Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Antonio Marino

Su un problema di diramazione riguardante i moti convettivi in un fluido viscoso

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 199-216
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__199_0>

SU UN PROBLEMA DI DIRAMAZIONE RIGUARDANTE I MOTI CONVETTIVI IN UN FLUIDO VISCOSO

ANTONIO MARINO *)

Qualche anno fa W. Velte [1] ha studiato il problema dei moti convettivi in un fluido viscoso in dimensione due. L'interesse principale della ricerca del Velte consiste nella individuazione di un caso di non unicità della soluzione di una equazione non lineare, vicina a quella ben nota di Navier-Stokes.

Nel presente lavoro i risultati di Velte sono estesi al caso tridimensionale. Il metodo seguito è di natura diversa da quello usato dal Velte (che fa ricorso al potenziale di corrente e quindi non è applicabile in dimensione maggiore di due).

Nella prima parte del lavoro (§§ 1-4) si dimostra l'esistenza di almeno una soluzione per un sistema più generale di quello che interessa nello studio dei moti convettivi. Mediante le note tecniche degli spazi Hilbertiani e dei teoremi di immersione, si ottiene una equazione non lineare che viene risolta col metodo di Leray-Schauder. Un punto importante è la maggiorazione a priori che viene ottenuta applicando un artificio analogo ad uno introdotto da O. A. Ladyzhenskaya [2].

Nella seconda parte viene considerato il problema della diramazione e cioè dell'insorgere di una ulteriore soluzione diversa da

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 24 del C. N. R..
Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

quella « di quiete ». La diramazione viene dimostrata nell'ipotesi che l'equazione linearizzata abbia autovalori di molteplicità dispari. Non mi è stato possibile vedere se questa ipotesi sia essenziale per la tesi. A questo proposito si può osservare che un noto teorema di diramazione di M. A. Krasnosel'skiĭ, che prescinde da ipotesi di questo tipo [3], non si può applicare perchè gli operatori che si ottengono non sono gradienti di funzionali.

Ringrazio il Prof. Prodi per i numerosi colloqui avuti con lui sull'argomento.

§ 1. **Richiami.**

Sia Ω un aperto limitato di R^3.

Sia p un numero reale maggiore di 1, indichiamo con L^p lo spazio di Banach delle funzioni reali definite in Ω, con la p-esima potenza sommabile, con la norma:

$$|\varphi|_{L^p} = \left[\int_\Omega |\varphi|^p \, dx\right]^{1/p} \quad \text{se} \quad \varphi \in L^p .$$

Nello spazio di Banach $(L^p)^3$ dei vettori $g = (g_1, g_2, g_3)$ di componenti $g_i \in L^p$ poniamo la norma:

$$|g|_{L^p} = \left|\int_\Omega |g|^p \, dx\right|^{1/p} \quad \text{con} \quad |g| = \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + g_3^2} \quad \text{se} \quad g \in (L^p)^3.$$

Nello spazio di Hilbert $(L^2)^3$ indichiamo il prodotto scalare canonico con:

$$(f \mid g) = \int_\Omega \sum_1^3{}_i f_i g_i \, dx \quad \text{se} \quad f = (f_1, f_2, f_3) \in (L^2)^3 \text{ e } g = (g_1, g_2, g_3) \in (L^2)^3.$$

Indichiamo con H^1 lo spazio di Hilbert delle funzioni reali, definite in Ω, con le derivate prime (in senso generalizzato) a quadrato sommabile, con il consueto prodotto scalare.

Indichiamo con $\overset{\circ}{H}{}^1$ il sottospazio delle funzioni di H^1 « nulle sulla frontiera » di Ω : $\overset{\circ}{H}{}^1$ è la chiusura nella topologia di H^1 della varietà delle funzioni continue con le derivate parziali prime e nulle fuori di un compatto contenuto in Ω.

Se $\zeta(x_1, x_2, x_3)$ e $\zeta'(x_1, x_2, x_3)$ sono due funzioni di H^1 introduciamo i seguenti simboli :

$$((\zeta \mid \zeta')) = \int_\Omega \sum_1^3{}_i \frac{\partial \zeta}{\partial x_i} \frac{\partial \zeta'}{\partial x_i} dx ; \quad \| \zeta \| = ((\zeta \mid \zeta))^{1/2} .$$

Se ζ e ζ' sono funzioni di $\overset{\circ}{H}{}^1$, $((\zeta \mid \zeta'))$ e $\| \zeta \|$ sono un prodotto scalare ed una norma in $\overset{\circ}{H}{}^1$ equivalenti a quelli subordinati da H^1.

Se $v = (v_1, v_2, v_3) \in (H^1)^3$ e $v' = (v_1', v_2', v_3') \in (H^1)^3$, poniamo :

$$((v \mid v')) = \int_\Omega \sum_1^3{}_{i,k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k'}{\partial x_i} dx ; \quad \| v \| = ((v \mid v))^{1/2} .$$

Se v e v' sono in $(\overset{\circ}{H}{}^1)^3$, $((v \mid v'))$ e $\| v \|$ designano un prodotto scalare ed una norma in $(\overset{\circ}{H}{}^1)^3$ equivalenti a quelli subordinati da $(H^1)^3$.

Sia $\mathcal{N}$ la varietà lineare delle terne di funzioni reali $v = (v_1, v_2, v_3)$ definite in Ω, indefinitamente derivabili e nulle fuori di un compatto contenuto in Ω, con :

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{in ogni punto di } \Omega.$$

Indichiamo con N lo spazio di Hilbert costituito dalla chiusura di $\mathcal{N}$ in $(L^2)^3$, con la topologia subordinata da $(L^2)^3$.

Indichiamo con N^1 lo spazio di Hilbert costituito dalla chiusura di $\mathcal{N}$ in $(\overset{\circ}{H}{}^1)^3$ con la topologia subordinata da $(\overset{\circ}{H}{}^1)^3$.

N^1 è incluso con continuità in N.

È noto [4] che la varietà ortogonale ad N in $(L^2)^3$ è costituita dai gradienti in senso generalizzato delle funzioni definite in Ω con le derivate prime a quadrato sommabile in Ω.

§ 2. Descrizione del problema.

Lo stato di un fluido in regime stazionario in un aperto $\Omega \subset R^3$, quando si tenga conto anche della temperatura, obbedisce al seguente sistema che generalizza quello ben noto di Navier-Stokes:

$$(1) \qquad \begin{cases} \sum_1^3 {}_i\, u_i(x) \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} - \Delta u(x) = -\operatorname{grad} P(x) + h(T(x), x) \\[2ex] \sum_1^3 {}_i\, u_i(x) \dfrac{\partial T(x)}{\partial x_i} - \Delta T(x) = 0 \\[2ex] \operatorname{div} u(x) = 0 \end{cases}$$

con il seguente significato dei simboli:

$$x \text{ è la terna } (x_1, x_2, x_3); \quad u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))$$

è la velocità di una particella elementare del fluido nel punto $x \in \Omega$; $P(x)$ è la pressione nel punto detto; $T(x)$ è la temperatura; $h(\varrho, x) = (h_1(\varrho, x), h_2(\varrho, x), h_3(\varrho, x))$ è una terna di funzioni reali definita in $R \times \Omega$ che esprime le forze agenti nel punto di coordinate x e l'influenza che ha su queste la temperatura.

Per semplicità di scrittura il coefficiente di viscosità e la densità sono posti eguali ad 1.

Sulla frontiera di Ω supporremo u nulla:

$$(2) \qquad u\,|_{\partial\Omega} = 0.$$

Assegnata la funzione h noi considereremo le soluzioni (u, T) in senso generalizzato delle (1) e (2).

Precisamente supponiamo valide d'ora in poi le ipotesi:

(3) Ω aperto, connesso, limitato, di Sobolev (per esempio possiamo supporre che Ω abbia la proprietà di cono)

h: $R \times \Omega \to R^3$ soddisfacente la: $|h(\varrho, x)| \leq f(x) + K|\varrho|$ $\forall (\varrho, x) \in R \times \Omega$ con $f \in L^2$, K costante reale; inoltre $h(\varrho, x)$ sia continua rispetto a ϱ e misurabile rispetto ad x.

Se φ è una funzione reale definita in Ω, indichiamo con $h(\varphi,\ )$ la funzione che ad $x \in \Omega$ fa corrispondere $h(\varphi(x), x) \in R^3$.

In particolare la (3) assicura, per noti risultati [5], che è $h(\varphi,\ ) \in (L^2)^3\ \forall\ \varphi \in L^2$.

Poniamo inoltre:

$$b(v', v'', v) = \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} v'_i \frac{\partial v''_k}{\partial x_i} v_k \, dx \quad \text{se } v' \in N^1 \text{ e } v'' \text{ e } v \text{ sono in } (H^1)^3$$

$$\tilde{b}(v', \zeta', \zeta) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} v'_i \frac{\partial \zeta'}{\partial x_i} \zeta \, dx \quad \text{se } v' \in N^1 \text{ e } \zeta' \text{ e } \zeta \text{ sono in } H^1.$$

Diciamo che la coppia (u, T) con $u \in N^1$ e $T \in H^1$ risolve le (1) e (2) in senso generalizzato se è:

$$(4) \qquad \begin{cases} ((u \mid v)) + b(u, u, v) = (h(T,\ ) \mid v) & \forall\ v \in N^1 \\ \tilde{b}(u, T, \zeta) + ((T \mid \zeta)) = 0 & \forall\ \zeta \in \mathring{H}^1. \end{cases}$$

Si comprende il significato delle (4) se si considera che le soluzioni regolari delle (1) e (2) soddisfano le (4) e che, viceversa, per ogni soluzione $(u, T) \in N^1 \times H^1$ sufficientemente regolare delle (4) esiste una P individuata a meno di una costante, tale che u, T e P risolvono le (1) e (2).

Osserviamo ancora che è:

$$(3') \quad \begin{cases} |h(\varphi,\ )|_{L^2} \leq c_1 + c_2 |\varphi|_{L^2}\ \forall\ \varphi \in L^2 \ (c_1 \text{ e } c_2 \text{ costanti reali}) \\ b(v', v'', v) = -b(v', v, v'') \text{ e dunque } b(v', v, v) = 0 \text{ quali che siano } v' \in N^1,\ v \text{ e } v'' \text{ in } (H^1)^3 \\ \tilde{b}(v', \zeta', \zeta) = -\tilde{b}(v', \zeta, \zeta') \text{ e dunque } \tilde{b}(v', \zeta, \zeta) = 0 \text{ quali che siano } v' \in N^1,\ \zeta \text{ e } \zeta' \text{ in } H^1 \\ |b(v', v'', v)| \leq |v'|_{L^4} |v''|_{L^4} \|v\| \text{ quali che siano } v' \in N^1,\ v \text{ e } v'' \text{ in } (H^1)^3 \\ |\tilde{b}(v', \zeta', \zeta)| \leq |v'|_{L^4} |\zeta'|_{L^4} \|\zeta\| \text{ quali che siano } v' \in N^1,\ \zeta \text{ e } \zeta' \text{ in } H^1. \end{cases}$$

La seconda e la terza delle (3′) sono facilmente giustificabili tenendo conto della densità di $\mathcal{N}$ in N^1 e del fatto che i vettori di N^1 hanno divergenza nulla.

Diremo che la T è assegnata sulla frontiera se è assegnata una funzione $\tau \in H^1$, e T è del tipo:

$$T = \tau + z \qquad \text{con} \qquad z \in \overset{\circ}{H}{}^1. \tag{5}$$

§ 3. Maggiorazioni a priori.

Proviamo in primo luogo che *le coppie* $(u, T) \in N^1 \times H^1$ *soluzioni del sistema delle* (4) *e* (5), *sono in una sfera di* $N^1 \times H^1$. (In $N^1 \times H^1$ consideriamo la struttura hilbertiana canonica del prodotto di spazi di Hilbert).

Siano infatti c e c' due numeri reali tali che:

$$|u|_{L^2} \leq c \, \| u \|, \qquad |u|_{L^4} \leq c' \, \| u \| \qquad \forall \, u \in (\overset{\circ}{H}{}^1)^3.$$

Poichè nella topologia di L^4, $\overset{\circ}{H}{}^1$ è denso in H^1, possiamo considerare $\bar{z} \in \overset{\circ}{H}{}^1$ tale che:

$$c_2 \, c^2 \, c' \, | \tau - \bar{z} |_{L^4} < 1. \tag{5′}$$

Se ora nelle (4) si sostituisce la (5) e si pone $v = u$, $\zeta = z + \bar{z}$, per le (3′) si ottiene:

$$\begin{cases} \| u \|^2 = (h(\tau + z, \quad) \mid u) \\ \| z + \bar{z} \|^2 = - \tilde{b}(u, \tau - \bar{z}, z + \bar{z}) - ((\tau - \bar{z} \mid z + \bar{z})) \end{cases}$$

e da questa si deduce:

$$\begin{cases} \| u \| \leq c_1 \, c + c_2 \, c \, | \tau - \bar{z} |_{L^2} + c_2 \, c^2 \, \| z + \bar{z} \| \\ \| z + \bar{z} \| \leq \| \tau - \bar{z} \| + c' \, \| u \| \, | \tau - \bar{z} |_{L^4}. \end{cases}$$

Se ad esempio nella seconda diseguaglianza scritta si maggiora $\| u \|$ come indica la prima, si ottiene:

$$\| z + \bar{z} \| (1 - c' c_2 c^2 | \tau - \bar{z} |_{L^4}) \leq \| \tau - \bar{z} \| + c' c_1 c | \tau - \bar{z} |_{L^4} + \\ + c' c_2 c | \tau - \bar{z} |_{L^2}.$$

Dalle (5′) si deduce allora la tesi.

Consideriamo ora, per ogni numero reale λ, il sistema:

$$(4'; \lambda) \qquad \begin{cases} ((u \mid v)) = \lambda \left[- b(u, u, v) + (h(\tau + z, \quad) \mid v) \right] & \forall\, v \in N^1 \\ ((z \mid \zeta)) = \lambda \left[((- \tau \mid \zeta)) - \tilde{b}(u, \tau + z, \zeta) \right] & \forall\, \zeta \in \mathring{H}^1. \end{cases}$$

In modo del tutto analogo al precedente, pur di prendere $\bar{z} \in \mathring{H}^1$ sufficientemente vicino a τ nella norma di L^4 si verifica che *le soluzioni* $(u, z) \in N^1 \times \mathring{H}^1$ *delle* $(4'; \lambda)$ *al variare di* λ *in un intervallo limitato sono tutte in una medesima sfera di* $N^1 \times \mathring{H}^1$.

§ 4. Rappresentazione del sistema (4)-(5) e teorema di esistenza.

Se nelle (4) assegnamo la T sulla frontiera mediante la (5), le incognite sono la $u \in N^1$ e la $z \in \mathring{H}^1$.

Vediamo ora che risolvere il sistema in questa forma equivale a risolvere un problema di punti uniti per un operatore completamente continuo in $N^1 \times \mathring{H}^1$.

Se $v' \in N^1$ e $\zeta' \in H^1$ certamente, per le (3′), $\tilde{b}(v', \zeta', \zeta)$ è un funzionale lineare continuo della variabile ζ in $\mathring{H}^1$.

Dunque esiste ed è unica una applicazione $\tilde{B} : N^1 \times H^1 \to \mathring{H}^1$ tale che sia:

$$\tilde{b}(v', \zeta', \zeta) = -((\tilde{B}(v', \zeta') \mid \zeta)) \quad \forall\, (v', \zeta') \in N^1 \times H^1, \ \forall\, \zeta \in \mathring{H}^1.$$

$\tilde{B}$ è evidentemente bilineare ed inoltre è completamente continua perchè risulta (per la (3′)):

$$| ((\tilde{B}(v', \zeta') \mid \zeta)) | \leq \| \zeta \| \, | \zeta' |_{L^4} | v' |_{L^4} \quad \forall\, (v', \zeta') \in N^1 \times H^1 \ \text{e} \ \forall\, \zeta \in \mathring{H}^1,$$

e dunque:

$$\| \widetilde{B}(v', \zeta') \| \leq | v' |_{L^4} | \zeta' |_{L^4} \quad \forall (v', \zeta') \in N^1 \times H^1$$

che esprime la continuità di $\widetilde{B}$ nel caso che in $N^1 \times H^1$ si consideri la topologia del prodotto $(L^4)^3 \times L^4$. Dal fatto che l'immersione naturale di $N^1 \times H^1$ in $(L^4)^3 \times L^4$ è completamente continua segue allora che $\widetilde{B}$ è completamente continua.

Se $v' \in N^1$, $b(v', v', v)$ è un funzionale lineare continuo della v in N^1. Dunque esiste ed è unico un operatore $B : N^1 \longrightarrow N^1$ tale che sia

$$b(v', v', v) = -((B(v') \mid v)) \text{ quali che siano } v \text{ e } v' \text{ in } N^1.$$

B è evidentemente quadratico ed inoltre completamente continuo come si può vedere in modo analogo al precedente.

Per la (3') è inoltre:

$$(6) \qquad ((\widetilde{B}(v, \zeta) \mid \zeta)) = 0 \;\; \forall v \in N^1, \;\; \forall \zeta \in \mathring{H}^1; ((B(v) \mid v)) = 0 \;\; \forall v \in N^1.$$

Sia poi $z_0 \in \mathring{H}^1$ tale che risulti:

$$((\tau \mid \zeta)) = -((z_0 \mid \zeta)) \quad \forall \zeta \in \mathring{H}^1$$

(anche $((\tau \mid \zeta))$ è un funzionale lineare continuo al variare di ζ in $\mathring{H}^1$).

Se infine $\zeta \in H^1$, $(h(\zeta, \;\;) \mid v)$ è un funzionale lineare continuo di v definito in N^1; dunque esiste una ed una sola applicazione $A : H^1 \longrightarrow N^1$ tale che sia:

$$(h(\zeta, \;\;) \mid v) = ((A(\zeta) \mid v)) \quad \forall v \in N^1, \quad \forall \zeta \in H^1.$$

A è completamente continua dato che la (3) assicura, come facilmente si vede, che è continuo in L^2 l'operatore che da $\varphi \in L^2$ porta a $h(\varphi, \;\;) \in L^2$ e dunque A è continuo anche se in H^1 si considera la topologia di L^2. Inoltre l'immersione naturale di H^1 in L^2 è completamente continua.

Con le posizioni fatte il sistema (4)-(5) può scriversi:

$$\begin{cases} ((u \mid v)) = ((B(u) \mid v)) + ((A(\tau + z) \mid v)) & \forall\, v \in N^1 \\ ((z \mid \zeta)) = ((\widetilde{B}(u, \tau + z) \mid \zeta)) + ((z_0 \mid \zeta)) & \forall\, \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1 . \end{cases}$$

Dunque le soluzioni $(u, z) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ delle (4)-(5) sono le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} u = B(u) + A(\tau + z) \\ z = \widetilde{B}(u, \tau + z) + z_0 . \end{cases} \tag{7}$$

Per risolvere queste equazioni si può usare il metodo di Leray-Schauder.

Se indichiamo con α l'operatore di $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ in sè definito dalle:

$$\alpha(u, z) = (B(u) + A(\tau + z), \widetilde{B}(u, \tau + z) + z_0)$$

da quanto detto per $B, \widetilde{B}$ ed A risulta che α è completamente continuo. Se $\lambda \in [0,1]$, le equazioni:

$$(u, z) = \lambda\alpha(u, z)$$

coincidono con le $(4'; \lambda)$ e dunque, per quanto visto nel paragrafo 3 esiste una sfera Σ in $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$, con centro nell'origine, tale che le eventuali soluzioni di queste equazioni, quale che sia λ in $[0, 1]$, sono tutte interne a Σ.

Da ciò e dal fatto che α è completamente continuo si deduce che, indicata con I l'identità in $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$, $I - \alpha$ e I sono omotope come applicazioni della frontiera S di Σ in $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ privato dell'origine.

Dunque su S il grado di $I - \alpha$ è 1.

Da ciò si deduce che la $I - \alpha$ deve avere in Σ qualche punto di zero.

Concludiamo con il seguente:

TEOREMA DI ESISTENZA:

nella ipotesi (3) *il sistema* (4) *con la* T *assegnata sulla frontiera in modo arbitrario con la* (5) *ammette sempre una soluzione* (u, T) *in* $N^1 \times H^1$, *e tutte le soluzioni con le medesime condizioni sulla frontiera sono in una sfera.*

§ 5. Problema della diramazione.

In questo paragrafo facciamo l'ipotesi che le « forze di massa » agenti sul fluido in esame siano conservative, e che le forze dovute alla temperatura dipendano linearmente da essa e siano orientate in ogni punto nella stessa direzione.

Precisamente supponiamo che sia:

$$h(\varrho, \;) = \operatorname{grad} q + \mu k \varrho \quad \text{con } q \in H^1, \ \mu \text{ costante reale,} \tag{8}$$

$$k \text{ versore dell'asse } x_3: (0, 0, 1).$$

Si può facilmente constatare, e lo verificheremo subito, che in questo caso esiste una soluzione « di quiete » $(u, \tau) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ con $u = 0$, e che anzi ogni coppia $(0, \tau)$ con τ funzione lineare della sola x_3 risolve le (4). Queste soluzioni risultano poi le sole con $u = 0$ se nelle (8) è $\mu \neq 0$.

In effetti perchè $(0, \tau) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ soddisfi le (4) nelle ipotesi (8), occorre e basta che sia:

$$(k \mu \tau \mid v) = 0 \quad \forall v \in N^1 \qquad \text{e cioè:} \quad k \mu \tau = \operatorname{grad} q' \quad \text{con} \quad q' \in H^1$$

$$((\tau|\zeta)) = 0 \quad \forall \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1 \ \text{ e cioè:} \quad \tau \text{ funzione armonica.}$$

Queste eguaglianze sono certamente vere se τ è funzione lineare della sola x_3. Se poi è $\mu \neq 0$ dalle:

$$\tau = \frac{1}{\mu} \frac{\partial q'}{\partial x_3}, \quad \frac{\partial q'}{\partial x_1} = \frac{\partial q'}{\partial x_2} = 0$$

segue che τ dipende solo da x_3 e, dato che è armonica, deve essere lineare.

Considerata ora una soluzione $(0, \tau)$ con $\tau(x_1, x_2, x_3) = -\nu x_3 + \nu_0$ (ν e ν_0 reali) ci si chiede se esistono altre soluzioni delle (4) nelle ipotesi (8), con le medesime condizioni al contorno della $(0, \tau)$, e se anzi queste altre soluzioni possono essere ottenute come diramazione della soluzione di quiete al variare dei parametri μ e ν.

Nella ipotesi (8), le soluzioni (u, T) delle (4) soddisfacenti la $T - \tau \in \overset{\circ}{H}{}^1$ con $\tau = -\nu x_3 + \nu_0$, si ottengono con la $T = \tau + z$ dalle soluzioni $(u, z) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ del sistema:

$$(9\,;\ \mu, \nu) \qquad \begin{cases} ((u \mid v)) + b(u, u, v) = \mu\,(k\,z \mid v) & \forall v \in N^1 \\ ((z \mid \zeta)) + \widetilde{b}(u, z, \zeta) = \nu\,(u_3 \mid \zeta) & \forall\, \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1. \end{cases}$$

Quali che siano μ e ν, dunque, le $(9\,;\ \mu, \nu)$ ammettono la soluzione (u, z) con $u = 0$, $z = 0$.

Possiamo vedere direttamente come si particolarizzano le (7) nelle ipotesi (8) in modo da rappresentare le $(9\,;\ \mu, \nu)$.

Per la (8) l'applicazione $A : H^1 \longrightarrow N^1$ che compare nelle (7) può scriversi nella forma $A = \mu\, L$, con $L : H^1 \longrightarrow N^1$ applicazione lineare completamente continua, soddisfacente le:

$$(k\,\zeta \mid v) = (\zeta \mid v_3) = ((L(\zeta) \mid v)) \qquad \forall\ v \in N^1, \quad \forall\ \zeta \in H^1.$$

E risulta $L(\tau) = 0$ perchè $k\,\tau$ è un gradiente.

Inoltre, fissata la funzione τ, l'operatore $\widetilde{B}(v, \tau)$ si può rappresentare nella forma:

$$\widetilde{B}(v, \tau) = \nu\, \widetilde{L}(v)$$

con $\widetilde{\mathrm{L}} : N^1 \longrightarrow \overset{\circ}{H}{}^1$ applicazione lineare completamente continua.

Ricordando la definizione di $\widetilde{B}$ si ottiene:

$$((\widetilde{L}(v) \mid \zeta)) = (v_3 \mid \zeta) \qquad \forall\ v \in N^1, \ \forall\ \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1.$$

Dunque le $(9\,;\ \mu, \nu)$ sono equivalenti alle:

$$(10\,;\ \mu, \nu) \qquad \begin{cases} u = B(u) + \mu\, L(z) \\ z = \widetilde{B}(u, z) + \nu\, \widetilde{L}(u) & (\nu \in R, \mu \in R). \end{cases}$$

§ 6. Teoremi di unicità e di diramazione.

Allo scopo di valutare la molteplicità delle soluzioni $(u, z) \in \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ delle $(10\,; \mu, \nu)$, al variare dei parametri reali μ e ν, conviene considerare vari casi.

a) Se è $\nu\mu = 0$ le $(10\,; \mu, \nu)$ ammettono solo la soluzione $(0, 0)$. Infatti se è ad esempio $\nu = 0$ deve essere $z = \widetilde{B}(u, z)$ e allora per la prima delle (6), risulta $z = 0$. La prima delle $(10\,; \mu, \nu)$ e la seconda delle (6) danno poi $u = 0$. Altrettanto si può verificare se è $\mu = 0$.

b) Per il seguito osserviamo che, se $(u, z) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ soddisfa le $(10\,; \mu, \nu)$, allora quale che sia $\varrho \in R$ con $\varrho \neq 0$, $\left(u, \dfrac{z}{\varrho}\right)$ soddisfa le $\left(10; \mu\varrho, \dfrac{\nu}{\varrho}\right)$. Da questo e dalla *a*) segue che la unicità delle soluzioni delle $(10\,; \mu, \nu)$ dipende solo dal prodotto $\nu\mu$.

Consideriamo ora le $(10; \mu, \nu)$ con $\nu\mu < 0$. Se $\varrho_0 \in R$ è tale che sia $\varrho_0\,\mu = -\dfrac{\nu}{\varrho_0} = \sqrt{-\nu\mu}\left(\varrho_0 = -\dfrac{\nu}{\sqrt{-\nu\mu}}\right)$, le $(10\,; \mu, \nu)$ equivalgono dunque alle:

$$\begin{cases} u = B(u) + \sqrt{-\nu\mu}\, L\left(\dfrac{z}{\varrho_0}\right) \\[2ex] \dfrac{z}{\varrho_0} = \widetilde{B}\left(u, \dfrac{z}{\varrho_0}\right) - \sqrt{-\nu\mu}\,\widetilde{L}(u). \end{cases}$$

Se si fa il prodotto scalare in N^1 della prima di queste per u, e il prodotto scalare in $\overset{\circ}{H}{}^1$ della seconda per z, e si sommano membro a membro le due eguaglianze che si ottengono, si trova che deve essere $u = z = 0$ a causa delle (6) e della

$$(v_3 \mid \zeta) = ((L(\zeta) \mid v)) = ((\widetilde{L}(v) \mid \zeta)) \quad \forall\, v \in N^1, \quad \forall\, \zeta \in \overset{\circ}{H}{}^1.$$

Dunque se è $\nu\mu < 0$ le $(10\,; \mu, \nu)$ ammettono solo la soluzione nulla.

c) Consideriamo ora le $(10\,;\,\mu,\nu)$ con $\nu\,\mu > 0$.

Se $\varrho_1 \in R$ è tale che sia $\varrho_1\,\mu = \dfrac{\nu}{\varrho_1} = \sqrt{\nu\,\mu}\left(\varrho_1 = \dfrac{\nu}{\sqrt{\nu\,\mu}}\right)$, le $(10\,;\,\mu,\nu)$ ammettono la soluzione (u, z) se e solo se la coppia (u', z') con:

$$
(11) \qquad \begin{cases} u' = u \\ z' = \dfrac{z}{\varrho_1} \end{cases}
$$

risolve le $(10\,;\,\lambda,\lambda)$:

$$
\begin{cases} u' = B(u') + \lambda\, L(z') \\ z' = \widetilde{B}(u', z') + \lambda\, \widetilde{L}(u') \end{cases} \qquad \text{con } \lambda = \sqrt{\nu\,\mu}.
$$

Indichiamo con β un operatore di $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ in sè definito dalle:

$$
\beta(v, \zeta) = (B(v),\ \widetilde{B}(v, \zeta)) \quad \forall\, (v, \zeta) \in H^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1.
$$

β è quadratico e completamente continuo, e risulta per la (6):

$$
((\beta(v, \zeta) \mid (v, \zeta))) = 0 \ \forall\, (v, \zeta) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1.
$$

Introduciamo l'operatore A di $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ in sè definito dalle:

$$
A(v, \zeta) = (L(\zeta), \widetilde{L}(v)) \qquad \forall\, (v, \zeta) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1.
$$

Le $(10\,;\,\lambda,\lambda)$ si possono scrivere:

$$
(u', z') = \beta(u', z') + \lambda\, A(u', z').
$$

Mettiamo in evidenza alcune proprietà di A.

A è diverso dall'operatore nullo ed è completamente continuo perchè tali sono L e $\widetilde{L}$;

A è autoaggiunto:

$$
((A(v, \zeta) \mid (v', \zeta'))) = ((L(\zeta) \mid v')) + ((\widetilde{L}(v) \mid \zeta')) = (\zeta \mid v'_3) + (v_3 \mid \zeta') = ((A(v', \zeta') \mid (v, \zeta))).
$$

Se $\lambda \in R$ è un valore singolare di Λ, anche $-\lambda$ lo è ed ha la stessa molteplicità di λ: infatti se $(\lambda, v, \zeta) \in R \times N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ soddisfa il sistema:

$$\begin{cases} \lambda L(\zeta) = v \\ \lambda \widetilde{L}(v) = \zeta \end{cases}$$

anche $(-\lambda, v, -\zeta)$ lo soddisfa.

Ne segue, fra l'altro, che $\| \Lambda \|^{-1}$ e $-\| \Lambda \|^{-1}$ sono valori singolari di Λ.

Ora se $(u', z') \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ soddisfa le $(10; \lambda, \lambda)$, facendo il prodotto scalare di entrambi i membri dell'equazione per (u', z') si ottiene:

$$\| (u', z') \| \leq \lambda \| \Lambda \| \| (u', z') \|$$

per la diseguaglianza di Schwarz.

Perchè sia $(u, z) \neq (0, 0)$ deve allora essere $\lambda \| \Lambda \| \geq 1$.

Ne deduciamo che se nelle $(10; \mu, \nu)$ è $\nu\mu > 0$ con $\sqrt{\nu\mu} < \dfrac{1}{\| \Lambda \|}$ l'unica soluzione possibile è quella nulla.

d) Esaminiamo ora le $(10; \mu, \nu)$ con $\nu\mu > 0$ e $\sqrt{\nu\mu} \geq \dfrac{1}{\| \Lambda \|}$ (ricordiamo che $\dfrac{1}{\| \Lambda \|}$ è il minimo valore singolare positivo di Λ).

Consideriamo le equazioni:

$$(u'', z'') = \lambda [\beta (u'', z'') + \Lambda (u'', z'')], \qquad \lambda \in R. \tag{12 ; λ}$$

Dividendo entrambi i membri delle $(10; \lambda, \lambda)$ per λ^2 e tenendo conto delle (11) si trova che le $(10; \mu, \nu)$ ammettono la soluzione $(u, z) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ se e solo se la $(12; \sqrt{\nu\mu})$ ammette la soluzione (u'', z'') con

$$\begin{cases} u'' = \dfrac{1}{\sqrt{\nu\mu}} u \\ z'' = \dfrac{1}{\nu} z . \end{cases} \tag{13}$$

Le $(12\,;\lambda)$ presentano nella forma consueta il problema dei valori singolari per un operatore non lineare.

Se λ varia in un intervallo limitato le soluzioni delle $(12\,;\lambda)$ descrivono un insieme limitato dato che le $(12\,;\lambda)$ sono un caso particolare delle $(4'\,;\lambda)$.

Verifichiamo ora come da questo si deduce che le $(10\,;\mu,\nu)$ ammettono soltanto la soluzione nulla anche se è $\sqrt{\nu\mu}\,\|A\| = 1$, e inoltre che, indicato con $m(\lambda)$ l'estremo superiore delle norme dei vettori (u'', z'') soddisfacenti le $(12\,;\lambda)$, $m(\lambda)$ è un massimo e risulta:

$$\lim_{\lambda \to \|A\|^{-1}} m(\lambda) = 0. \tag{14}$$

Infatti se è $(u'', z'')\,\|A\| = \beta(u'', z'') + A(u'', z'')$ con $(u'', z'') \neq (0, 0)$, facendo il prodotto scalare per (u'', z''), per le (6) si ottiene:

$$\|A\|\,\|(u'', z'')\|^2 = ((A(u'', z'')\,|\,(u'', z'')))$$

e cioè (u'', z'') rende massima la forma:

$$\frac{|((A(v,\zeta)\,|\,(v,\zeta)))|}{\|(v,\zeta)\|} \quad (\text{con } (v,\zeta) \neq (0,0)).$$

Dato che A è autoaggiunto e completamente continuo, se ne deduce che (u'', z'') è autovettore di A di autovalore $\|A\|$, e poichè soddisfa le $(12\,;\|A\|^{-1})$ deve essere $\beta(u'', z'') = 0$. Dunque ogni vettore del tipo $\sigma(u', z')$ con $\sigma \in R$ risolve le $(12\,;\|A\|^{-1})$ mentre le soluzioni devono essere un insieme limitato.

È poi evidente che $m(\lambda)$ è un massimo perchè $\beta + A$ è completamente continuo e dunque l'insieme delle soluzioni è compatto dato che è limitato e chiuso.

Se infine la (14) non fosse vera esisterebbe una successione $(u'_n, z'_n, \lambda_n) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1 \times R$, con (u'_n, z'_n) soluzione della $(12\,;\lambda_n)$, per la quale sarebbe vero che $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \|A\|^{-1}$ e non risulterebbe $\lim\limits_{n\to\infty} (u'_n, z'_n) = 0$.

Per la completa continuità di $\beta + A$ si potrebbe supporre che la successione limitata (u'_n, z'_n) sia convergente ad un vettore non nullo. Questo allora risolverebbe la $(12\,;\|\varLambda\|^{-1})$ contrariamente a quanto si è già visto.

Consideriamo ora il problema della diramazione della soluzione.

Giacchè $\beta+\varLambda$ è completamente continuo e $\varLambda$ è il suo differenziale nella origine (β è quadratico) si può affermare [7, cap. 3, § 2] che se λ_0 è un valore singolare di $\varLambda$ di molteplicità dispari, esso è punto di diramazione per $\beta+\varLambda$, nel senso che in ogni intorno del punto $(0, 0, \lambda_0) \in N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1 \times R$ (con la topologia canonica del prodotto) si trova una terna (u', z', λ), con $(u', z') \neq (0, 0)$, tale che (u', z') soddisfi la $(12\,;\lambda)$.

Nel nostro caso però sappiamo che al variare di λ in un intervallo limitato, le corrispondenti soluzioni delle $(12\,;\lambda)$ descrivono un insieme limitato. Possiamo allora affermare più precisamente che:

se λ_0 è un valore singolare di $\varLambda$ di molteplicità dispari, esso è punto di diramazione per $\beta+\varLambda$, ed esiste tutto un intervallo aperto (α, β) avente un estremo in λ_0, tale che per ogni $\lambda \in (\alpha, \beta)$ le $(12;\lambda)$ ammettono una soluzione non nulla ; se in particolare è $\lambda_0 = \|\varLambda\|^{-1}$ vale la (14).

Si verifica rapidamente questa affermazione facendo uso del metodo di Leray-Schauder.

Sia infatti $\delta \in R$, $\delta > 0$ tale che l'intervallo $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ non contenga valori singolari di $\varLambda$ diversi da λ_0; sia Σ una sfera con centro nell'origine, tale che le soluzioni delle $(12\,;\lambda)$, al variare di λ in $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ cadono tutte all'interno di Σ.

Supponiamo che esista un numero λ' con (ad esempio) $\lambda_0-\delta < < \lambda' < \lambda_0$ tale che le $(12\,;\lambda')$ ammettano soltanto la soluzione nulla. Allora proviamo che per ogni λ tale che sia $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0+\delta$, l'operatore $I-\lambda[\beta+\varLambda]$ si annulla su un vettore non nullo di $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ (I è l'identità in $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$). Se così non fosse, per un certo λ, con $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0+\delta$, l'origine sarebbe un punto di zero isolato per $I-\lambda[\beta+\varLambda]$ ed anzi il suo indice sarebbe eguale al grado di $I-\lambda[\beta+\varLambda]$ sulla frontiera S di Σ. Ma $I-\lambda'[\beta+\varLambda]$ e $I-\lambda[\beta+\varLambda]$ sono omotope come applicazioni di S in $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ privato nell'origine, dato che $\beta+\varLambda$ è completamente continuo e per come è presa Σ.

Dunque per $I-\lambda'[\beta+\varLambda]$ e $I-\lambda[\beta+\varLambda]$ l'origine sarebbe un punto di zero isolato di eguale indice.

D'altra parte è noto [7, cap. 3, § 2] che, se Γ è un operatore completamente continuo in uno spazio di Banach E, differenziabile in un suo punto unito isolato x, e se il differenziale Γ' in x non ha per valore singolare 1, allora x è un punto di zero isolato per $I - \Gamma$ di indice $(-1)^{\gamma}$, dove γ indica la somma delle molteplicità dei valori singolari di Γ' che siano positivi e minori di 1.

Per questo, giacchè λ_0 è valore singolare di Λ di molteplicità dispari, risulterebbe anche vero che per $I - \lambda' [\beta + \Lambda]$ e $I - \lambda[\beta + \Lambda]$ l'origine è un punto di zero isolato di indici diversi.

Si è così giunti ad un assurdo.

In definitiva si può concludere con il seguente:

TEOREMA DI DIRAMAZIONE:

I) *se le coppie* $(\mu, \nu) \in R^2$ *variano in un insieme limitato di* R^2 *le corrispondenti soluzioni delle* $(9\,;\mu, \nu)$ *in* $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ *descrivono un insieme limitato*;

II) *l'unicità o la molteplicità delle soluzioni delle* $(9\,;\mu, \nu)$ *dipende solo dal prodotto* $\nu\mu$ *;*

III) *se è* $\nu\mu \leq \| \Lambda \|^{-2}$ *(*$\| \Lambda \|^{-1}$ *è il minimo valore singolare positivo di* Λ*), le* $(9\,;\mu, \nu)$ *ammettono in* $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ *soltanto la soluzione nulla ;*

IV) *se* $\| \Lambda \|^{-1}$ *è valore singolare di molteplicità dispari per* Λ*, per ogni punto* $(\mu_0, \nu_0) \in R^2$ *con* $\nu_0 \mu_0 = \| \Lambda \|^{-2}$ *esiste un intorno* U *tale che quale che sia* $(\mu, \nu) \in U$ *con* $\nu\mu > \| \Lambda \|^{-2}$ *le* $(9\,;\mu, \nu)$ *ammettono anche una soluzione non nulla in* $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$*, e inoltre, indicato con* $M(\mu, \nu)$ *il massimo delle norme in* $N^1 \times \overset{\circ}{H}{}^1$ *delle* (u, z) *che risolvano le* $(9\,;\mu, \nu)$*, risulta :*

$$\lim_{(\mu, \nu) \to (\mu_0, \nu_0)} M(\mu, \nu) = 0.$$