Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Franco Napolitani

Sui gruppi risolubili complementati

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 118-120
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__118_0>

SUI GRUPPI RISOLUBILI COMPLEMENTATI

FRANCO NAPOLITANI *)

Un gruppo G viene chiamato K-gruppo [2], se il reticolo $\mathcal{L}(G)$ di tutti i suoi sottogruppi è complementato. Inoltre C. Christensen [1] con il termine nC-gruppo (risp: cC-gruppo) indica un gruppo in cui ogni sottogruppo normale (risp: caratteristico) è dotato di complemento.

Da un noto teorema di G. Zacher [3] segue immediatamente che nei gruppi finiti risolubili le classi dei K-gruppi, nC-gruppi e cC-gruppi coincidono. Questo fatto non è più vero per i gruppi risolubili infiniti: infatti il gruppo additivo Q dei razionali, che è privo di sottogruppi caratteristici non banali, non ha il reticolo dei sottogruppi complementato.

Tuttavia tra nC-gruppi e K-gruppi tale equivalenza continua a sussistere anche nei gruppi risolubili [1]) infiniti.

1. Siano G un nC-gruppo ed N un sottogruppo normale di G. Si consideri un sottogruppo $U \lhd G$ contenente N. Per ipotesi, U ha un complemento V in $\mathcal{L}(G)$, cioè V verifica le relazioni $U \cup V = G$ e $U \cap V = 1$.

Dalla relazione di modularità segue

$$U \cap (V \cup N) = (U \cap V) \cup N = N.$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R..

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) Un gruppo G dicesi risolubile se la sua serie derivata ha lunghezza finita.

Quindi $V \cup N/N$ è un complemento di U/N in $\mathcal{L}(G/N)$ e G/N è anch'esso un nC-gruppo.

LEMMA: *Sia G un nC-gruppo. G è un K-gruppo se contiene un sottogruppo normale abeliano N tale che il quoziente G/N sia un K-gruppo.*

DIM: Sia H un complemento di N in $\mathcal{L}(G)$; H essendo isomorfo a G/N è un K-gruppo. Inoltre sia $T \subseteq N$ un sottogruppo normale di G.

Esiste in G un sottogruppo K tale che $T \cup K = G$, $T \cap K = 1$. Ora $K \cap N$ è un sottogruppo normale di K ed altresì normale in N essendo N abeliano, dunque normale in $K \cup N = G$.

Segue dalla relazione di modularità

$$T \cup (K \cap N) = (T \cup K) \cap N = N,$$

e, poichè $T \cap (K \cap N) = 1$, $K \cap N \lhd G$ è un complemento di T in $\mathcal{L}(N)$.

Si ha quindi, per l'arbitrarietà del sottogruppo $T \subseteq N$, che ogni sottogruppo normale di G contenuto in N possiede un complemento in $\mathcal{L}(N)$ normale in G.

Si consideri un sottogruppo M di G. Nell'isomorfismo naturale tra G/N ed H, ad $M \cup N/N$ corrisponde un sottogruppo $V \subseteq H$. Poichè H è un K-gruppo, V ha un complemento V' in $\mathcal{L}(H)$. Inoltre è evidente che $M \cap V' = 1$ e $M \cup N \cup V' = G$.

Sia C un sottogruppo di G contenente V' tale che $C \cap M = 1$ e massimale per questa condizione.

Proviamo che C è un complemento di M, cioè, essendo $C \cap M = 1$, che $C \cup M = G$. Poichè se $C \cup M \supseteq N$ ciò è vero, essendo $M \cup N \cup V' = G$, assumiamo $C \cup M \not\supseteq N$ e verifichiamo che si giunge ad una contraddizione.

Infatti, in tal caso, $(C \cup M) \cap N$ è un sottogruppo normale di G propriamente contenuto in N. Esiste pertanto un sottogruppo non identico $R \subseteq N$ e normale in G tale che $R \cap [(C \cup M) \cap N] = 1$; $R \cup [(C \cup M) \cap N] = N$.

Si ha

$$(R \cup C) \cap M \subseteq (R \cup C) \cap (M \cup C) = [R \cap (M \cup C)] \cup C = C;$$

d'altra parte $(R \cup C) \cap M \subseteq M$ e quindi $(R \cup C) \cap M \subseteq C \cap M = 1$.

Questa relazione contraddice la massimalità di C: pertanto $C \cup M \supseteq N$ e C è un complemento di M. Quanto detto assicura, essendo M un sottogruppo arbitrario di G, che G è un K-gruppo.

COROLLARIO: *Sia G un gruppo risolubile. G è un nC-gruppo se, e solo se, è un K-gruppo.*

DIM: La sufficienza della condizione essendo evidente, proviamo che un nC-gruppo risolubile è un K-gruppo. Sia

$$(*) \qquad G = G^{(0)} \supset G^{(1)} \supset \dots \supset G^{(n-1)} \supset G^{(n)} = 1,$$

la serie derivata di G. Se la lunghezza della $(*)$ è 1, il gruppo è abeliano e, date le ipotesi, è un K-gruppo.

Una ipotesi di induzione sulla lunghezza n della serie derivata di G consente di supporre che $G/G^{(n-1)}$ sia un K-gruppo; allora dal lemma precedente segue che G è un K-gruppo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CHRISTENSEN C. - *Complementation in groups,* Mathematische Zeit. 84 (1964) 52-69.

[2] SUZUKI M. - *Structure of a group and the structure of the its lattice of subgroups,* Erg. der Mat. Springer Verlag, Berlin 1956.

[3] ZACHER G. - *Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 22 (1953) 111-122.

Manoscritto pervenuto in redazione 17 febbraio 1967