

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. MIRANDA

## **Sulle singolarità delle frontiere minimali**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 38 (1967), p. 180-188

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_38\\_\\_180\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__180_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SULLE SINGOLARITÀ DELLE FRONTIERE MINIMALI

M. MIRANDA \*)

Per le definizioni e le notazioni rinviamo a [5].

In questo lavoro si prova che la dimensione di Hausdorff dell'insieme delle singolarità di una frontiera minimale  $n$ -dimensionale, approssimabile in  $L^1_{loc}$  con ipersuperfici minimali cartesiane analitiche non può superare  $n-2$ .

Ringrazio Ennio De Giorgi con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. Estendendo un risultato di Triscari (v. Teorema V di [8]) per le funzioni caratteristiche d'insieme dimostriamo il

**TEOREMA 1.** *Sia  $\Omega \subset R^n$  aperto e  $f \in BV_{loc}(\Omega)$ . Indicata con  $f^*$  la funzione definita in  $\Omega \times R$  da*

$$f^*(x, y) = f(x), \quad \text{per } x \in \Omega, \quad y \in R,$$

*si ha che  $f$  ha gradiente minimale in  $\Omega$  se e solo se  $f^*$  ha gradiente minimale in  $\Omega \times R$ .*

**DIM.** Ricordiamo (v. § 3 di [4]) che se per  $g \in BV_{loc}(\Omega \times R)$  e  $A \subset \Omega \times R$  aperto si pone

$$(1.1) \quad \int_A |D_x g| = \sup \left\{ \int \left( g \sum_{i=1}^n D_i \alpha_i \right) dx dy; \alpha_i \in C_0^1(A), \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq 1 \right\},$$

---

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R..

si ha (cfr. Teor. 3.3 di [4])

$$(1.2) \quad \int_A |D_x g| = \int_R dy \int_{A_y} |Dg_y|,$$

dove si è posto, per ogni  $y \in R$ ,  $A_y = \{x; x \in R^n, (x, y) \in A\}$  e  $g_y(x)$  è la funzione definita in  $A_y$  dalla relazione  $g_y(x) = g(x, y)$ . Dalla (1.2) si ricava, se  $\Omega_0 \subset \Omega$  è aperto e  $I \subset R$  è un intervallo,

$$(1.3) \quad \int_{\Omega_0 \times I} |Df^*| = \int_{\Omega_0 \times I} |D_x f^*| = \int_I dy \int_{\Omega_0} |Df| = \text{mis } I \cdot \int_{\Omega_0} |Df|.$$

Cominciamo allora col provare che se  $f$  ha gradiente minimale in  $\Omega$  allora  $f^*$  ha gradiente minimale in  $\Omega \times R$ . Si tratta di far vedere che per ogni compatto  $K \subset \Omega \times R$  e ogni  $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega \times R)$  con  $g = f^*$  in  $\Omega \times R - K$  vale

$$(1.4) \quad \int_K |Df^*| \leq \int_K |Dg|.$$

Fissati  $K$  e  $g$  sia  $\Omega_0$  un aperto relativamente compatto in  $\Omega$  e  $I$  un intervallo di  $R$  tali che

$$(1.5) \quad \Omega_0 \times I \supset K.$$

Si avrà allora, per le (1.1) e (1.2),

$$(1.6) \quad \int_{\Omega_0 \times I} |Dg| \geq \int_{\Omega_0 \times I} |D_x g| = \int_I dy \int_{\Omega_0} |Dg_y|.$$

Per la proprietà di minimo di  $f$  essendo

$$(1.7) \quad \int_{\Omega_0} |Df| \leq \int_{\Omega_0} |Dg_y|, \quad \forall y \in R,$$

dalle (1.3) e (1.6) si ricava

$$(1.8) \quad \int_{\Omega_0 \times I} |Df^*| \leq \int_{\Omega_0 \times I} |Dg|.$$

Poichè vale ovviamente

$$(1.9) \quad \int_{\Omega_0 \times I-K} |Df^*| = \int_{\Omega_0 \times I-K} |Dg|,$$

dalle (1.5) e (1.8) si ricava la (1.4).

Proviamo ora che se  $f^*$  ha gradiente minimale in  $\Omega \times E$  allora  $f$  ha gradiente minimale in  $\Omega$ . Si tratta di far vedere che per ogni compatto  $K \subset \Omega$  e ogni  $g \in BV_{loc}(\Omega)$  con  $g = f$  in  $\Omega - K$  si ha

$$(1.10) \quad \int_{\bar{K}} |Df| \leq \int_{\bar{K}} |Dg|.$$

Fissati  $K$  e  $g$ , per ogni  $\varrho > 0$  poniamo

$$g_\varrho(x, y) = \begin{cases} f(x), & \text{per } y \geq \varrho \text{ oppure } y \leq 0, \\ g(x), & \text{per } 0 < y < \varrho, \end{cases}$$

e indichiamo con  $\Omega_0$  un aperto relativamente compatto in  $\Omega$  verificante

$$(1.11) \quad \Omega_0 \supset K.$$

Per la proprietà di minimo di  $f^*$ , se si indica con  $I_\varrho$  l'intervallo chiuso  $(0, \varrho)$ , si ha

$$(1.12) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |Dg_\varrho| \geq \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |Df^*| = \varrho \cdot \int_{\Omega_0} |Df|.$$

D'altra parte vale

$$(1.13) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |Dg_\varrho| \leq \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_x g_\varrho| + \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_{n+1} g_\varrho|,$$

e per il Teor. 3.3 di [4] e la definizione di  $g_\varrho$  si ha

$$(1.14) \quad \int_{\Omega_0 \times I_\varrho} |D_{n+1} g_\varrho| = \int_{\Omega_0} dx \int_{I_\varrho} |D_{n+1} g_\varrho| = 2 \int_{\Omega_0} |f(x) - g(x)| dx,$$

mentre per le (1.2) e la definizione di  $g_e$  si ha

$$(1.15) \quad \int_{\Omega_0 \times I_e} |D_x g_e| = e \cdot \int_{\Omega_0} |Dg|.$$

Dalle (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) si ricava allora

$$(1.16) \quad e \int_{\Omega_0} |Df| \leq e \int_{\Omega_0} |Dg| + 2 \int_{\Omega_0} |f(x) - g(x)| dx,$$

da cui, per l'arbitrarietà di  $e$ , segue

$$(1.17) \quad \int_{\Omega_0} |Df| \leq \int_{\Omega_0} |Dg|.$$

Poichè vale ovviamente

$$(1.18) \quad \int_{\Omega_0 - K} |Df| = \int_{\Omega_0 - K} |Dg|.$$

dalle (1.17) e (1.11) segue la (1.10).

c. v. d.

2. Ricordiamo (v. [5]) che un insieme  $E \subset R^n$  ha frontiera minimale nell'aperto  $\Omega \subset R^n$  se la sua funzione caratteristica ha gradiente minimale in  $\Omega$ . Ricordiamo inoltre (v. Teor. 6.5 di [5]) che se la frontiera di  $E$  è minimale in  $\Omega$  allora  $\mathcal{F}E \cap \Omega$  risulta costituita di una parte singolare  $N$ , chiusa in  $\Omega$ , e avente misura  $(n-1)$ -dimensionale nulla e di una parte regolare che è una ipersuperficie analitica. Allora in ogni punto regolare di  $\mathcal{F}E \cap \Omega$  si possono considerare le curvatures dell'ipersuperficie  $\mathcal{F}E \cap \Omega$ . Indicheremo allora (v. [6], § 4) con  $\gamma_E$  la misura su  $\Omega$  definita da

$$(2.1) \quad \gamma_E(B) = \int_{B \cap (\mathcal{F}E - N)} c^2 dH_{n-1}, \quad \forall B \subset \Omega \text{ di Borel,}$$

dove  $c^2$  indica la somma dei quadrati delle curvatures principali di  $\mathcal{F}E \cap \Omega$ .

In [6] è stato provato (v. Teor. 6 di [6]) che la misura  $\gamma_E$  è semi-continua (sugli aperti) rispetto alla convergenza in  $L^1_{loc}$  per l'insieme  $E$ . Utilizzando questo risultato possiamo provare il seguente

**TEOREMA 2.** *Per ogni intero  $n > 4$  <sup>(1)</sup> esiste una costante positiva  $\delta(n)$  tale che: se  $E \subset \mathbb{R}^n$  ha frontiera minimale nell'aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , se  $x_0$  è un punto singolare di  $\mathcal{F}E \cap \Omega$  e  $\varrho \leq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ , allora si ha*

$$(2.2) \quad \gamma_E(\{x; |x - x_0| < \varrho\}) \geq \delta(n) \varrho^{n-3}.$$

**DIM.** Supponiamo per assurdo che per un intero  $n$  la costante  $\delta(n)$  non esista. In tale caso, essendo l'espressione

$$\varrho^{3-n} \gamma_E(\{x; |x - x_0| < \varrho\})$$

invariante per traslazioni e omotetie, si può costruire una successione di insiemi  $\{E_h\}$  aventi frontiera minimale in  $\{x; |x| < 1\}$  e tali che l'origine sia punto singolare per  $\mathcal{F}E_h$  e per i quali valga

$$(2.3) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \gamma_{E_h}(\{x; |x| < 1\}) = 0.$$

Poiché le frontiere  $\mathcal{F}E_h$  sono minimali in  $\{x; |x| < 1\}$  si ha (v. formula (3.11) di [5])

$$(2.4) \quad \int_{\{x; |x| < 1\}} |D\varphi_{E_h}| \leq \frac{1}{2} n \omega_n, \quad \forall h \quad (\omega_n = \text{mis} \{x; |x| < 1\}).$$

Dalla (2.4) segue allora (v. Teor. I di [2]) che la successione  $\{E_h\}$  è compatta in  $L^1(\{x; |x| < 1\})$  e possiamo allora supporre che essa converga in  $L^1(\{x; |x| < 1\})$  verso un insieme  $E$ . Per il Teor. 3 di [6] la  $\mathcal{F}E$  risulta essere minimale in  $\{x; |x| < 1\}$ , per l'Osservazione 5 e il Teorema 4 di [6] l'origine è punto singolare di  $\mathcal{F}E$ , ed infine per il Teorema 6 di [6] dalla (2.3) si ricava

$$(2.5) \quad \gamma_E(\{x; |x| < 1\}) = 0.$$

---

<sup>1)</sup> Per  $n \leq 4$  le frontiere minimali non hanno punti singolari. Il risultato è dovuto a Triscari [8] per  $n = 3$  e ad Almgren [1] per  $n = 4$ .

Mostriamo ora, riprendendo un ragionamento che si trova in [7], come dall'insieme  $E$  si possa passare ad un cono  $E^*$  avente le sue stesse caratteristiche, ovvero avente frontiera minimale in  $R^n$ , avente l'origine come punto singolare della frontiera e verificante la

$$(2.6) \quad \gamma_{E^*}(R^n) = 0.$$

Per ogni  $\varepsilon > 0$  indichiamo con  $E_\varepsilon$  l'insieme  $\{x : \varepsilon x \in E\}$ . Avremo allora ovviamente che  $\mathcal{F} E_\varepsilon$  è minimale in  $\left\{x; |x| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}$ , ha l'origine come punto singolare e verifica

$$(2.7) \quad \gamma_{E_\varepsilon}\left(\left\{x; |x| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right) = 0.$$

Dalla ricordata formula (3.11) di [5] si ha allora

$$(2.8) \quad \int_{\{x; |x| < \varrho\}} |D \varphi_{E_\varepsilon}| \leq \frac{1}{2} n \omega_n \varrho^{n-1}, \quad \forall \varrho < \frac{1}{\varepsilon}.$$

Dal Teor. 1.7 di [3] si ha che ogni successione  $\{E_{\varepsilon_i}\}_i$  con  $\varepsilon_i > 0$  e  $\varepsilon_i \rightarrow 0$  è compatta in  $L^1_{loc}(R^n)$  e quindi possiamo determinarne una, che indicheremo ancora con  $\{E_{\varepsilon_i}\}$ , convergente in  $L^1_{loc}(R^n)$  verso un insieme  $E^*$ . Per i già citati risultati di [6] la  $\mathcal{F} E^*$  risulta essere minimale in  $R^n$ , singolare nell'origine e verificante la (2.6). Oltre a ciò, per l'Osservazione 3 di [6], si ha

$$(2.9) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E_{\varepsilon_i}}| = \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E^*}|,$$

per quasi tutti i  $t \in R (t > 0)$ .

Ma poiché vale

$$(2.10) \quad \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E_{\varepsilon_i}}| = \varepsilon_i^{-n+1} \int_{\{x; |x| < \varepsilon_i t\}} |D \varphi_E|,$$

e poiché esiste (v. Cor. 2.6 di [5])

$$(2.11) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0+} \varrho^{1-n} \int_{\{x; |x| < \varrho\}} |D \varphi_E| = \alpha,$$

si ha, dalla (2.9),

$$(2.12) \quad t^{1-n} \int_{\{x; |x| < t\}} |D \varphi_{E^*}| = \alpha,$$

per quasi tutti i  $t \in R$  ( $t > 0$ ).

Dalla (2.12) si ricava (v. Teor. 2.5 di [5]) che  $E^*$  è un cono di vertice 0.

$\mathcal{F}E^*$  essendo un cono minimale e verificando la (2.6) non può essere singolare in un sol punto, deve quindi esistere un  $x_0 \neq 0$  che sia punto singolare di  $\mathcal{F}E^*$ . Indicato allora, per  $\varepsilon > 0$ , con  $E_\varepsilon^*$  l'insieme  $\{x; \varepsilon(x - x_0) \in E^*\}$  si ha, ragionando come abbiamo fatto più sopra, che esiste una successione  $\{E_{\varepsilon_i}^*\}_i$ , con  $\varepsilon_i > 0$  e  $\varepsilon_i \rightarrow 0$ , convergente verso un insieme  $E^{**}$ . L'insieme  $E^{**}$  risulterà allora essere un cilindro con asse parallelo al segmento  $Ox_0$  e la sua sezione ortogonale  $L$  sarà un cono di  $R^{n-1}$ .  $\mathcal{F}E^{**}$  sarà minimale, singolare nell'origine e varrà

$$(2.13) \quad \gamma_{E^{**}}(R^n) = 0,$$

allora anche  $L$  sarà minimale in  $R^{n-1}$  (v. Teor. 1) singolare nella origine e verificherà ovviamente

$$(2.14) \quad \gamma_L(R^{n-1}) = 0.$$

Ripetendo queste considerazioni si prova che per ogni intero  $s$  con  $3 \leq s \leq n$  esiste in  $R^s$  un cono singolare nell'origine e avente frontiera minimale. Questo fatto è però in contraddizione coi risultati di Triscari [8] e Almgren [1], e quindi è assurdo supporre che esista un intero  $n$  per cui la tesi del teorema non sia valida, e perciò il Teorema 2 è completamente dimostrato.

c. v. d.

3. Dal Teorema 2, tenuto conto del Teorema 7 di [6], si ricava la seguente valutazione dell'insieme delle singolarità delle frontiere minimali approssimabili in  $L_{loc}^1$  con ipersuperfici cartesiane analitiche minimali.



**TEOREMA, 3.** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto e  $\{(x, f_h(x)); x \in \Omega\}$  una successione di ipersuperfici cartesiane minimali analitiche. La successione d'insiemi  $\{(x, y); x \in \Omega, y < f_h(x)\}$  converge in  $L_{loc}^1(\Omega \times \mathbb{R})$  verso un insieme  $E$ . Detto allora  $N$  l'insieme dei punti singolari di  $\mathcal{F}E \cap (\Omega \times \mathbb{R})$ , si ha, per ogni compatto  $K \subset \Omega \times \mathbb{R}$*

$$(3.1) \quad H_{n-2}(N \cap K) < \infty,$$

**DIM.** Fissati  $K$  e  $\varrho < \text{dist}(K, \partial(\Omega \times \mathbb{R}))$  sia  $\{x_i\}$  un insieme di punti di  $K \cap N$  tali che

$$(3.2) \quad \{x; |x - x_i| < \varrho, |x - x_j| < \varrho\} = \emptyset, \text{ per } i \neq j,$$

$$(3.3) \quad N \cap K \subset \bigcup_i \{x; |x - x_i| < 2\varrho\}.$$

Avremo allora

$$(3.4) \quad \sum_i \gamma_E \{x; |x - x_i| < \varrho\} \leq \gamma_E(\{x; \text{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}).$$

D'altra parte dal Teorema 2 si ricava

$$(3.5) \quad \sum_i \gamma_E(\{x; |x - x_i| < \varrho\}) \geq m(\varrho) \varrho^{n-2} \delta(n+1),$$

dove  $m(\varrho)$  indica il numero dei punti  $x_i$ .

Dalle (3.4) e (3.5) si ha

$$(3.6) \quad m(\varrho) \varrho^{n-2} \leq [\delta(n+1)]^{-1} \gamma_E(\{x; \text{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}).$$

Poichè dal Teorema 7 di [6] si ha ovviamente

$$(3.7) \quad \lim_{\varrho \rightarrow 0^+} \gamma_E(\{x; \text{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}) < \infty,$$

dalle (3.6), (3.7), (3.3) e dalla definizione di  $H_{n-2}$  segue la (3.1).

c. v. d.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] F. J. ALMGREN : *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem.* Ann. of Math., 1966.
- [2] E. DE GIORGI : *Nuovi teoremi relativi alle misure  $(r - 1)$ -dimensionali in uno spazio ad  $r$  dimensioni.* Ric. Matem. Napoli, 1955.
- [3] M. MIRANDA : *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1964.
- [4] M. MIRANDA : *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1964.
- [5] M. MIRANDA : *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1965.
- [6] M. MIRANDA : *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali.* (Questo stesso numero).
- [7] D. TRISCARI : *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1963.
- [8] D. TRISCARI : *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni.* Le Matematiche, Catania, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 marzo 1967