RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

Un lemma di immersione per i gruppi abeliani senza elementi di altezza infinita

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__1_0>

UN LEMMA DI IMMERSIONE PER I GRUPPI ABELIANI SENZA ELEMENTI DI ALTEZZA INFINITA.

ADALBERTO ORSATTI *)

INTRODUZIONE. Con la parola gruppo intendiamo gruppo abeliano; la notazione è quella additiva.

Ad ogni gruppo G si associano un gruppo G^* ed un omomorfismo $\varphi : G \to G^*$ in questo modo: per ogni numero primo p si considera il gruppo $G_p^* = (G/p^\infty G) \otimes Z_p$ — dove $p^\infty G$ è l'intersezione dei sottogruppi $p^n G$ ($n = 1, 2, \ldots$) e Z_p è l'anello dei razionali il cui denominatore è primo con p — e si definisce in modo naturale l'omomorfismo $\varphi_p : G \to G_p^*$; allora G^* è il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei gruppi G_p^*, al variare di p nell'insieme dei numeri primi, e φ è definito per mezzo degli omomorfismi φ_p. Si dimostra quindi il seguente lemma di immersione: *φ è iniettivo se e solo se G è senza elementi di altezza infinita; l'immagine $\varphi(G)$ di φ è pura in G^*; $G^*/\varphi(G)$ è divisibile.* Si prova inoltre che per ogni omomorfismo di gruppi $f: G \to H$ esiste un unico omomorfismo $f^*: G^* \to H^*$ compatibile con f, e che $(G^*)^*$ è canonicamente isomorfo a G^*.

Una conseguenza immediata del lemma suddetto è la seguente: il completamento naturale $\widehat{G}$ di un gruppo G ([2], [5], [6]) è isomorfo a quello di G^* e cioè al prodotto diretto dei completamenti p-adici dei G_p^*. Come applicazione di questa proprietà, con metodi topologici elementari e facendo uso di alcuni risultati di Kaplansky [7] e Fuchs [4], si dimostrano due teoremi già stabiliti da D. K. Harrison con metodi omologici ([5], [6]). Precisamente:

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) Se H è un sottogruppo puro del gruppo G, $\widehat{G}$ è isomorfo alla somma diretta dei completamenti di H e di G/H.

2) Se G è un gruppo ridotto e libero da torsione e se α_p, per ogni primo p, è la dimensione dello spazio vettoriale G/pG sul corpo con p elementi, $\widehat{G}$ è individuato dai cardinali α_p e dipende solo da essi.

L'autore ringrazia il dott. F. Menegazzo per le frequenti ed utili conversazioni sull'argomento.

1. Incominciamo con alcune notazioni e definizioni. Indichiamo con Z l'anello degli interi, con p un numero primo, con Z_p l'anello dei razionali il cui denominatore è primo con p, con i_p l'iniezione canonica di Z in Z_p. Siano N e P rispettivamente l'insieme degli interi positivi e quello dei numeri primi.

Sia G un gruppo. Denotiamo con $T(G)$ il sottogruppo di torsione di G e con $T_p(G)$ la componente p-primaria di $T(G)$. Siano $p^\infty G$ il sottogruppo di G formato dagli elementi di p-altezza infinita e G_∞ quello formato dagli elementi di altezza infinita:

$$p^\infty G = \bigcap_n p^n G, \qquad G_\infty = \bigcap_n nG, \qquad n \in N.$$

Risulta:

$$G_\infty = \bigcap_p p^\infty G, \qquad p \in P.$$

La *topologia naturale* ([2], [5]) su G si definisce prendendo come base di intorni dello zero i sottogruppi $nG, n \in N$. G con questa topologia diventa un gruppo topologico, il quale risulta di Hausdorff se e solo se $G_\infty = 0$. Per questo motivo, oltre che per brevità, diremo che un gruppo G senza elementi di altezza infinita (tale cioè che $G_\infty = 0$) è un gruppo di Hausdorff. Osserviamo che un gruppo libero da torsione è di Hausdorff se e solo se esso è ridotto.

2. Sia G un gruppo qualunque. Moltiplicando tensorialmente per G la sequenza esatta di Z-moduli:

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{i_p} Z_p \longrightarrow Z_p/Z \longrightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta:

$$G \xrightarrow{j_p} G \otimes Z_p \longrightarrow G \otimes (Z_p/Z) \longrightarrow 0$$

dove, per ogni $g \in G$, $j_p(g) = g \otimes 1$, $1 \in Z_p$. Chiameremo $G \otimes Z_p$ il *p-localizzato* di G e lo indicheremo con G_p. Per le proprietà dei moduli di frazioni, [1], il nucleo S_p di j_p è formato dagli elementi periodici di G il cui periodo è primo con p. Il conucleo $G_p/j_p(G)$ di j_p è un gruppo periodico divisibile e con componente p-primaria nulla, come si deduce dalla struttura di Z_p/Z e da alcune proprietà del prodotto tensoriale di gruppi ([3], pag. 251); $j_p(G)$ è *p-puro*, [4], in G_p.

Moltiplicando tensorialmente per Z_p la sequenza esatta $0 \longrightarrow T(G) \longrightarrow G \longrightarrow G/T(G) \longrightarrow 0$, in cui le mappe sono quelle naturali, si vede che $T(G_p)$ è isomorfo a $T_p(G)$. In particolare se G è periodico G_p è isomorfo alla componente p-primaria di G, mentre se G è libero da torsione j_p è iniettivo e G_p è un gruppo libero da torsione avente lo stesso rango di G.

Ogni elemento di G_p è divisibile per ogni intero non nullo primo con p ed il quoziente è unico. G_p, cioè, è uno Z_p-modulo (modulo = modulo unitario).

Sia H un sottogruppo di G. Poichè la moltiplicazione tensoriale per Z_p conserva le inclusioni, H_p è un sottogruppo di G_p; inoltre:

P.1. *Se H è p-puro in G, allora H_p è puro in G_p.*

Questo si verifica direttamente tenendo conto del fatto che ogni elemento di G_p può scriversi nella forma $g \otimes \dfrac{1}{s}$, dove $g \in G$ ed s è un intero primo con p.

Il sottogruppo di G_p formato dagli elementi di altezza infinita coincide con $p^\infty G_p$ ed il gruppo $G_p/p^\infty G_p$ è di Hausdorff.

Per ogni gruppo G e per ogni numero primo p, indicheremo con G_p^* il gruppo $G_p/p^\infty G_p$ e con φ_p, oppure con $\overset{G}{\varphi_p}$, l'omomorfismo di G in G_p^* ottenuto componendo j_p con la proiezione canonica ϱ_p di G_p su G_p^*. Chiameremo G_p^* il *p-localizzato di Hausdorff* di G. Anche G_p^* è uno Z_p-modulo.

Si verifica facilmente che se G è libero da torsione $p^\infty G_p$ coincide con il sottogruppo divisibile massimale di G_p ed anche G_p^* è libero da torsione, mentre se G è periodico G_p^* è isomorfo a $T_p(G)/p^\infty T_p(G)$.

3. Moltiplichiamo tensorialmente per Z_p la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow p^\infty G \longrightarrow G \xrightarrow{\delta_p} G/p^\infty G \longrightarrow 0 \tag{1}$$

nella quale le mappe sono quelle naturali. Mettiamo quindi in evidenza gli omomorfismi canonici dei gruppi della (1) nei rispettivi p-localizzati ed i nuclei di tali omomorfismi, ed osserviamo che il nucleo S_p di j_p è contenuto in $p^\infty G$. Otteniamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & S_p \arrow[r] \arrow[d] & S_p \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & p^\infty G \arrow[r] \arrow[d, "j'_p"] & G \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "j_p"] & G/p^\infty G \arrow[r] \arrow[d, "j''_p"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (p^\infty G) \otimes Z_p \arrow[r] & G_p \arrow[r, "\beta_p"] & (G/p^\infty G) \otimes Z_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1'}$$

che risulta commutativo e con righe e colonne esatte. Dimostriamo ora che

$$(p^\infty G) \otimes Z_p = p^\infty G_p \,. \tag{2}$$

È evidente che ogni elemento di $(p^\infty G) \otimes Z_p$ è contenuto in $p^\infty G_p$. Viceversa sia $g \otimes \frac{1}{s}$ $(g \in G, \frac{1}{s} \in Z_p)$ un elemento di $p^\infty G_p$; allora $g \otimes 1$, che appartiene a $j_p(G)$, è divisibile in G_p per ogni potenza di p. Ricordando che $j_p(G)$ è p-puro in G_p, segue che $g \otimes 1$ ha p-altezza infinita in $j_p(G)$. Questo significa che per ogni $n \in N$ esiste un elemento $g' \in G$ tale da aversi $p^n g' - g \in S_p \subseteq p^\infty G$. Allora g è divisibile per p^n in G; quindi $g \in p^\infty G$ attesa l'arbitrarietà di n; di conseguenza $g \otimes \frac{1}{s} \in (p^\infty G) \otimes Z_p$. La (2) è così provata.

Paragonando l'ultima riga del diagramma (1') con la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow p^\infty G_p \longrightarrow G_p \xrightarrow{\varrho_p} G_p^* \longrightarrow 0$$

dove ϱ_p è la proiezione canonica di G_p su G_p^*, si vede che esiste un unico isomorfismo γ_p di $(G/p^\infty G) \otimes Z_p$ su G_p^* tale che $\varrho_p = \gamma_p \circ \beta_p$. È lecito pertanto identificare, come noi faremo, $(G/p^\infty G) \otimes Z_p$ con G_p^* e φ_p con il prodotto delle mappe δ_p e j_p'' oppure delle mappe j_p e β_p.

Esaminando il diagramma (1′) si riconosce subito che il nucleo di φ_p è $p^\infty G$, mentre il conucleo di φ_p è isomorfo al conucleo di j_p'', e quindi al gruppo $(G/p^\infty G) \otimes (Z_p/Z)$ che è divisibile, periodico e con componente p-primaria nulla; $\varphi_p(G)$ è p-puro in G_p^*.

4. Per ogni gruppo G indichiamo con G^* il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei gruppi G_p^* al variare di p in P:

$$G^* = \prod_p G_p^*, \, p \in P.$$

G^* è chiaramente un gruppo di Hausdorff. Per ogni $a \in G^*$ sia a_p la sua p-componente; consideriamo quindi l'omomorfismo $\varphi: G \longrightarrow G^*$ così definito:

$$\varphi(g)_p = \varphi_p(g); \; g \in G, \, p \in P.$$

Chiameremo φ l'*omomorfismo canonico* di G in G^* e lo indicheremo anche con φ^G. Dimostriamo ora il seguente

LEMMA D'IMMERSIONE. *Siano G un gruppo, G^* il prodotto diretto dei suoi p-localizzati di Hausdorff G_p^* $(p \in P)$, φ l'omomorfismo canonico di G in G^*. Allora:*

1) *il nucleo di φ è G_∞, per cui φ è iniettivo se e solo se G è di Hausdorff;*

2) *$\varphi(G)$ è puro in G^*;*

3) *$G^*/\varphi(G)$ è divisibile.*

DIMOSTRAZIONE. Risulta $\varphi(g) = 0$ $(g \in G)$ se e solo se, per ogni $p \in P$, $\varphi_p(g) = 0$ cioè $g \in p^\infty G$. Dunque il nucleo di φ è G_∞.

Sia ora p un numero primo arbitrario e supponiamo $p^n b = \varphi(g)$ con $n \in N$, $b \in G^*$, $g \in G$. Si ha allora in G_p^*: $p^n b_p = \varphi_p(g)$, da cui $b_p = \varphi_p(g')$, $g' \in G$ poichè, come è stato precedentemente osservato,

$G_*/\varphi_p(G)$ non ha elementi di periodo p. Abbiamo dunque: $p^n b_p = p^n \varphi_p(g') = \varphi_p(g)$, quindi $p^n g' - g \in p^\infty G$. Allora g è divisibile per p^n in G; cioè $g = p^n g''$, $g'' \in G$. Risulta perciò:

$$p^n b = \varphi(g) = \varphi(p^n g'') = p^n \varphi(g'').$$

Abbiamo così provato che $\varphi(G)$ è p-puro in G^* per ogni $p \in P$: questo significa che $\varphi(G)$ è puro in G^*.

Dimostriamo infine che $G^*/\varphi(G)$ è divisibile. Allo scopo basta provare che esso è divisibile per un arbitrario numero primo q; cioè che, fissato un elemento $b \in G^*$, esiste un elemento $b' \in G^*$ tale da aversi: $b - qb' \in \varphi(G)$. Ora b' esiste se e solo se esiste un elemento $a \in \varphi(G)$ tale che:

$$b - a \in q\, G^* \tag{3}$$

e questa condizione è verificata se e solo se, per ogni $p \in P$, risulta:

$$b_p - a_p \in q\, G_p^*.$$

Se $p \neq q$ le relazioni precedenti valgono qualunque sia l'elemento $a \in \varphi(G)$, poichè in tal caso $q\, G_p^* = G_p^*$. Basta dunque trovare un elemento $a \in \varphi(G)$ per il quale si abbia $b_q - a_q \in q\, G_q^*$. A questo punto ricordiamo che, come è stato osservato alla fine del n^0 precedente, $G_q^*/\varphi_q(G)$ è divisibile: pertanto $G_q^* = \varphi_q(G) + q\, G_q^*$ e quindi $b_q \in \varphi_q(g) + q\, G_q^*$ dove g è un opportuno elemento di G. Allora l'elemento $a = \varphi(g) \in \varphi(G)$ soddisfa la (3). Il lemma è così provato.

Osserviamo che G^* è naturalmente dotato di una struttura di Z^*-modulo, dove Z^* è l'anello prodotto diretto degli Z_p.

5. P.2. *Siano G ed H gruppi, φ^G e φ^H gli omomorfismi canonici rispettivamente di G in G^* e di H in H^*. Allora per ogni omomorfismo $f: G \to H$ esiste un unico omomorfismo $f^*: G^* \to H^*$ tale che:*

$$f^* \circ \varphi^G = \varphi^H \circ f \tag{4}$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè $f(p^\infty G) \subseteq p^\infty H$, f induce, in modo naturale, un omomorfismo $f^{(p)}: G/p^\infty G \to H/p^\infty H$; l'omomorfismo

$f_p^* : G_p^* \longrightarrow H_p^*$, ottenuto moltiplicando tensorialmente $f^{(p)}$ per l'identità su Z_p, è una estensione di $f^{(p)}$; risulta pertanto $f_p^* \circ \varphi_p^G = \varphi_p^H \circ f$. Allora l'omomorfismo $f^* : G^* \longrightarrow H^*$ così definito:

$$f^*(a)_p = f_p^*(a_p) \, (a \in G^*, p \in P)$$

verifica la (4). Sia $\bar{f}$ un altro omomorfismo di G^* in H^* soddisfacente la condizione $\bar{f} \circ \varphi^G = \varphi^H \circ f$; allora f^* ed $\bar{f}$ coincidono sopra l'immagine di φ^G. Introduciamo nei gruppi di Hausdorff G^* ed H^* la topologia naturale e ricordiamo che gli omomorfismi sono, per questa topologia, delle applicazioni continue, [2]. Per il lemma d'immersione il conucleo di φ^G è divisibile, quindi l'immagine di φ^G è un sottogruppo denso di G^* ([5], Lemma 3.5.). Allora f^* ed $\bar{f}$ sono due applicazioni continue dello spazio topologico G^* nello spazio di Hausdorff H^* le quali coincidono sopra un sottoinsieme denso di G^*; di conseguenza, per un ben noto teorema di topologia generale, esse coincidono su tutto G^*. La dimostrazione è così completa.

Osserviamo che f^* è un omomorfismo di Z^*-moduli.

Per ogni omomorfismo f di gruppi siano $f^{(p)}, f_p^*, f^*$ gli omomorfismi individuati da f nel modo precedentemente descritto. Dimostriamo quindi le proposizioni seguenti:

P.3. *Se G è un gruppo ed f è la proiezione canonica di G su G/G_∞, l'omomorfismo $f^* : G^* \longrightarrow (G/G_\infty)^*$ è un isomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che il sottogruppo degli elementi di p-altezza infinita di G/G_∞ è $(p^\infty G)/G_\infty$. Pertanto $f^{(p)}$ e, di conseguenza, f_p^* sono isomorfismi. Allora anche f^* è un isomorfismo.

P.4. *Siano G un gruppo, H un sottogruppo puro di G, f l'iniezione canonica di H in G; allora, per ogni $p \in P$, l'omomorfismo $f_p^* : H_p^* \longrightarrow G_p^*$ è iniettivo e la sua immagine è un sottogruppo puro di G_p^*. Di conseguenza f^* è iniettivo e la sua immagine è un sottogruppo puro di G^*.*

DIMOSTRAZIONE. Poichè $p^\infty H = (p^\infty G) \cap H$, $f^{(p)}$ è iniettivo e la sua immagine coincide con $(H + p^\infty G)/p^\infty G$ il quale è un sottogruppo p-puro di $G/p^\infty G$. Passando ai p-localizzati di $H/p^\infty H$ e di

$G/p^\infty G$, l'immagine di $f^{(p)}$ va nell'immagine di f_p^* che è pura in G_p^* per la P.1. Infine f_p^* è iniettivo poichè la moltiplicazione tensoriale per Z_p conserva le iniezioni.

6. Richiamiamo brevemente alcune proprietà della topologia naturale.

Sia G un gruppo di Hausdorff dotato di questa topologia. Il completamento naturale $\widehat{G}$ di G è il completamento del gruppo G rispetto alla struttura uniforme (generabile con una metrica) indotta dalla topologia naturale. La topologia di $\widehat{G}$ è ancora la topologia naturale, $\widehat{G}$ è uno $\widehat{Z}$-modulo (dove $\widehat{Z}$ indica il completamento di Z) e G si può identificare con un sottogruppo puro e denso di $\widehat{G}$, [2].

Sia H un sottogruppo di G: se H è puro in G, la topologia relativa di H coincide con la topologia naturale ed $\widehat{H}$ si può identificare con la chiusura di H in $\widehat{G}$, [2]; H è denso in G se e solo se G/H è divisibile, [5]; se H è puro e denso in G allora $\widehat{H} \cong \widehat{G}$, [2].

In particolare, se G è uno Z_p-modulo, la sua topologia naturale coincide con la topologia p-adica, definita prendendo come base di intorni dello zero i sottogruppi $p^n G \, (n \in N)$, e $\widehat{G}$ è uno $\widehat{Z}_p$-modulo; $\widehat{Z}_p$ è l'anello degli interi p-adici.

Se G non è di Hausdorff chiameremo completamento naturale di G, e lo indicheremo ancora con $\widehat{G}$, il completamento naturale del gruppo di Hausdorff G/G_∞. In ogni caso $\widehat{G}$ è di Hausdorff ed è isomorfo al limite proiettivo dei gruppi $G/nG \, (n \in N)$ rispetto agli omomorfismi naturali $G/nG \longrightarrow G/mG$, $nG \subseteq mG$, [6].

7. La proposizione seguente è un corollario immediato del lemma d'immersione.

P.5. *Il completamento naturale di un gruppo G è isomorfo a quello di G^*.*

Infatti G/G_∞ è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di G^*.

Chiameremo G^* il *pre-completamento naturale* di G. Questa definizione ci sembra giustificata anche dalle considerazioni seguenti:

1) Sia $f: G \longrightarrow H$ un omomorfismo di gruppi: esiste un unico omomorfismo $f^*: G^* \longrightarrow H^*$ di Z^*-moduli compatibile con f, come

risulta dalla P.2. Il carattere funtoriale della corrispondenza che associa G^* a G ed f^* ad f è manifesto.

2) $(G^*)^*$ è isomorfo a G^*. Infatti $p^\infty G^*$ è formato dagli elementi di G^* la cui p-componente è nulla; quindi $G^*/p^\infty G^*$ è isomorfo a G_p^* il quale, essendo uno Z_p-modulo, coincide con il suo p-localizzato.

Sia A un anello con unità. Definiamo A_p^* ed A^* a partire dal gruppo additivo di A ed osserviamo che $p^\infty A$ è un ideale di A. La moltiplicazione di $A/p^\infty A$ si estende canonicamente ad A_p^* che risulta così un anello. Se (il gruppo additivo di) A è di Hausdorff, la moltiplicazione di cui è dotato A^* in quanto prodotto diretto degli anelli A_p^* è una estensione di quella di A. Tale estensione è unica.

Si vede così che le proprietà del completamento naturale di un gruppo G, o di un anello A, di Hausdorff esposte nel Lemma 1.4. di [2] sono anche proprietà del pre-completamento. In particolare G^* è libero da torsione se G è libero da torsione; A^* ha la stessa unità di $\varphi(A)$ ed è commutativo se A è commutativo.

Per ogni gruppo G, la struttura di $\widehat{G}$ è determinata da quella di G^* nel modo seguente.

TEOREMA 1. *Il completamento naturale di un gruppo G è isomorfo al prodotto diretto dei completamenti dei p-localizzati di Hausdorff di G:*

$$\widehat{G} \cong \prod_p \widehat{G_p^*} \quad (p \in P)$$

DIMOSTRAZIONE. Il ragionamento è analogo a quello usato in [2] per determinare la struttura di $\widehat{Z}$. Poniamo $K = \prod_p \widehat{G_p^*}$ $(p \in P)$ ed osserviamo che se n è un intero positivo primo con p risulta $n\,\widehat{G_p^*} = \widehat{G_p^*}$ poichè $\widehat{G_p^*}$ è uno $\widehat{Z}_p$-modulo. Pertanto in K la topologia naturale coincide con la topologia prodotto delle topologie naturali dei $\widehat{G_p^*}$. Allora K, in quanto prodotto topologico di spazi uniformi completi, è completo. Per ogni $p \in P$, G_p^* è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di $\widehat{G_p^*}$; per cui G^* è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di K. Quindi $\widehat{G^*} \cong K$ e la conclusione segue dalla P.5.

Per ogni $p \in P$, si può definire il *completamento p-adico* di un gruppo G come il completamento di $G/p^\infty G$ rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia p-adica. $G/p^\infty G$ è isomorfo a $\varphi_p(G)$, $\varphi_p(G)$ è p-puro in G_p^*, il quale è uno Z_p-modulo, ed il gruppo $G_p^*/\varphi_p(G)$ è p-divisibile: quindi tale completamento è isomorfo a $\widehat{G_p^*}$. Pertanto dal teorema 1 discende il seguente

COROLLARIO. *Il completamento naturale di un gruppo è isomorfo al prodotto diretto dei suoi completamenti p-adici, al variare di p in P.*

8. A titolo di applicazione dei risultati precedenti dimostreremo ora due teoremi già provati per altra via da D. K. Harrison ([5], [6]).

TEOREMA 2. *Siano G un gruppo di Hausdorff ed H un sottogruppo puro di G. Allora $\widehat{H}$ è un sommando diretto di $\widehat{G}$ e $(G/H)^\wedge$ è isomorfo ad un sommando diretto di $\widehat{G}$ complementare di $\widehat{H}$.*

OSSERVAZIONE. Nell'enunciato e nella dimostrazione di questo teorema si considera G come sottogruppo puro e denso di $\widehat{G}$, identificando $\widehat{H}$ con la chiusura di H in $\widehat{G}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $p \in P$ possiamo identificare, per la P.4, H_p^* con un sottogruppo puro di (G_p^* e quindi di) $\widehat{G_p^*}$. Con lo stesso ragionamento usato nella dimostrazione del Lemma 20 di [7] si vede che anche $\widehat{H_p}^*$ è puro in $\widehat{G_p^*}$; pertanto ([7], Teorema 23) $\widehat{H_p}^*$ è un sommando diretto di $\widehat{G_p^*}$. Allora, per il teorema 1, $\widehat{H}$ è un sommando diretto di $\widehat{G}$.

Il completamento del gruppo $B = G/H$ è per definizione il completamento del gruppo di Hausdorff B/B_∞. Osserviamo che un elemento $a \in G$ rappresenta un elemento di B_∞ se e solo se, per ogni $n \in N$, esistono un elemento $g_n \in G$ ed uno $h_n \in H$ tali da aversi: $a - ng_n = h_n$. Questo significa che a è limite della successione $\{h_n, n \in N\}$ di elementi di H. Pertanto $B/B_\infty = G/\overline{H}$ dove $\overline{H}$ è la chiusura di H in G, cioè: $\overline{H} = G \cap \widehat{H} \subseteq \widehat{H}$. Consideriamo ora la proiezione canonica $f: G \longrightarrow G/\overline{H}$. Essa si estende per continuità ad un omomorfismo $\widehat{f}: \widehat{G} \longrightarrow (G/\overline{H})^{\wedge} = (G/H)^{\wedge}$. Poiché $\widehat{f}$ è continuo e $(G/H)^{\wedge}$ è di Hausdorff, il nucleo Ker $\widehat{f}$ di $\widehat{f}$ contiene la chiusura di H in $\widehat{G}$, cioè Ker $\widehat{f} \supseteq \widehat{H}$. Siano x un elemento di Ker $\widehat{f}$ e $\{x_n, n \in N\}$ una successione di elementi di G convergente verso x. Allora la successione $\{f(x_n)\}$ converge verso lo zero e si può supporre che $f(x_n) \in n(G/\overline{H}) = n f(G)$. Esistono perciò, per ogni $n \in N$, un elemento $g_n \in G$ ed uno $h_n \in \overline{H} \subseteq \widehat{H}$ tali da aversi $x_n - n g_n = h_n$; quindi la successione $\{h_n\}$ converge verso x il quale pertanto appartiene ad $\widehat{H}$. Dunque Ker $\widehat{f} = \widehat{H}$. Per la prima parte del teorema, $\widehat{f}(\widehat{G})$ è isomorfo ad un sommando diretto K di $\widehat{G}$ complementare di $\widehat{H}$: $\widehat{G} = \widehat{H} \oplus K$. Si verifica immediatamente che la topologia naturale di $\widehat{G}$ è la topologia prodotto delle topologie naturali di $\widehat{H}$ e di K, quindi ([8], Teorema 25, Cap. 6) K è completo. Allora $\widehat{f}(\widehat{G})$ è completo, contiene $(G/\overline{H})$ come sottogruppo puro ed è contenuto in $(G/\overline{H})^{\wedge}$; pertanto $\widehat{f}(\widehat{G}) = (G/H)^{\wedge}$.

Per ogni numero cardinale α sia $\Gamma_p(\alpha)$ il prodotto diretto di α gruppi ciascuno isomorfo al gruppo degli interi p-adici (se $\alpha = 0, \Gamma_p(\alpha) = 0$); per ogni gruppo G indichiamo con $\alpha_p(G)$ la dimensione dello spazio vettoriale G/pG sul corpo Z/pZ. Possiamo ora enunciare il

TEOREMA 3. *Il completamento naturale di un gruppo ridotto e libero da torsione G è isomorfo ad un sommando diretto del prodotto diretto Γ dei gruppi $\Gamma_p(\alpha_p(G))$, $p \in P$; se poi tutti gli α_p sono finiti si ha $\widehat{G} \cong \Gamma$.*

Due gruppi ridotti e liberi da torsione G ed H hanno completamenti isomorfi se e solo se $\alpha_p(G) = \alpha_p(H)$ per ogni ogni $p \in P$.

La dimostrazione si conduce in questo modo: si prova prima il teorema quando la topologia naturale coincide con quella p-adica, nel qual caso i gruppi liberi da torsione sono Z_p-moduli; quindi si applica il teorema 1.

Dimostriamo pertanto le proposizioni seguenti.

P.6. *Se M è uno Z_p-modulo ridotto e libero da torsione, $\widehat{M}$ è isomorfo al completamento naturale di uno Z_p-modulo libero di rango $\alpha_p(M)$. Due Z_p-moduli ridotti e liberi da torsione L ed M hanno completamenti isomorfi se e solo se $\alpha_p(L) = \alpha_p(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia S un sistema di elementi di M rappresentante una base dello spazio vettoriale M/pM. Si verifica immediatamente che S, nel gruppo M, è un sistema massimale di elementi *p-indipendenti*, [4]. Pertanto il sottogruppo B generato da S è libero di rango $\alpha_p(M)$, è p-puro in M ed il gruppo M/B è p-divisibile ([4], Lemma 3). Poichè gli elementi di S sono indipendenti sopra Z, essi sono indipendenti anche sopra Z_p; quindi il sotto-Z_p-modulo B_p generato da S è libero di rango $\alpha_p(M)$; inoltre B_p è puro in M ed M/B_p è divisibile. Allora $\widehat{B_p} \simeq \widehat{M}$. La seconda parte della proposizione è conseguenza della prima e del fatto che, essendo M puro e denso in $\widehat{M}$, risulta: $M/pM = M/(M \cap p\widehat{M}) \simeq (M + p\widehat{M})/p\widehat{M} = \widehat{M}/p\widehat{M}$.

P.7. *Se M è uno Z_p-modulo ridotto e libero da torsione, $\widehat{M}$ è isomorfo ad un sommando diretto di $\Gamma_p(\alpha_p(M))$. Se poi $\alpha_p(M)$ è finito, si ha $\widehat{M} \simeq \Gamma_p(\alpha_p(M))$.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\Gamma = \Gamma_p(\alpha_p(M))$ e sia K uno Z_p-modulo libero di rango $\alpha_p(M)$. Si ha: $K = \sum_i K_i$, $i \in I$, dove l'insieme indiciante I ha cardinale $\alpha_p(M)$ e K_i è isomorfo al gruppo additivo di Z_p per ogni $i \in I$. Per mezzo delle inclusioni naturali $K = \sum_i K_i \subseteq \subseteq \prod_i K_i \subseteq \prod_i \widehat{K}_i = \Gamma$ si vede che K è un sottogruppo puro di Γ. Osserviamo ora che Γ è completo nella topologia naturale.

Dopo aver identificato Γ con un sottogruppo puro e denso di $\widehat{\Gamma}$, siano ξ un elemento di $\widehat{\Gamma}$ e $\{\xi_n, n \in N\}$ una successione di Cauchy in Γ convergente verso ξ in $\widehat{\Gamma}$. Per ogni $i \in I$, la successione $\{\xi_{n,i}\}$, ottenuta proiettando su $\widehat{K}_i$ la $\{\xi_n\}$, è di Cauchy in $\widehat{K}_i$, quindi converge verso un elemento $f_i(\xi) \in \widehat{K}_i$ e si verifica subito che $f_i(\xi)$ non varia sostituendo la successione $\{\xi_n\}$ con un'altra di Cauchy in Γ e convergente verso ξ in $\widehat{\Gamma}$. In particolare, se $\xi \in \Gamma, f_i(\xi)$ coincide con la i-com-