

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO MAGARI

Su una questione riguardante le chiusure di Moore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 189-198

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__189_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU UNA QUESTIONE RIGUARDANTE LE CHIUSURE DI MOORE

ROBERTO MAGARI *)

SUNTO: Sia $\langle E, K \rangle$ un C.G. (Cfr. [4])¹⁾ e G, X sottoinsiemi di E . Si studiano condizioni affinché sia $K(G \cap KX) \supseteq X$.

1. Premessa.

Sia W un insieme non vuoto e sia $F_W = \bigcup_{0 \leq i < \omega} W^{W^i}$ il clono (cfr. [1] cap. III) delle operazioni finitarie su W .

Allo scopo di affrontare un problema riguardante la classe equazionale di algebre « associata » a $\langle W, F \rangle$ dove F sia un fissato sottoinsieme di F_W , (cfr. [5] premessa), è opportuno caratterizzare gli elementi $f \in F_W$ che risultano, parlando imprecisamente, « esprimibili » mediante le operazioni binarie a loro volta « esprimibili » mediante f . In termini più precisi, tenuto conto del fatto che l'operatore K definito da :

$$(1) \quad KX = \text{clono generato da } X \quad (X \subseteq F_W)$$

è un operatore di Moore (cfr. [1] cap. I e [2] cap. III)¹⁾, ossia, secondo la terminologia di [4], $\langle F_W, K \rangle$ è un C.G., si tratta di caratteriz-

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R. (gruppo n. 37 del Comitato per la Matematica) per l'anno 66-67.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

¹⁾ ved. anche il successivo n. 2.

zare quegli elementi f di F_W per cui è:

$$(2) \quad f \in K(W^{W^2} \cup K\{f\}).$$

In questa breve nota ho raccolto alcune semplici osservazioni preliminari sulla questione che hanno una portata più generale e che precisamente si inquadrano nel problema seguente:

sia $\langle E, K \rangle$ un C.G. e $G \subseteq E$. Si chiede di studiare l'insieme degli $X \subseteq E$ per cui è:

$$(3) \quad X \subseteq K(G \cap KX).$$

Il problema ora esposto presenta interesse anche per il seguente motivo. Sia E l'insieme delle espressioni di un linguaggio logico e K l'operatore conseguenza, ossia l'operatore che ad ogni insieme X di espressioni associa l'insieme KX delle espressioni che sono conseguenza di X . È ben noto che $\langle E, K \rangle$ è allora un C.G. (cfr. ad esempio [4]). Se X è una teoria (ossia un chiuso di $\langle E, K \rangle$) e G è un insieme di espressioni, la condizione (3) (equivalente, come si vedrà più oltre, alla: $K(G \cap KX) = KX$ e quindi, se X è un chiuso, alla $K(G \cap X) = X$) esprime la circostanza che è possibile reperire in G un sistema di assiomi per X .

2. Richiami sui C.G.

Per comodità del lettore ricordo che un C.G. è un sistema $\langle E, K \rangle$ in cui:

$$(4,1) \quad E \text{ è un insieme}$$

$$(4,2) \quad K \text{ è un'applicazione da } \mathcal{P}(E) \text{ a } \mathcal{P}(E) \text{ tale che:}$$

$$(4,21) \quad X \subseteq KX \quad (X \in \mathcal{P}(E))$$

$$(4,22) \quad K^2 = K$$

$$(4,23) \quad K(X \cup Y) \supseteq KX \quad (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Se ne deducono immediatamente le :

$$\left. \begin{aligned} (4,24) \quad & K(X \cup Y) \supseteq KX \cup KY^2)^3 \\ (4,25) \quad & \text{se } X \subseteq Y \text{ allora } KX \subseteq KY^2 \\ (4,26) \quad & K(X \cap Y) \subseteq KX \cap KY^3 \end{aligned} \right\} (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Se $\langle E, K \rangle$ è un C.G., K si dice un C.G.-operatore o operatore di Moore su E .

Ricordo ancora che, detto \mathcal{C} l'insieme dei « chiusi » di un C.G.

$$\begin{aligned} \langle E, K \rangle \quad (\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X = KX\} = \\ = \{X \in \mathcal{P}(E) : \text{esiste un } Y \in \mathcal{P}(E) \text{ con } X = KY\}) \end{aligned}$$

si ha :

$$(5,1) \quad \mathcal{C} \text{ è chiuso rispetto alle intersezioni (anche infinite) }^4)$$

$$(5,2) \quad KX = \bigcap_{\substack{Y \in \mathcal{C} \\ X \subset Y}} Y \quad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

Viceversa se E è un insieme e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ soddisfa la (5,1) esiste uno e un sol operatore di Moore K su E (quello appunto definito dalla (5,2)), per cui \mathcal{C} è l'insieme dei chiusi di $\langle E, K \rangle$.

²⁾ Per un qualunque $K: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ le (4,23), (4,24), (4,25), (4,26) sono ovviamente equivalenti.

³⁾ Più in generale valgono le :

$$\left. \begin{aligned} (4,241) \quad & K \cup X \supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} KX \\ (4,261) \quad & K \cap X \subseteq \bigcap_{X \in \mathcal{M}} KX \end{aligned} \right\} \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E).$$

⁴⁾ La proposizione va intesa secondo la convenzione per cui $\bigcap_{X \in \emptyset} X = E$,

$$\bigcup_{X \in \emptyset} X = \emptyset.$$

Sarà utile nel seguito la seguente :

DEF. 1. Sia $\langle E, K \rangle$ un C.G. e $Y \subseteq E$. Si dirà operatore relativo a Y l'applicazione K_Y da $\mathcal{P}(Y)$ a $\mathcal{P}(Y)$ definita da :

$$(6) \quad K_Y X = Y \cap KX \quad (X \subseteq Y).$$

Facilmente si verifica che $\langle Y, K_Y \rangle$ è un C.G.

3. Ora e nel seguito $\langle E, K \rangle$ indicherà sistematicamente un C.G. e \mathcal{C} l'insieme dei suoi chiusi.

Si ha ovviamente :

PROP. 1. Se $X, G \in \mathcal{P}(E)$, sono equivalenti le condizioni :

$$(3) \quad K(G \cap KX) \supseteq X$$

$$(3,1) \quad K(G \cap KX) = KX.$$

DIM.

da (3) segue (3,1). Valga la (3), allora è :

$$(7) \quad K(G \cap KX) = KK(G \cap KX) \supseteq KX$$

e anche :

$$G \cap KX \subseteq KX$$

da cui :

$$(8) \quad K(G \cap KX) \subseteq KKKX = KX$$

e dalle (7) e (8) segue la (3,1).

Che dalla (3,1) segua la (3) è ovvio.

PROP. 2. Sono equivalenti le condizioni :

$$\left. \begin{array}{l} (9,1) \quad KX \cap KG \supseteq X \\ (9,2) \quad KX \cap KG \supseteq KX \\ (9,3) \quad KG \supseteq KX \\ (9,4) \quad KG \supseteq X \end{array} \right\} (X, G \in \mathcal{P}(E))$$

e ciascuna di esse è condizione necessaria per la validità della (3).

DIM. L'equivalenza fra le (9,1), (9,2), (9,3), (9,4) è ovvia.
Valga la (3).

Si ha :

$$K(KX \cap G) \subseteq K K X \cap K G = K X \cap K G$$

e dalla (3) segue ora la (9,1).

Che le (9) non siano in generale sufficienti per la validità della (3) è mostrato dal seguente :

Esempio α .

Sia $\langle E, \leq \rangle$ un insieme totalmente ordinato avente almeno tre elementi distinti a, b, c (e supponiamo $a < b < c$) e K sia definito da :

$$(10) \quad KX = \{y \in E : \text{esiste almeno un } x \in X \text{ con } x \leq y\} \quad (X \subseteq E).$$

$\langle E, K \rangle$ è ovviamente un C.G. e posto $G = \{a\}, X = \{b\}$ si ha ovviamente $b \in KG$ cioè $X \subseteq KG$, ossia la (9, 4), mentre è :

$$K(G \cap KX) = K(\{a\} \cap \{y \in E : y \geq b\}) = K \emptyset = \emptyset \not\subseteq b$$

Fissato G prendiamo ora in considerazione i due insiemi :

$$\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq K(KX \cap G)\}$$

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_G &= \{X \in \mathcal{C} : X \subseteq K(KX \cap G)\} = \{X \in \mathcal{C} : X \subseteq K(X \cap G)\} = \\ &= \{X \in \mathcal{C} : X = K(X \cap G)\} \end{aligned}$$

Ovviamente è :

$$(11) \quad X \in \mathcal{F}_G \text{ se e solo se } KX \in \overline{\mathcal{F}}_G.$$

Si ha :

PROP. 3. \mathcal{F}_G è chiuso rispetto alle unioni (anche infinite).

DIM. Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_G$. Si ha :

$$\begin{aligned} K(G \cap K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X) &\supseteq K(G \cap \bigcup_{X \in \mathcal{M}} KX) = K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} (G \cap KX) \supseteq \\ &\supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} K(G \cap KX) \supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X \end{aligned}$$

cioè

$$\bigcup_{X \in \mathcal{M}} X \in \mathcal{F}_G.$$

Minore interesse ha lo studio degli insiemi :

$$\mathcal{G}_X = \{G \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq K(KX \cap G)\}; \quad \overline{\mathcal{G}}_X = \{G \in \mathcal{C} : X \subseteq K(KX \cap G)\},$$

ottenuti fissando X .

Banalmente si ha :

PROP. 4. \mathcal{G}_X è permesso rispetto all'unione, ossia :

$$(12) \quad \text{se } G \in \mathcal{G}_X \text{ e } H \subseteq E, \quad G \cup H \in \mathcal{G}_X.$$

Quanto a $\overline{\mathcal{G}}_X$ si ha :

$$(13) \quad \overline{\mathcal{G}}_X = \{G \in \mathcal{C} : X \subseteq G\}$$

ossia se G è un chiuso le (9) sono sufficienti per la validità della (3).
(In altri termini si ha :

$$(14) \quad \text{se } G \in \mathcal{C} \text{ allora } \mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq G\}.$$

DIM. ovvia).

4. Allo scopo di facilitare, nei casi particolari, lo studio dell'insieme \mathcal{F}_G sarà utile considerare l'insieme :

$$\mathcal{R}_G = \{G \cap KX : X \in \mathcal{F}_G\}.$$

Sia poi \mathcal{C}_G l'insieme dei chiusi di $\langle G, K_G \rangle$.

PROP. 5. Si ha :

$$(15) \quad \mathcal{C}_G = \mathcal{R}_G = \{G \cap KX : X \subseteq E\} = \{G \cap X : X \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

DIM. Sia $F = G \cap KX$ con $X \subseteq E$. Si ha :

$$K_G F = K_G (G \cap KX) = G \cap K(G \cap KX) \subseteq G \cap KG \cap KX = G \cap KX = F$$

e poichè $\langle G, K_G \rangle$ è un C.G. si ha addirittura $K_G F = F$ ossia $F \in \mathcal{C}_G$.

Sia $F \in \mathcal{C}_G$ cioè ($F \subseteq G$ e) $F = K_G F$. È allora :

$$F = G \cap KF \text{ e quindi } F \subseteq K(G \cap KF) \text{ cioè } F \in \mathcal{F}_G \text{ onde } F \in \mathcal{R}_G.$$

È poi ovvio che è $\mathcal{R}_G \subseteq \{G \cap KX : X \subseteq E\}$ onde i primi tre insiemi scritti coincidono. Dalla (11) segue poi che

$$\mathcal{R}_G = \{G \cap X : X \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

Sia ora $F \in \mathcal{C}_G$ e indichiamo con \mathcal{C}_F l'insieme $\{X \in \overline{\mathcal{F}}_G : G \cap X = F\}$

Facilmente si ha :

$$\text{PROP. 6. } \overline{\mathcal{F}}_G = \bigcup_{F \in \mathcal{C}_G} \mathcal{C}_F.$$

DIM. Poichè per definizione è $\mathcal{C}_F \subseteq \overline{\mathcal{F}}_G$ basterà dimostrare che è $\overline{\mathcal{F}}_G \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{C}_G} \mathcal{C}_F$. Sia $X \in \overline{\mathcal{F}}_G$, posto $F = G \cap X$ segue dalla prop. 5 che F è un chiuso di $\langle G, K_G \rangle$ e si ha $X \in \mathcal{C}_F$. Ne segue la proposizione.

D'altronde è subito visto che per ogni $F \in \mathcal{C}_G$ è :

$$(16) \quad \mathcal{C}_F = \{KF\}.$$

Sia infatti $x \in \mathcal{C}_F$, cioè $X \in \overline{\mathcal{F}}_G$ e $X \cap G = F$.

La (3,1) diviene, tenuto conto del fatto che X è chiuso :

$$(17) \quad K(G \cap X) = X$$

cioè appunto $X = KF$.

Viceversa si ha :

$$G \cap KF = K_G F = F$$

e anche

$$K(G \cap KF) = KK_G F = KF$$

e da queste segue $KF \in \mathcal{C}_F$.

Si arriva così alla seguente :

$$\text{PROP. 7.} \quad \overline{\mathcal{F}}_G = \{KF : F \in \mathcal{C}_G\}.$$

La prop. 7 è notevolmente utile perchè riduce lo studio di $\overline{\mathcal{F}}_G$ a quello di \mathcal{C}_G .

D'altra parte \mathcal{F}_G è legato a $\overline{\mathcal{F}}_G$ dalla :

$$(18) \quad \mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : KX \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

5. La condizione (3) e l'equivalenza associata a K .

Ricordo che, secondo la terminologia di [4] (al quale rimando per maggiori dettagli) dato un C. G. $\langle E, K \rangle$ il preordine, \leq , e l'equivalenza R associati a K sono così definiti :

$$\left. \begin{array}{l} (19) \quad x \leq y \text{ se e solo se } y \in K\{x\} \\ (20) \quad xRy \text{ se e solo se } x \leq y \text{ e } y \leq x \text{ (se e solo se,} \\ \quad \quad \quad \text{quindi, } K\{x\} = K\{y\}) \end{array} \right\} (x, y \in E).$$

Indichiamo ora con Q il *quantore su E associato alla R* (cfr. [3]) definito, ricordo, da :

$$(21) \quad QX = \{y \in E : \text{esiste un } x \in X \text{ con } yRx\} \quad (X \subseteq E).$$

Ovviamente è :

$$(22) \quad Q \text{ è più fine di } K, \text{ cioè :}$$

$$(22,1) \quad QX \subseteq KX \quad (X \subseteq E)$$

inoltre,

$$(23) \quad QKX = KX \quad (X \subseteq E)$$

cioè :

$$(23,1) \quad \text{ogni chiuso di } \langle E, K \rangle \text{ è unione di elementi di } E/R.$$

$$(24) \quad KQX = KX.$$

Indichiamo ora con ϱ , σ , k , le relazioni binarie definite su $\mathcal{P}(E)$ dalle :

$$\left. \begin{aligned} (25) \quad X \varrho Y \text{ se e solo se } QX = QY \\ (26) \quad G \sigma X \text{ se e solo se } G, X \text{ soddisfano la (3)} \\ (27) \quad X k Y \text{ se e solo se } KX = KY \end{aligned} \right\} (X, Y, G \in \mathcal{P}(E)).$$

Si verifica facilmente che :

PROP. 8.

- (i) ϱ , k sono di equivalenza
- (ii) ϱ è più fine di k , cioè :

$$(ii, 1) \text{ se } X \varrho Y \text{ allora } X k Y \quad (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Vale la seguente

PROP. 9. Sia $G_1 \varrho G_2$, $X_1 k X_2$, ($G_1, G_2, X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$) allora è: $G_1 \sigma X_1$ se e solo se $G_2 \sigma X_2$. In particolare sono equivalenti le seguenti condizioni :

$$\left. \begin{aligned} (28,1) \quad G \sigma X \\ (28,2) \quad QG \sigma X \\ (28,3) \quad G \sigma QX \\ (28,4) \quad G \sigma KX \\ (28,5) \quad QG \sigma QX \\ (28,6) \quad QG \sigma KX \end{aligned} \right\} (G, X \in \mathcal{P}(E)).$$

DIM. Tenuto conto delle considerazioni precedenti basterà dimostrare che sono equivalenti le (28,1), (28,2), (28,4).

L'equivalenza fra la (28,1) e la (28,4) segue dalla (11).

Valga la (28,2) sia cioè :

$$K(QG \cap KX) = KX$$

allora è ⁵⁾:

$$\begin{aligned} K(G \cap KX) &= KQ(G \cap KX) = KQ(G \cap QKX) = \\ &= K(QG \cap QKX) = K(QG \cap KX) = KX, \end{aligned}$$

vale cioè la (28,1). Che poi la (28,1) implichi la (28,2) segue immediatamente dalla $G \subseteq QG$, tenuto conto della prop. 4.

⁵⁾ Ricordo che vale per Q la: $Q(X \cap QY) = QX \cap QY$ ($X, Y \in \mathcal{P}(E)$). Cfr. P. R. HALMOS [3]).

TESTI CITATI

- [1] P. M. COHN, *Universal Algebra*, New York 1965.
- [2] P. DUBREIL, M. L. DUBREIL JACOTIN, *Leçons d'algèbre moderne*, Paris 1961.
- [3] P. R. HALMOS, *Algebraic Logic*, New York 1962.
- [4] R. MAGARI, *Calcoli generali e spazi V_α* (Calcoli generali I). *Le Matematiche* Vol. XXI, Fasc. 1 (1966) pagg. 83-108.
- [5] R. MAGARI, *Su una classe equazionale di algebre*.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6-3-1967