

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO POLETTI

## **Strutture gruppali associate ad una involuzione**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 38 (1967), p. 89-90

<[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_38\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__89_0)>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# STRUTTURE GRUPPALI ASSOCIATE AD UNA INVOLUZIONE

MARIO POLETTI \*)

Il seguente teorema caratterizza le applicazioni di un insieme in sè, che coincidono con l'inversione di un opportuno gruppo abeliano avente per sostegno l'insieme.

**TEOREMA.** Sia  $\Omega$  un insieme di cardinalità  $\omega$ ,  $f$  una applicazione di  $\Omega$  in sè,  $X$  l'insieme dei punti uniti di  $f$  di cardinalità  $\sigma$ ,  $Y$  l'insieme dei punti non uniti di  $f$  di cardinalità  $\lambda$ . Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè  $f$  coincida con l'inversione di un opportuno gruppo abeliano che ha per sostegno  $\Omega$ , è che  $f$  sia involutoria, che  $\omega = \sigma\mu$ , che  $\sigma = 2^n$  se  $\sigma$  è un cardinale finito, e che  $\lambda = 0$  o  $\lambda = \omega$  se  $\sigma$  è un cardinale transfinito.

**DIM.** Se  $f$  coincide con l'inversione di un certo gruppo abeliano che ha per sostegno  $\Omega$ ,  $f$  è certamente involutoria, ed inoltre  $X$  risulta sottogruppo di tale gruppo. Esiste quindi  $\mu$  tale che  $\omega = \sigma\mu$ , e se  $\sigma$  è transfinito allora o  $\lambda = 0$  o  $\lambda = \omega$ ; inoltre, siccome ogni elemento del gruppo  $X$  coincide con il proprio inverso, se  $\sigma$  è finito, esiste  $n$  tale che  $\sigma = 2^n$ .

Se  $f, \omega, \sigma, \lambda$  verificano le dette condizioni, esistono gruppi abeliani  $\mathcal{G}$  di cardinalità  $\omega$ , tali che siano  $\sigma, \lambda$  le cardinalità dei loro sottinsiemi  $\{g/g \in \mathcal{G}, g = -g\}$ ,  $\{g/g \in \mathcal{G}, g \neq -g\}$ . Infatti, detto  $Z$  il gruppo additivo degli interi, tali gruppi possono essere costruiti

---

\*) Indirizzo dell'A: Istituto Matematico, Università, Pisa.

come segue: 1) se  $\omega$  è finito e  $\sigma = 1$ , dall'essere  $\{\{a, fa\} / a \in \Omega\}$  una partizione di  $\Omega$  in insiemi di cardinalità  $\leq 2$ , di cui uno soltanto di cardinalità 1, segue che  $\omega$  è dispari, e quindi che  $Z/\omega Z$  è un tale gruppo; 2) se  $\omega$  è finito, posto  $\mu = 2^h \cdot k$ , con  $k$  dispari, allora  $(Z/2^{h+1}Z) \times (Z/kZ)$ ,  $(Z/2Z)^{n-1} \times (Z/2^{h+1}Z) \times (Z/kZ)$  sono tali gruppi rispettivamente nel caso che  $\sigma = 2$  e che  $\sigma = 2^n$  con  $2 \leq n$ ; 3) se  $\omega$  è transfinito e  $\sigma = 1$ , allora il prodotto debole di una famiglia di cardinalità  $\omega$  di gruppi isomorfi a  $Z$  è un tale gruppo; 4) se  $\omega$  è transfinito,  $\sigma$  è finito e  $\sigma = 2^n$  con  $1 \leq n$ , allora detto  $F$  il prodotto debole di una famiglia di cardinalità  $\omega$  di gruppi isomorfi a  $Z$ , si ha che  $(Z/2Z)^n \times F$  è un tale gruppo; 5) se  $\omega$  è transfinito,  $\sigma$  è transfinito, e  $\lambda = 0$ , allora il prodotto debole di una famiglia di cardinalità  $\omega$  di gruppi isomorfi a  $Z/2Z$  è un tale gruppo; 6) se  $\omega$  è transfinito,  $\sigma$  è transfinito, e  $\lambda = \omega$ , allora detto  $H$  il prodotto debole di una famiglia di cardinalità  $\sigma$  di gruppi isomorfi a  $Z/2Z$ , e detto  $F$  il prodotto debole di una famiglia di cardinalità  $\omega$  di gruppi isomorfi a  $Z$ , si ha che  $H \times F$  è un tale gruppo. Sia quindi  $G$  un gruppo abeliano verificante le proprietà descritte; siccome  $\text{card } \{g/g \in G, g = -g\} = \text{card } X$ ,  $\text{card } \{g/g \in G, g \neq -g\} = \text{card } Y$ , esiste una applicazione biettiva  $\pi$  di  $\Omega$  su  $G$ , tale che  $\pi f = j\pi$ , ove  $j$  è l'inversione del gruppo  $G$ . Ciò posto,  $f$  coincide con l'inversione del gruppo  $(\Omega, +)$ , definito dall'essere  $a + b = \pi^{-1}(\pi a + \pi b)$  per ogni  $a, b \in \Omega$ .

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1966.