Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

C. Bardos

Approximation semi discrète de la solution d'une équation variationnelle, astreinte à vérifier des conditions aux limites dépendant du temps

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 41-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__41_0>

APPROXIMATION SEMI DISCRETE DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION VARIATIONELLE, ASTREINTE A VERIFIER DES CONDITIONS AUX LIMITES DEPENDANT DU TEMPS

C. BARDOS *) **)

I. Le problème exact.

Soient deux espaces de Hilbert K et H; on notera $(\,,\,)_K, |\cdot|_K$ (resp. $(\,,\,)_H, |\cdot|_H$) le produit scalaire et la norme dans K (resp. dans H). K et H vérifient:

(1,1) $K \subset H$ algèbriquement et topologiquement; K est dense dans H. K est séparable (ce qui entraine que H est séparable). L'injection de K dans H est compacte.

On se donne une famille $V(t)_{t \in [T_0, T_1]}$ d'espaces de Hilbert dépendant du paramètre t variable dans l'intervalle $[T_0, T_1]$ ($-\infty \leq T_0 < T_1 \leq +\infty$) et on suppose que:

(1,2) pour tout $t \in [T_0, T_1]$ $V(t)$ est un sous espace vectoriel fermé de K dense dans H.

(1,3) La famille $\{V(t)\}$ dépend mesurablement de t c'est à dire que si on note $P(t)$ la projection de K sur $V(t)$, pour tout $k \in K$, l'application $t \longrightarrow P(t)\,k$ de $[T_0, T_1]$ dans K est mesurable.

*) Indirizzo dell'A.: 11 rue Laromiguière, Paris, 5.
**) Attaché de Recherches au C. N. R. S.

On considère $L^2(T_0, T_1 ; V(t))$ défini par $L^2(T_0, T_1 ; V(t)) = \{v(t), v(t) \in L^2(T_0 T_1 ; K) \, v(t) \in V(t)$ pour presque tout $t \in [T_0 T_1]\}$. $L^2(T_0 T_1 ; V(t))$ est un sous espace fermé de $L^2(T_0, T_1 ; K)$ c'est donc un espace de Hilbert pour la norme induite par $L^2(T_0, T_1 ; K)$.

On désigne par $\Phi(T_0, T_1 ; V(t))$ le sous espace de $L^2(T_0, T_1 ; V(t))$ défini par : $\Phi(T_0, T_1 ; V(t)) = \{\varphi(t) \in L^2(T_0, T_1 ; V(t)), \varphi'(t) \in L^2(T_0, T_1 ; ; H) \; \varphi(T_1) = 0\}$.

On se donne pour tout $t \in [T_0, T_1]$ une forme $a(t ; u, v)$ sesquilinéaire continue sur K, telle que :

(1,4) Pour tout couple u, v d'éléments de K la fonction $t \longrightarrow a(t ; u, v)$ est mesurable.

(1,5) Il existe une constante M telle que pour tout couple d'éléments de K et pour tout $t \in [T_0, T_1]$ on ait :

$$| a(t ; u, v) | \leq M \, | u |_K \cdot | v |_K .$$

(1,6) Il existe $\alpha > 0$ indépendante de t telle que pour tout $u \in K$ et tout $t \in [T_0, T_1]$ on ait :

$$\operatorname{Re} \; a(t ; u, v) \geq \alpha \, | u |_K^2 .$$

On sait d'après [1] que la condition (1,4) entraine la mesurabilité (et la condition (1,5) la sommabilité) de la fonction $t \longrightarrow a(t ; u(t), v(t))$ pour tout couple $u(t), v(t)$ d'éléments de $L^2(T_0, T_1 ; V(t))$.

On pose alors le problème suivant :

Problème I.1.

Soit $u_0 \in H$ arbitraire (si $T_0 = -\infty$ on prend $u_0 = 0$) et $f \in L^2(T_0, T_1 ; K)'$ trouver u vérifiant pour tout $\varphi \in \Phi(T_0, T_1 ; V(t))$:

$$(1.7) \qquad \int_{T_0}^{T_1} [a(t ; u(t), \varphi(t)) - (u(t), \varphi(t))_H] \, dt = (u_0, \varphi(T_0))_H + \int_{T_0}^{T_1} < f(t), \varphi(t) >_{K', K} \; dt.$$

On sait d'après [6] que le problème I.1 admet toujours au moins une solution.

Soit V un sous espace fermé de K dense dans H, V' son dual, puisque V est dense dans H, H s'identifie à un sous espace dense de V' ; puisque V est fermé dans K V' s'identifie à un sous espace fermé de K'. Grâce à la première identification, on sait d'après [7] (théorème 4.1 chap. III) que $[V, V']_{1/2} = H$.

On suppose alors

(1,8) Il existe un sous espace fermé de K dense dans H, V, tel que $V \subset V(t)$ pour tout $t \in [T_0, T_1]$ et que $[K, V']_{1/2} = H$.

Paur t réel quelconque on pose $V^*(t) = V(t)$ si $t \in [T_0, T_1]$ et $V^*(t) = V$ si $t \notin [T_0, T_1]$. On désigne par $H^{1/2}(H)$ l'espace $H^{1/2}(-\infty, +\infty; H)$ et on suppose que parmi les sous espaces vérifiant (1,8) il en existe un, toujours noté V tel que :

(1,9) $\Phi(-\infty, +\infty; V^*(t))$ est dense dans $L^2(-\infty, +\infty; V^*(t)) \cap H^{1/2}(H)$.

Baiocchi montre dans [2] (théorème 5,2) que sous les hypothèses (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,8), (1,9) la solution du problème I.1 est unique et dépend continuement des données dans le sens suivant :

(1,10) $$| u |_{L^2(T_0, T_1; V(t))} \leq C \left(f_{L^2(T_0, T_1; K')} + | u_0 |_H\right)$$

REMARQUE.

L'hypothèse (1,8) sera explicitement utilisée dans la suite alors que l'hypothèse (1,9) pourra être remplacée par l'hypothèse abstraite plus forte ; « la solution du problème I.1 est unique ».

II. Approximation en la variable de temps.

On suppose que $T_0 = 0$ et que $T_1 = T$ est fini, pour tout entier m on pose $k = T/m$ et on se donne une suite $V_k(q)$, $0 \leq q \leq m-1$ de sous espaces *fermés* de K *contenant* V.

On sait que si la fonction $u(t)$ est mesurable il en est de même de la fonction $P(t)\,u(t)$ [2]. On note alors P l'application de $L^2(0, T; K)$ dans $L^2(0, T; V(t))$ définie par $P(u(t)) = P(t) \cdot u(t)$. On a bien entendu $|P| \leq 1$. De même on note $P_k(q)$ la projection de K sur le sous espace $V_k(q)$ et $P_k(q)$ l'endomorphisme de $L^2(0, T; K)$ défini par

$$P_k \cdot u(t) = P_k(q) \cdot u(t) \text{ pour tout } t \in [qk, (q+1)k[.$$

Enfin on désigne par $L^2(0, T; V_k)$ le sous espace vectoriel des fonctions u constantes sur tout intervalle de la forme $[qk, (q+1)k[$. (on note $u(q)$ la valeur de la fonction u sur l'intervalle $[qk, (q+1)k[$. vérifiant $u(q) \in V_k(q)$).

On dira que la famille $V_k(q)$ est consistante à la famille $V(t)$ si :

(2,1) Pour tout $u(t) \in L^2(0, T; K)$ on a :

$$\lim_{k \to 0} |P \cdot u(t) - P_k \cdot u(t)|_{L^2(0, T; K)} = 0$$

Et si :

Pour toute fonction $\varphi \in \Phi(0, T; V(t))$, on peut trouver une suite φ_k, $\varphi_k \in L^2(0, T; V_k)$ vérifiant :

(2,2) φ_k tend vers φ dans $L^2(0, T; K)$; $\varphi_k(0)$ (resp. $\varphi_k(T-k)$) tend vers $\varphi(0)$ (resp. $\varphi(T) = 0$) dans H lorsque k tend vers zero.

(2,3) $\nabla \varphi_k$ [1] est borné dans $L^2(0, T-k; K)$ indépendemment de k.

On remarque alors que la conjonction de (2,2) et de (2,3) entraine que pour tout $u \in L^2(0, T; H)$ on a :

$$\lim_{k \to 0} \int_0^{T-k} (u(t), \nabla \varphi_k(t))_H \, dt = \int_0^T (u, \varphi')_H \, dt.$$

[1]) Comme d'habitude pour toute fonction u definie sur $[T_0, T_1]$, ∇u (resp. $\overline{\nabla} u$) désigne la fonction définie sur $[T_0, T_1 - k]$ (resp $[k, T_1]$) par la relation :

$$\nabla u = \frac{1}{k}[u(t+k) - u(t)] \left(\text{resp. } \overline{\nabla} u = \frac{1}{k}[u(t) - u(t-k)]\right).$$

On définit alors pour tout $t \in [0, T]$ la forme sesquilinéaire $a_k(t\,; u, v)$ et l'élément $f_k(t)$ de K' par les relations

(2,4) $$a_k(t\,; u, v) = 1/k \int_{qk}^{(q+1)k} a(t\,; u, v)\, dt$$

(2,5) $$\langle f_k(t), v \rangle_{K', K} = 1/k \int_{qk}^{(q+1)k} \langle f(t), v \rangle_{K', K}\, dt$$

pour t appartenant à l'intervalle $[qk, (q+1)k[$.

Enfin on se donne une suite d'éléments de H, u_{k0}, vérifiant l'assertion :

(2,6) $u_{k0} \in V_k(0)$ et la suite u_{k0} tend vers u_0 dans H lorsque k tend vers 0 ce qui est possible car $V_k(0)$ est dense dans H.

on pose alors le problème approché suivant:

PROBLÈME II.1

Trouver une fonction $u_k \in L^2(0,T\,; V_k)$ *vérifiant*

(2,7) $u_k(q) \in V_k(q)$ *pour tout* $q\,; 0 \leq q \leq m-1$

(2,8) $$u_k(0) = u_{k0}$$

(2,9) $(\bar{V} u_k(q), v)_H + a_k(q\,; u_k(q), v) = (f_k(q), v)_{K', K}$

pour tout $v \in V_k(q)$ *et tout* q, $1 \leq q \leq m-1$.

PROPOSITION II.1

Le problème II.1 *admet une unique solution.*

En effet en écrivant (2,9) sous la forme:

(2,10) $(u_k(q), v)_H + k \cdot a_k(q\,; u_k(q), v) = \langle k \cdot f_k(q) + u_k(q-1), v \rangle_{K'K}$

on voit que le second membre est une forme linéaire continue en $v \in V_k(q)$; quant au premier c'est une forme sesquilinéaire en u_k(q), v, véririfiant pour tout élément v de $V_k(q)$:

$$\mathrm{Re}\,(v, v) + k \cdot a_k(q\,;\, v, v) \geq k \cdot \alpha \,|\, v\,|^2_{V_k(q)} \tag{2,11}$$

$u_k(q)$ est ainsi déterminé de manière unique à partir de $u_k(q-1)$. et on a le

THÉORÈME II.1

Sous les hypothèses (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,8), (1,9) (*l'hypothèse* (1,9) *pouvant être remplacée par l'hypothèse plus forte* : « *la solution du problème exact est unique* » *si la famille* $V_k(q)$ *est consistante à la famille* $V(t)$ *la suite* $u_k(t)$ *tend vers l'unique solution du problème* I.1 *au sens de* $L^2(0, T\,; H)$, *lorsque* k *tend vers zéro.*

On désigne par $\mathfrak{F}(V_k^*)$ le sous espace de $\mathfrak{F}(-\infty, +\infty\,; K)$ des fonctions $v(t)$ vérifiant :

(2,12) $v(t)$ est constante sur tout intervalle de la forme $[qk, (q+1)\,k\,]$ $-\infty \leq q \leq +\infty$ (on note $v(q)$ la valeur de la fonction $v(t)$ sur un tel intervalle)

(2,13) $v(t)\,|_{[0,\,T]} \in L^2(0, \mathrm{T}\,;\, V_k)$ et $v(t) \in V$ pour $t \notin [0,\mathrm{T}]$.

Pour la démonstration du théorème II.1 on commence par prolonger $u_k(t)$ en une fonction $u_k(t) \in \mathfrak{F}(V_k^*)$.

Prolongement de $u_k(t)$.

Pour $m \leq q$ on définit la fonction $u_k(t)$ par les relations

$$(\overline{V}\, u_k(q), v)_H + (u_k(q), v)_V = 0 \tag{2,14}$$

pour tout v de V et tout $q, m \leq q$.

(On voit que, compte tenu de l'hypothèse $u_k(q) \in V$, (2,14) détermine $u_k(q)$ de manière unique).

De même en changeant q en $-q$ on voit que le problème : trouver pour $q < 0$ une suite $u_k^0\,(q)$ vérifiant :

$$u_k^0\,(0) = u_{k0} \quad \text{et} \quad u_0^k(q) \in V \qquad \text{pour tout } q < 0 \tag{2,15}$$

$$-\,(\nabla\, u_k^0\,(q),\, v)_H + (u_k^0\,(q),\, v)_V = 0 \tag{2,16}$$

pour tout v de V.

Admet une unique solution qui (en ajoutant dans chaque membre de (2,16) $(\nabla\, u_k^0\,(q) + \overline{\nabla}\, u_k^0\,(q),\, v))$ vérifie :

$$(\overline{\nabla}\, u_k^0\,(q), v)_H + (u_k^0\,(q),\, v)_V = (\nabla\, u_k^0\,(q) + \overline{\nabla}\, u_k^0(q),\, v)_H\,. \tag{2,17}$$

On pose alors :

$$a_k^*\,(t\,;\,u,\,v) = \begin{cases} a_k\,(q\,;\,u,\,v) & \text{pour} \quad t \in [qk, (q+1)\,k[\\ & \text{avec} \quad 1 \leq q \leq m-1 \\ (u,\,v)_V & \text{pour} \quad t \notin [k,\,T] \end{cases} \tag{2,18}$$

$$f_k^*\,(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad t > T \\ f_k\,(q)\ \text{pour}\ t \in [qk, (q+1)\,k[\,,\ 1 < q \leq m-1. \\ \nabla\, u_0^k\,(q) + \overline{\nabla}\, u_k^0(q)\ \text{pour}\ t < k\,. \end{cases} \tag{2,19}$$

Remarque.

Comme $u_k^0\,(q)$ appartient à V pour $t \leq k$, en remplacant v par $\overline{\nabla}\, u_k^0\,(q)$ dans (2,16) et sommant de p à -1 (p entier négatif) il vient :

$$-\int_{pk}^{-k} |\, \nabla\, u_k^0\,(t)\,|_H^2\, dt + \int_{pk}^{-k} (u_k^0\,(t),\, \nabla\, u_k^0\,(t)_V\, dt = 0. \tag{2,20}$$

Soit en prenant deux fois de la partie réelle du premier membre et en utilisant un lemme de [8] il vient :

$$-\,2\int_{pk}^{-k} |\, \nabla\, u_k^0\,(t)\,|_H^2\, dt - k\int_{pk}^{-k} (\nabla\, u_k^0\,(t),\, \nabla\, u_k^0\,(t))_V\, dt + \int_{pk}^{-k} \nabla\,|\, u_k^0\,(t)\,|_V^2\, dt = 0 \tag{2,21}$$

Soit :

$$(2,22)\quad 2\int_{pk}^{-k} |\nabla u_k^0(t)|_H^2\, dt \leq \int_{pk}^{-k} \nabla |u_k^0(t)|_V^2\, dt \,(= |u_k^0(-k)|_V^2 - |u_k^0(pk)|_V^2.$$

Et comme l'injection de V dans H est continue on a :

$$(2,23)\quad \int_{pk}^{-k} |u_k^0(t)|_H^2\, dt \leq |u_k^0(-k)|_V^2 \leq C\, |u_k^0(-k)|_H^2 .$$

Enfin en faisant $q = -1$ dans (2,16) et en replacant v par $u_k \circ (-k)$ on obtient :

$$(2,24)\quad \int_{-\infty}^{-k} |u_k^0(t)|_H^2\, dt \leq C\, |u_0|_H^2$$

ou C est une constante indépendante de k.

Alors par construction de la fonction $f_k(t)$ on a :

$$(2,25)\quad |f_k^*(t)|^2_{L^2(-\infty,+\infty;\, K')} \leq C\,[\,|f|^2_{L^2(0,\,T,\,K')} + |u_0|_H^2].$$

ou C désigne toujours une constante indépendante de k.

Enfin on pose

$$(2,26)\quad u_k^*(t) = \begin{cases} u_k(t) \text{ pour } t \geq 0. \\ u_k^0(t) \text{ pour } t < 0. \end{cases}$$

Il est évident que pour toute fonction $v_k^*(t) \in \mathfrak{F}(V_k^*)$, $u_k^*(t)$ vérifie la relation

$$(2,27)\quad (\nabla u_k^*(t), v_k^*(t)) + a_k^*(t\,;\, u_k^*(t), v_k^*(t)) = \langle f_k^*(t), v_k^*(t) \rangle_{K',\,K} .$$

LEMME II.1

$u_k^*(t)$ et $\overline{\nabla} u_k(t)$ sont bornés indépendemment de k, respectivement dans $L^2(V_k^*)(=\mathfrak{F}(V_k^*)\cap L^2(-\infty,+\infty;K))$ et dans $L^2(-\infty,+\infty;V')$.

En effet, comme $u_k^*(t)\in\mathfrak{F}(V_k^*)$, on remplace $v_k^*(t)$ par $u_k^*(t)$ dans (2,27) et en utilisant la méthode de [8] on obtient :

$$(2,28)\quad 2\operatorname{Re}\int_0^\infty a_k^*(t\,;u_k^*(t),u_k^*(t))\,dt\le 2\int_0^\infty |\langle f_k^*(t),u_k^*(t)\rangle|\,dt+|u_{k0}|_H^2 .$$

D'ou l'on déduit :

$$(2,29)\qquad \int_0^\infty |u_k^*(t)|_K^2\,dt\le C_1\,[\,|f_k^*(t)|^2_{L^2(-\infty,+\infty\,;\,K')}+|u_{k0}|_H^2]$$

Soit d'après (2,19) et (2,6) :

$$(2,30)\qquad \int_0^\infty |u_k^*(t)|_H^2\,dt\le C_2\,[\,|f(t)|^2_{L^2(0,\,T\,;\,K')}+|u_0|_H^2].$$

De même utilisant (2,26), (2,17) et (2,24) on obtient :

$$(2,31)\qquad \int_{-\infty}^0 |u_k^*(t)|_K^2\,dt\le C_3\,|u_0|_H^2.$$

Il en résulte

$$(2,32)\qquad |u_k^*(t)|^2_{L^2(V_k^*)}\le C_4\,[\,|f|^2_{L^2(0,\,T\,;\,K)}+|u_0|_H^2].$$

Soit maintenant $\varphi\in L^2(-\infty,+\infty\,;V)$, comme pour tout q $0\le q\le m-1$ on a $V\subset V_k(q)$, pour presque tout t, $t\in[qk,(q+1)k[$ $\varphi(t)\in V_k(q)$. On a donc pour presque tout $-\infty<t<+\infty\cdot$ La relation :

$$(2,33)\quad (\overline{\nabla} u_k^*(t),\varphi(t))_H+a_k^*(t\,;u_k^*(t),\varphi(t))=\langle f_k^*(t),\varphi(t)\rangle_{K',K}\cdot$$

Ce qui, par définition de la forme $a_k^*(t; u, v)$ et de la fonction $f_k^*(t)$, donne, compte tenu de (1,5):

$$(2,34) \qquad (\overline{V}\, u_k^*(t), \varphi(t))_H \leq C_5 \,|\, \varphi(t) \,|_{L^2(-\infty, +\infty; V)} .$$

Il en résulte que $\overline{V}\, u_k^*(t)$ est borné dans $L^2(-\infty, +\infty; V')$ indépendemment de k. Ce qui achève la démonstration du lemme II.1.

Soit $\varkappa_k = 1/k\, \theta_k$ ou θ_k est la fonction caractéristique de l'intervalle $[-k, 0]$. On pose:

$$(2,55) \qquad v_k^* = \varkappa_k * u_k^* .$$

On a alors

$$(2,36) \qquad \frac{d}{dt} v_k^* = \overline{V}\, u_k^* .$$

Il en résulte que v_k^* est borné dans $L^2(-\infty, +\infty; K)$ et que $v_k^{*\prime}$ est borné dans $L^2(-\infty, +\infty; V')$. D'après [2,3] on sait que compte tenu de (1,8) v_k^* est borné dans $H^{1/2}(-\infty, +\infty; K, H)$. Soit v_k la restriction de v_k^* à l'intervalle $[0, T]$. v_k est borné dans $L^2(0, T; K)$ et dans $H^{1/2}(0, T; K, H)$. On sait d'après [4] prop. 4,2 chap. IV, que l'injection de $H^{1/2}(0, T; K, H)$ dans $L^2(0, T; H)$ est compacte. Il en résulte que l'on peut extraire de la suite v_k une sous suite v_k, convergent vers v dans $L^2(0, T; H)$ fort et dans $L^2(0, T; K)$ faible.

D'après un calcul fait dans [8] chap. I ((9,17) - (9,19)) on a:

$$(2,37) \quad \left(\int_0^T |\, v_k - u_k \,|_H^2 \, dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\sqrt{k/3} \cdot \left[\,|\, u_k(0) \,|_H + |\, u_k(T) \,|_H + k \cdot \int_0^T |\, V\, u_k(t) \,|_H^2 \, dt \right]^{1/2} .$$

Le premier terme du second membre est borné car $u_k(0) = u_{k0}$. Pour majorer le second on replace v par $u_k(q)$ et comme dans le lemme II.1 selon la méthode de [8] on obtient:

$$(2,38) \qquad |\, u_k(T) \,|_H^2 \leq C \left[\,|\, f \,|_{L^2(0, T; K')}^2 + |\, u_0 \,|_H^2 \right] .$$

Enfin d'après l'hypothèse (1,8) ($[K, V']_{1/2} = H$) il existe une constante c telle que pour tout $a \in K$ on ait:

(2,39) $$| a |_H \leq c \, | a |_{V'}^{1/2} \cdot | a |_K^{1/2}$$

(cf. [7] par exemple).
Alors :

(2,40) $$\int_0^T | u \ (t+k) - u_k (t) |_H^2 \, dt \leq$$
$$c \int_0^T | u_k (t+k) - u_k (t) |_{V'} \cdot | u_k (t+k) - u (t) |_k \, dt \, .$$

et d'après l'inégalité de Holder.

(2,41) $$\leq 2c \left[\int_0^T | u_k (t+k) - u_k (t) |_{V'}^2 \, dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T | u_k (t) |_K^2 \, dt \right]^{1/2} .$$

Soit

(2,42) $$\int_0^T | \nabla u_k (t) |_H^2 \, dt \leq 1/k \cdot 2c \left[\int_0^T | \nabla u_k (t) |_{V'}^2 \, dt \right]^{1/2} \left[\int_0^T | u_k (t) |_H^2 \, dt \right]^{1/2} .$$

Il résulte alors des majorations du lemme II.1 que $\int_0^T | \nabla u_k (t) |_H^2 \, dt.$ est borné indépendamment de k.

Enfin comme dans [8] on a :

(2,43) $$\int_0^T | u_k (t) - v_k (t) |_H^2 \, dt = 0 \, (k^{1/2}).$$

La suite u_k, tend donc vers v dans $L^2 (0, T ; k)$ faible et dans $L^2 (0, T ; H)$ fort.

Il reste à montrer que v est ègal à u solution du probleme I. 1.

Lemme II.1

v appartient à $L^2(0, T; V(t))$.

En effet $P.v$ appartient à $L^2(0, T; V(t))$ et pour tout w de $L^2(0, T; K)$ on a :

$$(u_k - P\cdot v, w)_{L^2(0,T;K)} = (P_k\cdot u_k - P\cdot v, w)_{L^2(0,T;K)}. \tag{2,44}$$

Comme les opérateurs P_k et P sont autoadjoints dans $L^2(0, T; k)$ on a :

$$\begin{aligned}(u_k - P\cdot v, w)_{L^2(0,T;K)} &= (u_k - v, (P_k - P)\cdot w)_{L^2(0,T;K)} \\ &\leq C\,|(P_k - P)\cdot w|_{L^2(0,T;K)}\,.\end{aligned} \tag{2,45}$$

Car u_k est borné dans $L^2(0, T; k)$; et cette expression tend vers zéro avec k d'après l'hypothèse de consistance que vérifie la famille $V_k(q)$. Il en résulte que $v = P\cdot v$ donc que v appartient à $L^2(0, T; V(t))$.

Enfin soit $\varphi \in \Phi(0, T; V(t))$, puisque la famille $V_k(q)$ est consistance à la famille $V(t)$ il existe une suite φ_k d'éléments de $L^2(0, T; V_k)$ vérifiant les hypothèses (2,2) et (2,3).

On notera désormais u_k et φ_k les suites $u_{k'}$ et $\varphi_{k'}$.

Les suites u_k et φ_k satisfont alors à la relation :

$$\int_k^T [(\overline{V}\, u_k\,, \varphi_k)_h + a_k(t\,; u_k\,, \varphi_k)\, dt = \int_k^T \langle f_k, \varphi_k\rangle_{K',K}\cdot dt. \tag{2,46}$$

Ce qui par construction de la fonction f_k et de la forme sesquilinéaire $a_k(t\,; u, v)$ donne :

$$\int_k^T [(\overline{V}\, u_k\,, \varphi_k)_h + a(t\,; u_k\,, \varphi_k)]\, dt = \int_k^T \langle f, \varphi_k\rangle_{K';K}\, dt. \tag{2.47}$$

Comme φ_k tend vers φ dans $L^2(0, T; K)$ fort et comme u_k tend vers v dans $L_2(0, T; k)$ faible on a :

$$(2,48) \qquad \lim \int_k^T a(t; u_k, \varphi_k)\, dt = \int_k^T a(t; v, \varphi_k)\, dt.$$

Et

$$(2,49) \qquad \lim \int_k^T \langle f, \varphi_k \rangle_{K', K} = \int_k^T \langle f, \varphi \rangle_{K', K}\, dt.$$

Il reste à étudier la limite de l'expression $\int_k^T (\bar{V} u_k, \varphi_k)_H\, dt$. Mais :

$$(2,50) \qquad \int_k^T (\bar{V} u_k, \varphi_k)_H\, dt = \int_0^{T-k} (u_k(t), V\varphi_k)_H\, dt - (u_{k0}, \varphi_k(0))_H + (u_k(T-k), \varphi_k(T-k))_H.$$

D'après (2, 3), comme u_k tend vers v dans $L^2(0, T; H)$ fort on a :

$$(2,51) \qquad \lim_{k \to 0} \int_0^{T-k} (u_k(t), V\varphi_k)_H\, dt = \int_0^T (v, \varphi')_H\, dt.$$

Et d'après (2, 2), comme u_{k0} tend vers u_0 dans H fort et comme $u_k(T-k)$ reste borné dans H indépendamment de k, on a :

$$(2,52) \qquad \lim -(u_{k0}, \varphi_k(0))_H + (u_k(T-k), \varphi_k(T-k))_H = -(u_0, \varphi(0))_H.$$

Enfin (2,48), (2,49), (2,51) et (2,52) montrent que v limite de la suite u_k est solution du problème exact. Comme cette solution est unique il s'en suit que non seulement une suite extraite, mais la suite u toute entière converge vers v dans $L^2(0, T; H)$ fort.

Exemples de cas où sont vérifiées les hypothèses (2,1), (2,2) *et* (2,3).

PROPOSITION II. 2.

Si on suppose que pour tout $V \in K$ l'application $t \to P(t)\, V$ est continue de $[0, T]$ dans K et si l'on pose $V_k(q) = V(t_q)$ où $t_q \in [qk, (q+1)k]$, la condition (2,1) est vérifiée.

DÉMONSTRATION.

On montre que pour toute fonction continue φ de $[0, T]$ dans K, $|(P - P_k)\varphi|_{L^2(0, T; K)}$ tend vers zéro avec k et on étend ensuite ce résultatp ar continuité à $L^2(0, T; K)$ en remarquant que P_k et P sont de norme inférieure ou égale à 1. :

L'application $t \to P(t)$ est continue de $[0, T]$ dans $L(K, K)$ muni de la topologie simple forte, elle est donc continue de $[0, T]$ dans $L(K, K)$ muni de la topologie de la convergence compacte. Comme φ est continue, l'ensemble des points $\{\varphi(t)/t \in [0, T]\}$ est un compact de K.

Soit ε donné, pour tout point t_0 il existe un intervalle ouvert de centre t_0, U_{t_0} tel que pour tout $t \in U_{t_0}$ et tout $\zeta \in [0, T]$ on ait

$$|P(t_0)\varphi(\zeta) - P(t)\varphi(\zeta)|_K \leq 1/4 \cdot \sqrt{\varepsilon/T} \tag{2,53}$$

donc en particulier :

$$|P(t_0)\varphi(t) - P(t)\varphi(t)|_K \leq 1/4 \cdot \sqrt{\varepsilon/T}. \tag{2,54}$$

On extrait alors de la famille $U_{t_0}\, t_0 \in [0, T]$ un recouvrement fini U_{t_j} de $[0, T]$ $t_j \leq t_{j+1}$; on choisit k inférieur à la moitié du plus petit des intervalles U_{t_j}:

S'il existe j tel que $qk \in U_{t_j}$ et $qk \leq t_j$ l'intervalle $[qk, (q+1)k]$: est tout entier contenu dans U_{t_j} alors pour tout $t \in [qk, (q+1)k]$ on a :

$$\begin{aligned} |P(t_q)\varphi(t) - P(t)\cdot\varphi(t)|_K &\leq |(P(t_j) - P(t_q))\cdot\varphi(t)|_K \\ &+ |(P(t_j) - P(t)\varphi\cdot(t)|_K \leq 1/2\sqrt{\varepsilon/T}. \end{aligned} \tag{2,55}$$

S'il n'existe pas de j vérifiant $qk \in U_{t_j}$ et $qk < t_j$ alors il existe un point $s \in [qk, (q+1)k]$ et deux points $t_{j'}$ et $t_{j''}$ vérifiant : $t_{j'} < qk < t_{j''}$ et $s \in U_{t_{j'}} \cap U_{t_{j''}}$; alors l'intervalle $[qk, (q+1)k]$ est contenu dans $U_{t_{j'}} \cup U_{t_{j''}}$ et on a :

$$\begin{aligned} |P(t_q)\cdot\varphi(t) - P(t)\cdot\varphi(t)|_K &\leq |P(t_q)\cdot\varphi(t) - P(s)\cdot\varphi(t)|_K \\ &+ |(P(s)\cdot\varphi(t) - P(t)\cdot\varphi(t)|_K. \end{aligned} \tag{2,56}$$

Comme s et t (resp. s et t_q) appartiennent à la fois à $U_{t_{j'}}$ ou à $U_{t_{j''}}$ on a :

(2,57) $$|(P(t_q) - P(t))\varphi(t)|_K \leq \sqrt{\varepsilon/T}$$

Il en résulte :

(2,58) $$\int_0^T |P\cdot\varphi - P_k\cdot\varphi|_K^2 dt = \sum_q \int_{qk}^{(q+1)k} |(P(t_q) - P(t))\varphi(t)|_k^2\, dt$$

$$\leq \sum_q k\cdot\varepsilon/T = \varepsilon.$$

Les conditions (2,2) et (2,3) sont également vérifiées si pour k assez petit on peut choisir $V_k(q)$ tel que pour tout t de l'intervalle $[qk, (q+1[$ on ait : $V_k(q) \supset V(t)$. On posera alors :

(2,59) $$\varphi_k(q) = 1/k \int_{qk}^{(q+1)k} \varphi(t)\, dt.$$

Mais on a de plus la proposition

PROPOSITION II. 3.

On suppose comme dans la proposition II. 2 que l'application $t \to P(t)\cdot v$ est continue de $[0, T]$ dans K pour tout $v \in K$; et on suppose de plus que cette application vérifie une condition de Lipchitz dans le sens suivant : pour tout couple u, v d'éléments de K et tout réel h assez petit on a :

(2,60) $$|(u, P(t+h)\cdot v)_K - (u, P(t)\cdot v)_K| \leq C\cdot h\,|u|_K\cdot|v|_K$$

ou C est une constante indépendante de t, u et v.

Alors la famille $V_k(q)$ ou $V_k(q) = V(qk)$ est consistance à la famille $V(t)$.

DÉMONSTRATION :

D'après la proposition II. 2 la famille $V(t)$ satisfait à l'hypothèse (2,1). Soit $\varphi \in \Phi(0, T; V(t))$; on pose

$$(2,61)\qquad \Psi_k(q) = \int_{qk}^{(q+1)k} \varphi(t)\,dt \quad \text{et} \quad \varphi_k(q) = P(qk)\,\Psi_k(q).$$

Et on se propose de montrer que la suite φ_k vérifie bien les hypothèses de consistance.

Premièrement on a :

$$(2,62)\qquad |\varphi_k - \varphi|_{L^2(0,T;K)} \leq |P_k \Psi_k - P_k \varphi|_{L^2(0,T;K)}$$

$$+ |P_k \varphi - \varphi|_{L^2(0,T;K)} \leq |\Psi_k - \varphi|_{L^2(0,T;K)} + |(P_k - P)\varphi|_{L^2(0,T;K)}.$$

Le premier terme tend vers zéro par construction de la fonction Ψ_k; quant au second il tend vers zéro d'après la proposition II. 2

Ensuite :

Comme φ appartient à $C[0, T; H]$ (après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle) $\Psi_k(0)$ tend vers $\Psi(0)$ dans H fort. Donc pour montrer que $\varphi_k(0)$ tend vers $\varphi(0)$ it suffit de montrer que $|\Psi_k(0) - \varphi(0)|_H$ tend vers zéro.

Or :

$$(2,63)\qquad |\Psi_k(0) - \varphi_k(0)|_H \leq c\,|\Psi_k(0) - \varphi_k(0)|_K$$

$$\leq c \cdot \int_0^k |(P(k) - P(t))/k \cdot \varphi(t)|_K\,dt \leq c \cdot C \int_0^k |\varphi(t)|_K\,dt.$$

Et le dernier terme de (2,63) tend vers zéro avec k.

On procéderait de même pour montrer que $\varphi_k(T-k)$ tend dans H vers $\varphi(T)$ lorsque k tend vers zéro.

Enfin :

$$(2,64)\quad |\nabla \varphi_k|^2_{L^2(0,T;H)} = \sum_q k\,|(P_k(q+1) \cdot \Psi_k(q+1) - P_k(q)\,\Psi_k(q))/k|^2_H$$

$$\leq c \sum_q k|(P_k(q+1)\Psi_k(q+1) - \Psi_k(q+1))/k|^2_K + \sum_q k\,|(\Psi_k(q+1) - \Psi_k(q))/k|^2_H$$

$$+ c \sum_q k\,|(P_k(q)\,\Psi_k(q) - \Psi_k(q))/k|^2_K.$$

Le premier terme du second membre est majoré indépendamment de k; en effet il est égal à:

$$(2,65)\qquad c\cdot\sum_q k\left|1/k\int_{qk}^{(q+1)k}(P(q+1)-P(t))/k\cdot\varphi(t)\,dt\right|_K^2$$

et d'après l'hypothèse (2,60), (2,65) est majoré par:

$$(2,66)\qquad c\sum_q k\cdot\left[1/k\int_{qk}^{(q+1)k}c\,|\,\varphi(t)\,|_K\,dt\right]^2.$$

Et d'apres l'inégalité de Holder (2,66) est majoré par:

$$(2,67)\qquad c\cdot C\sum_q k\cdot 1/k\int_{qk}^{(q+1)k}|\,\varphi(t)\,|_K^2\cdot dt=c.C\cdot|\,\varphi\,|_{L^2(0,T;K)}\cdot$$

On établirait de la même manière une majoration pour le troisième terme du second membre de (2,64).

Le second terme du second membre de (2,64) est égal à

$$(2,68)\qquad \sum_q 1/k\left|\int_{qk}^{(q+1)k}(\varphi(t+k)-\varphi(t))/k\;dt\right|_H^2.$$

On démontre que ce terme est majoré indépendamment de k en utilisant l'inégalité de Holder et l'hypothèse $\varphi'(t)\in L^2(0,T;H)$.

Exemples d'applications:

Soit Ω un ouvert suffisament régulier de R^n et Γ sa frontière; on note $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ (et $H^{-m}(\Omega)$ le dual de $H_0^m(\Omega)$ on a alors:

$$(2,69)\qquad [H^m(\Omega),H^{-m}(\Omega)]_{1/2}=L^2(\Omega).$$

L'ouvert Ω étant suffisament régulier on définit de manière unique pour tout $u \in H^m(\Omega)$

$$\gamma_j u = \frac{\partial j}{\partial \nu^j} u \,(\in H^{m-j-1/2}(\Gamma)\; 0 \leq j \leq m-1.$$

Alors :

I⁰. Soit Γ_t une famille d'ensembles de mesure positive de Γ on note :

(2,70) $$H_t^1(\Omega) = \{u \in H_0^1(\Omega), \gamma_0 \mid u_{\Gamma_t} = 0\}.$$

Pour tout $t\, H_t^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$. Et comme d'habitude on note $P(t)$ la projection de $H^1(\Omega)$ sur $H_t^1(\Omega)$.

On suppose que les opérateurs $P(t)$ vérifient la condition de la proposition II. 2 : Pour tout $v \in K$ l'application $t \longrightarrow P(t)\cdot v$ est continue de $[0, T]$ dans K; et on suppose que pour k assez petit il existe dans tout intervalle de la forme $[qk, (q+1)k[$ un point t_q vérifiant

(2,71) $$\Gamma_t \subset \Gamma_{t_q} \text{ pour tout } t \in [qk, (q+1)k][.$$

Alors la famille $V_k(q) = H_{t_q}^1(\Omega)$ est consistance à la famille $V(t) = H_t^1(\Omega)$; et le procédé de calcul de II donne une approximation de la solution du problème (2) de [2].

II⁰. Soit $b_1(x, t)$ et $b_2(x, t)$ des fonctions définies sur $\Gamma \times [0, T]$; appartenant à $L^\infty(\Gamma \times [0, T])$ ainsi que leurs dérivées d'ordre ≤ 4.

On note :

$$V(t) = \{u \in H^3(\Omega)/\gamma_1 u(x) = b_1(x, t)\gamma_0 u(x) \text{ et } \gamma_2 u(x) = b_2(x, t)\gamma_0 u(x)\}$$

$V(t)$ est alors un sous epace fermé de $H^3(\Omega)$ et on montre que en plus de la propriété de continuité simple forte, la famille $P(t)$ vérifie l'assertion suivante :

(2,72) Pour tout $v \in H^3(\Omega)\; h^{-1}(P(t+h) - P(t))\cdot v$ tend vers $P'(t)\cdot v$ dans $H^3(\Omega)$ faible; et la fonction $t \longrightarrow P'(t)\cdot v$ est continue de $[0, T]$ dans $H^3(\Omega)$ faible.

Il en résulte que la famille $P'(t)$ est bornée dans $L(H^3(\Omega),$ $H^3(\Omega))$ et que la famille $P(t)$ vérifie l'assertion (2,60).

On peut donc en prenant $V_k(q) = V(qk)$ construire une approximation du premier problème du § 7 du chapitre 7 de [4].

Je remercie Monsieur le Professeur Lions pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec lui sur ce sujet et qui m'ont permis de mener à bien ce travail.

BIBLIOGRAPHY

[1] Aubin — Thèse Paris, 1966 (à paraître)

[2] Baiocchi — *Regolarità e unicità della soluzione di una equazione differenziale astratta.* Seminario Matematico della Università di Padova. XXXV (1965) pag. 380-417.

[3] Lions — *Espaces intermédiares entre espaces de hilbert et applications,* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. R.P.R. Bucarest. 2 (1958) pag. 419-432.

[4] Lions — *Equations différentielles opérationelles et problémes aux limites.* Springer Verlag, t. 111.

[5] Lions — *Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles.* Université de Montréal 1962.

[6] Lions — *Equazioni differenziali astratte* — C.I.M.E., 1963, ed. Cremonese-Roma.

[7] Lions et Peetre — *Sur une classe d'espaces d'interpolation.* I.H.E.S. N° 19.

[8] Raviart — Thèse, Paris 1965 (a paraître).

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 novembre 1966.