{-1}(\mathrm{Aut}_A^\varphi V)\delta = \mathrm{Aut}_A^\psi V$, con ψ opportuno isomorfismo di U su V; in tal caso, infatti, $\mathrm{Aut}_A^\psi V$ e $\mathrm{Aut}_B V$, essendo contenuti nel p-sottogruppo di Sylow, S_2, generano un p-gruppo e per il teorema di Higman $(A\,U B)^\psi$ è immergibile in p-gruppo finito.

Si consideri, pertanto, l'isomorfismo di U su V tale che

$$\psi = \delta\varphi$$

e sia $\bar{v} = \psi(u)$ con $\bar{v} \in V$ e $u \in U$.

Indicando allora con a^{**} l'automorfismo indotto dall'elemento a di A, su V, per mezzo di ψ, si ha:

$$\bar{v}^{a^{**}} = \psi(u^a) \qquad \text{cioè} \qquad [(\varphi(u))^\delta]^{a^{**}} = [\varphi(u^a)]^\delta$$

e poichè $\varphi(u) = v$ e $\varphi(u^a) = v^{a^*}$ si ha $v^{\delta a^{**}} = v^{a^*\delta}$ per ogni $v \in V$.

Ne segue:

$$\delta a^{**} = a^*\delta \qquad \text{ovvero} \qquad a^{**} = \delta^{-1}a^*\delta$$

ovvero ancora

$$\mathrm{Aut}_A^\psi V \subseteq \delta^{-1}(\mathrm{Aut}_A^\varphi V)\delta .$$

Siccome poi i 2 gruppi $\mathrm{Aut}_A^\psi V$ e $\delta^{-1}(\mathrm{Aut}_A^\varphi V)\delta$ hanno lo stesso ordine si ha

$$\mathrm{Aut}_A^\psi V = \delta^{-1}(\mathrm{Aut}_A^\varphi V)\delta$$

e il teorema risulta dimostrato.

TEOREMA 2: *Dati 2 p-gruppi A e B, dotati di 2 sottogruppi U e V abeliani elementari dello stesso ordine, esiste almeno un isomorfismo ψ di U su V, tale che l'amalgama $(A\,U B)^\psi$ sia immergibile in un p-gruppo finito.*

Sia (A_i) una serie principale di A e quindi $(A_i) \cap U = (\bar{A}_i)$ una serie principale di U, si consideri, allora, l'insieme di elementi di U, così ottenuto:

$$u_1 \in \bar{A}_1 \text{ e } \notin \bar{A}_0 \qquad u_2 \in \bar{A}_2 \text{ e } \notin \bar{A}_1, \qquad \ldots$$
$$u_r \in \bar{A}_r \text{ e } \notin \bar{A}_{r-1}, \ \ldots \qquad u_n \in \bar{A}_n \text{ e } \notin \bar{A}_{n-1} .$$

Dove $\bar{A}_0$ è il sottogruppo unità, $\bar{A}_r$ il termine di ordine p^r della serie principale (A_i) e $\bar{A}_n$, di ordine p^n, coincide con U.

Tale insieme di elementi $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ è evidentemente un sistema di generatori indipendenti di U.

Sia poi (B_i) una serie principale di B e quindi $(B_i) \cap V = (\overline{B}_i)$ una serie principale di V, si consideri, allora, il sistema $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ di generatori indipendenti di V, ottenuto dalla serie (B_i) in modo analogo a quello usato per ottenere il sistema di generatori indipendenti di U $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Dato che U e V sono abeliani elementari dello stesso ordine e $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $V = (v_1; v_2, \ldots, v_n)$ si può stabilire tra essi un isomorfismo ψ tale che $v_i = \psi(u_i)$ $i = 1, 2, \ldots, n$; ne segue che, identificando gli elementi di U e V corrispondenti in ψ, le 2 serie (A_i) e (B_i) verificano la condizione di Higman, e l'amalgama $(A\,UB)^\psi$ è immergibile in un p-gruppo finito.

C_i poniamo ora il seguente

PROBLEMA 2: Dati 2 interi α e β, ambedue > 0, qual è il valore minimo di $\alpha + \beta$ per cui esistano 2 gruppi A, B, con $|A| = p^\alpha$, $|B| = p^\beta$ e contenenti 2 sottogruppi U e V, tra loro isomorfi, tali che, qualunque sia l'isomorfismo ψ di U su V l'amalgama $(A\,UB)^\psi$ sia non immergibile in un p-gruppo finito.

Si considerino 2 p-gruppi A e B con $|A| \subseteq p^3$ e $|B| = p^\beta (\beta > 0)$ e $A \nsubseteq B$ essi possono contenere 2 sottogruppi U e V, isomorfi tra loro, solo se U e V sono o di ordine p o di ordine p^2, e siccome un gruppo di ordine p^2 o è ciclico o è abeliano elementare, U e V o sono ciclici o sono abeliani elementari e quindi, per il corollario del teorema di Higman e per il teorema 2, esiste almeno un isomorfismo ψ di U su V, tale che l'amalgama $(A\,UB)^\psi$ sia immergibile in un p-gruppo finito.

Si considerino poi 2 p-gruppi A e B entrambi di ordine p^4 e $A \neq B$, essi possono contenere 2 sottogruppi U e V, isomorfi tra loro solo se U e V di ordine p o di ordine p^2 e in questo caso possiamo ripetere quanto detto sopra, oppure U e V sono di ordine p^3, ma allora U è normale in A e B è normale in B e per il teorema 1 esiste un opportuno isomorfismo ψ tale che l'amalgama $(A\,UB)^\psi$ sia immergibile in un p-gruppo finito.

Siano infine A di ordine p^4 e B di ordine p^5 i 2 seguenti gruppi [1]:

$$
\begin{array}{llll}
A = \{a_1, a_2, a_3\} & \text{con} & a_1^p = a_2^{p^2} = a_3^p = 1 & a_1^{-1}a_2^{-1}a_1a_2 = 1 \\
 & & & a_1^{-1}a_3^{-1}a_1a_3 = a_2^p \\
 & & & a_2^{-1}a_3^{-1}a_2a_3 = 1 \\
B = \{b_1, b_2\} & \text{con} & b_1^{p^2} = b_2^{p^3} = 1 & b_1^{-1}b_2^{-1}b_1b_2 = b_2^p .
\end{array}
$$

[1]) Il gruppo B è stato desunto da Schreier [2].

Il derivato di A è di ordine $p : D_1 = \{a_2^p\}$, mentre il centro è di ordine $p^2 : C_1 = \{a_2\}$.

Il derivato di B è di ordine $p^2 : D_2 = \{b_2^p\}$, mentre il centro è di ordine $p : C_2 = \{b_2^{p^2}\}$.

Sia $U = \{a_2, a_3\}$ e $V = \{b_1, b_2^{p^2}\}$; tali gruppi sono abeliani del tipo (2,1) e quindi sono isomorfi tra loro.

Siccome i sottogruppi normali di ordine p di un p-gruppo sono sottogruppi del centro, l'unico sottogruppo normale di ordine p di A è $\{a_2^p\}$ mentre di B è $C_2 = \{b_2^{p^2}\}$, ne segue che ogni serie principale di A contiene $\{a_2^p\}$ e ogni serie principale di B, $\{b_2^{p^2}\}$, ma nessun isomorfismo di U su V può trasformare $\{a_2^p\}$ in $\{b_2^{p^2}\}$ e quindi per il teorema di Higman, l'amalgama costruito a partire da A, B, U, V e da ogni possibile isomorfismo di U su V non è immergibile in un p-gruppo finito.

Si ha pertanto che *il valore minimo di* $\alpha + \beta$, *che risponde al problema* 2, *è* 9 *e si ottiene per* $\alpha = 4$ *e* $\beta = 5$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Higman G.: *Amalgams of p-groups*. Journal of Algebra, I, 1964, 301-305.

[2] Schreier O.: *Ueber die Erweiterung von Gruppe, II*. Math. Seminar Hamburgischer Universität, IV, 1926, 321-346.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 gennaio 1966.