RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO CHERSI

Sul prolungamento d'una misura definita su un prodotto infinito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 136-143

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__136_0>

SUL PROLUNGAMENTO D'UNA MISURA DEFINITA SU UN PRODOTTO INFINITO

FRANCO CHERSI *)

SUMMARY - Let T be an infinite, non countable index set; for each $t \in T$ let $(X_t \mathcal{A}_t)$ be a measurable space. Let $\Omega = \prod_{t \in T} X_t$ and $\mathcal{A}$ be the product σ-algebra of the $\mathcal{A}_t$'s; let μ be a finite, non negative measure on $\mathcal{A}$.

Let us call « tube » a subset of Ω of the form $F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, with $A_t \in \mathcal{A}_t$ and no other condition; let $\mathcal{F}$ be the class of all tubes. Then μ induces a unique finitely additive, non negative function on the algebra generated by $\mathcal{F}^\sigma$, which coincides with the outer measure μ^* on $\mathcal{F}^\sigma$.

Introduzione.

In [2] A. Meyer ha ottenuto il seguente risultato.

Siano: T un insieme d'indici di qualunque cardinalità, $(X, \mathcal{B})$ uno spazio misurabile (cioè $\mathcal{B}$ sia una σ-algebra di parti di X), P una probabilità sullo spazio misurabile prodotto $(X^T, \mathcal{B}^T)$. Sia $\mathcal{K}$ una sottoclasse compatta di $\mathcal{B}$: cioè, se una famiglia numerabile d'insiemi di $\mathcal{K}$ ha intersezione vuota, essa contiene una sottofamiglia finita avente l'intersezione vuota. In queste ipotesi esiste un prolungamento $\bar{P}$ di P tale che siano misurabili tutti gli insiemi della forma $\bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(K_t)$, con $K_t \in \mathcal{K}$, e che su questi $\bar{P}$ coincida con la misura esterna indotta da P.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la Matematica del C.N.R..

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università, Pisa.

Nella presente nota si esamina ciò che si può ottenere senza l'ipotesi della compattezza.

Precisamente: per ogni $t \in T$ sia $(X_t, \mathcal{A}_t)$ uno spazio misurabile, e sia $\mathcal{A}$ la σ-algebra prodotto delle $\mathcal{A}_t$ in Ω, prodotto degli X_t; sia μ una misura ≥ 0, finita, su $\mathcal{A}$. Allora è definibile in modo unico una funzione ≥ 0 che coincida con la misura esterna μ^* sulla classe degli insiemi $\bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, $A_t \in \mathcal{A}_t$, e delle loro unioni numerabili, e che sia additiva sull'anello generato da tale classe.

Resta aperto il problema del prolungamento σ-additivo ad un σ-anello; forse i metodi usati nella presente nota potranno essere utili anche in questo senso.

Ringrazio il Prof. G. Letta, il cui aiuto mi ha permesso di migliorare sostanzialmente lo scritto primitivo; in particolare, a lui è dovuto l'importante lemma 2.

Sia T un insieme d'indici, di cardinalità qualunque (ciò che segue ha interesse qualora T sia non numerabile). Per ogni $t \in T$ sia $(X_t \mathcal{A}_t)$ uno spazio misurabile e sia $(\Omega, \mathcal{A})$ lo spazio misurabile prodotto della famiglia $(X_t, \mathcal{A}_t)_{t \in T}$.

Per ogni $t \in T$ denoteremo con pr_t la proiezione canonica di Ω su X_t, e per ogni parte S di T indicheremo con pr_S la proiezione canonica di Ω sul prodotto parziale $\Omega_S = \prod_{t \in S} X_t$.

Chiameremo S-cilindro di Ω ogni parte di Ω della forma

$$pr_S^{-1}(B), \text{ con } B \subset \Omega_S .$$

Denoteremo con $\mathcal{C}_S$ l'insieme di tutti gli S-cilindri di Ω; $\mathcal{C}_S$ è stabile per l'unione e per l'intersezione di qualsiasi cardinalità, perchè tale è l'insieme di tutte le parti di Ω_S.

Per ogni parte E di Ω, sia $C_S(E)$ il minimo S-cilindro di Ω contenente E, ossia l'intersezione di tutti gli S-cilindri che contengono E (c'è sempre almeno un tale S-cilindro: Ω stesso).

Se S, U sono parti di T con $S \subset U$, ogni S-cilindro è anche un U-cilindro, e quindi per ogni $E \subset \Omega$ si ha

$$(1) \qquad C_U(E) \subset C_S(E).$$

Per ogni famiglia $(E_i)_{i \in I}$ di parti di Ω valgono inoltre le relazioni

$$C_S(\bigcup_{i \in I} E_i) = \bigcup_{i \in I} C_S(E_i) \tag{2}$$

(perchè $\mathcal{C}_S$ è stabile per l'unione di qualsiasi cardinalità), e

$$C_S(\bigcap_{i \in I} E_i) \subset \bigcap_{i \in I} C_S(E_i). \tag{3}$$

Nella (3) non si può, in generale, mettere il segno d'eguaglianza. Esempio: siano $t \in (T - S)$, A_1, A_2 parti non vuote di X_t con $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $E_i = pr_t^{-1}(A_i)$ $(i = 1, 2)$; allora risulta: $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, $C_S(E_1 \cap E_2) = \emptyset$, ma $C_S(E_i) = \Omega$ $(i = 1, 2)$.

Diremo «tubo» ogni parte di Ω della forma

$$\prod_{t \in T} A_t = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t), \tag{4}$$

con $A_t \in \mathcal{A}_t$ per ogni $t \in T$ (il nome «tubo» è suggerito dal caso $\Omega = X^T$, in cui la scrittura (4) rappresenta l'insieme delle funzioni $\omega : T \longrightarrow X$ che soddisfano le condizioni $\omega(t) \in A_t$ per $t \in T$).

Sia $\mathcal{T}$ l'insieme di tutti i tubi, $\mathcal{T}^\sigma$ l'insieme delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{T}$. Evidentemente $\mathcal{T}$ è stabile per l'intersezione numerabile, contiene Ω e l'insieme vuoto; $\mathcal{T}^\sigma$ è stabile per l'unione numerabile e l'intersezione *finita*; in particolare $\mathcal{T}^\sigma$ è un reticolo.

Osserviamo che $\mathcal{T}$ contiene la classe dei rettangoli, e che è contenuto in $\mathcal{A}$ se, e solo se, T è numerabile (a meno di casi banali).

Per ogni tubo non vuoto $E = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, $A_t \in \mathcal{A}_t$, e per ogni parte S di T risulta

$$C_S(E) = \bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_t) \tag{5}$$

e quindi, se S è numerabile, $C_S(E) \in \mathcal{A}$.

LEMMA 1. Se E, F sono tubi ed è $E \cap F \neq \emptyset$, per ogni parte S di T risulta

$$C_S(E \cap F) = C_S(E) \cap C_S(F). \tag{6}$$

Se invece E, F sono tubi con $E \cap F = \emptyset$, esiste un $t \in T$ tale che sia

$$C_t(E) \cap C_t(F) = \emptyset. \tag{7}$$

Dimostrazione. Siano $E = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, $F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(B_t)$, con A_t, $B_t \in \mathscr{A}_t$. Allora si ha

$$E \cap F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t \cap B_t);$$

quindi nel primo caso

$$C_S(E \cap F) = \bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_t \cap B_t) =$$

$$= (\bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(A_t)) \cap (\bigcap_{t \in S} pr_t^{-1}(B_t)) = C_S(E) \cap C_S(F).$$

Nel secondo caso, se uno almeno di E ed F è vuoto, la (7) è vera per ogni t. Se ambedue sono non vuoti, esiste però un t per cui sia $A_t \cap B_t = \emptyset$, ed è

$$C_t(E) \cap C_t(F) = pr_t^{-1}(A_t) \cap pr_t^{-1}(B_t) = pr_t^{-1}(A_t \cap B_t).$$

Lemma 2. Se E, F appartengono ad $\mathcal{F}^\sigma$, esiste una parte numerabile S_0 di T tale che, per ogni parte S di T contenente S_0, valga l'eguaglianza (6).

Dimostrazione. Siano $E = \bigcup_{i \in I} E_i$, $F = \bigcup_{j \in J} F_j$, con I, J insiemi numerabili d'indici ed E_i, F_j elementi di $\mathcal{F}$. Poniamo

$$L = I \times J, \; L_0 = \{(i, j) \in L : E_i \cap F_j = \emptyset\}.$$

Qualunque sia la parte S di T, dall'eguaglianza (2) e dal lemma 1 derivano le seguenti:

$$C_S(E) \cap C_S(F) = (\bigcup_{i \in I} C_S(E_i)) \cap (\bigcup_{j \in J} C_S(F_j)) = \bigcup_{(i,j) \in L} (C_S(E_i) \cap C_S(F_j)) \tag{8}$$

$$C_S(E \cap F) = C_S(\bigcup_{(i,j) \in L - L_0} (E_i \cap F_j)) = \tag{9}$$

$$= \bigcup_{(i,j) \in L - L_0} C_S(E_i \cap F_j) = \bigcup_{(i,j) \in L - L_0} (C_S(E_i) \cap C_S(F_j)).$$

Per ogni $(i, j) \in L_0$ si ha $E_i \cap F_j = \emptyset$, quindi (lemma 1) esiste un $t = t(i, j)$ tale che sia

$$C_t(E_i) \cap C_t(F_j) = \emptyset, \tag{10}$$

(grazie all'assioma della scelta, supponiamo che $t(i, j)$ sia una funzione univoca).

Poniamo $S_0 = \{t(i, j) : (i, j) \in L_0\}$; S_0 è numerabile. Se S è una parte di T contenente S_0, dalle relazioni (1) e (10) segue

$$C_S(E_i) \cap C_S(F_j) = \emptyset \text{ per ogni } (i, j) \in L_0;$$

quindi dalle eguaglianze (8) e (9) segue la (6).

Ricordiamo che, per ogni $A \in \mathcal{A}$, esiste una parte numerabile S di T tale che A sia un S-cilindro (vedi per es. [1], 38.2).

Sia ora μ una misura ≥ 0 (non necessariamente finita) su $\mathcal{A}$, μ^* la misura esterna indotta da μ sull'insieme $\mathcal{P}(\Omega)$ di tutte le parti di Ω. Allora per ogni $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ esiste un $A \in \mathcal{A}$ tale che sia

$$E \subset A, \quad \mu^*(E) = \mu(A). \tag{11}$$

Se $\mu^*(E) = +\infty$, la (11) è ovvia; altrimenti, per ogni intero positivo n esiste un $A_n \in \mathcal{A}$ tale che sia $E \subset A_n$ e

$$\mu^*(E) \leq \mu(A_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}:$$

basta allora prendere $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

LEMMA 3. Per ogni $E \in \mathcal{F}^\sigma$ e per ogni parte numerabile S di T, risulta $C_S(E) \in \mathcal{A}$.

Inoltre, se μ è una misura ≥ 0 su $\mathcal{A}$ e μ^* è la misura esterna indotta da essa su $\mathcal{P}(\Omega)$, per ogni $E \in \mathcal{F}^\sigma$ esiste una parte numerabile S_1 di T tale che, per ogni parte numerabile S di T contenente S_1, sia

$$\mu^*(E) = \mu(C_S(E)). \tag{12}$$

DIMOSTRAZIONE. Se $E_i \in \mathcal{F}$ ed S è numerabile, è vera la relazione $C_S(E_i) \in \mathcal{A}$; allora essa è vera anche per ogni $E \in \mathcal{F}^\sigma$, grazie alla (2).

Sia $E \in \mathcal{F}^\sigma$ e sia $A \in \mathcal{A}$ tale che si abbia $E \subset A$, $\mu^*(E) = \mu(A)$. Esiste una parte numerabile S_1 di T tale che A sia un S_1 - cilindro; allora, per ogni S numerabile $S \supset S_1$, si ha

$$E \subset C_S(E) \subset C_{S_1}(E) \subset A, \text{ e quindi } \mu^*(E) = \mu(C_S(E)).$$

TEOREMA 1. *Se μ è una misura ≥ 0 su $\mathcal{A}$ e μ^* è la misura esterna indotta da essa su $\mathcal{P}(\Omega)$, allora la restrizione di μ^* ad $\mathcal{F}^\sigma$ è modulare, ossia per ogni coppia E, F di elementi di $\mathcal{F}^\sigma$ risulta*

$$\mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F) = \mu^*(E) + \mu^*(F). \tag{13}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia S_0 una parte numerabile di T verificante la condizione detta nel lemma 2.

In virtù del lemma 3, esiste una parte numerabile S di T contenente S_0 e tale che siano verificate le quattro relazioni:

$$(14)\quad \begin{gathered} \mu^*(E) = \mu(C_S(E)), \quad \mu^*(F) = \mu(C_S(F)) \\ \mu^*(E \cup F) = \mu(C_S(E \cup F)), \quad \mu^*(E \cap F) = \mu(C_S(E \cap F)). \end{gathered}$$

Essendo

$$C_S(E \cup F) = C_S(E) \cup C_S(F),$$

$$C_S(E \cap F) = C_S(E) \cap C_S(F),$$

ed essendo μ modulare, dalle (14) segue la tesi.

COROLLARIO. Detta λ la restrizione di μ^* ad $\mathcal{F}^\sigma$, λ è σ-additiva.

DIMOSTRAZIONE. λ è σ-subadditiva (perchè tale è μ^*), ed è additiva (come si vede facendo $E \cap F = \emptyset$ nella (13)); da queste due proprietà deriva facilmente la tesi.

Ricordiamo ora che $\mathcal{F}^\sigma$ è un reticolo e che l'insieme vuoto vi appartiene. Se μ è una misura *finita* ≥ 0 su $\mathcal{A}$, λ ha, in particolare, le seguenti proprietà:

$$0 \leq \lambda < \infty, \quad \lambda(\emptyset) = 0;$$

λ è non decrescente e modulare.

Allora possiamo applicare il teorema (1.2) di [3] e dedurne il seguente risultato:

TEOREMA 2. *Esiste unico un prolungamento di λ all'anello di parti di Ω generato da $\mathcal{F}^\sigma$, che sia una funzione non negativa, finita ed additiva.*

OSSERVAZIONE 1. Diciamo $\mathcal{R}(\mathcal{F}^\sigma)$ l'anello suddetto; ogni suo elemento è unione finita di insiemi disgiunti della forma $F - G$, con $F, G \in \mathcal{F}^\sigma$ e $G \subset F$ (vedi [1], 5.2, 5.3 e [3], teor. (1.1)). Per ciascuno di questi il prolungamento è definito da $\lambda(F - G) = \lambda(F) - \lambda(G)$ ([3], teor. (1.2)). Inoltre $\mathcal{R}(\mathcal{F}^\sigma)$ è un'algebra, perchè $\Omega \in \mathcal{F}^\sigma$.

OSSERVAZIONE 2. *a*) La σ-additività di λ su $\mathcal{F}^\sigma$ non basta per applicare il classico teorema di prolungamento ad un σ-anello, perchè $\mathcal{F}^\sigma$ non è un anello e neppure un semi-anello.

b) λ coincide con μ su $\mathcal{F}^\sigma \cap \mathcal{A}$, ed in particolare su tutti i rettangoli.

c) In generale non possiamo pretendere che μ^* sia additiva sull'anello generato da $\mathcal{F}$. Infatti sia $F = \bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)$, con $A_t \in \mathcal{A}_t$ ed $A_t \neq X_t$ per un'infinità non numerabile di valori di t. Allora l'unico elemento di $\mathcal{A}$ contenuto in F è il vuoto, e quindi l'unico elemento di $\mathcal{A}$ contenente il complementare F' è tutto Ω: quindi $\mu^*(F') = \mu(\Omega)$ (questa eguaglianza vale anche se al posto di $(\mathcal{A}, \mu)$ si usa il suo completamento).

Supposto $\mu(\Omega) < \infty$, l'additività di μ^* su $\mathcal{R}(\mathcal{F})$ implicherebbe $\mu^*(F) = 0$ per ogni F come quello descritto sopra; ma questo in generale non è vero, come risulta dal seguente esempio. Per ciascun $t \in T$ sia μ_t una misura su $(X_t, \mathcal{A}_t)$ con $\mu_t(X_t) = 1$; sia μ la misura prodotto delle μ_t. Per ogni t sia $A_t \in \mathcal{A}_t$, $A_t \neq X_t$ ma $\mu_t(A_t) = 1$: allora risulta $\mu^*(\bigcap_{t \in T} pr_t^{-1}(A_t)) = 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] HALMOS P. R.: « *Measure Theory* ». Ed. Van Nostrand 1950 (ristampa 1964).

[2] MEYER A.: « *Séparabilité d'un processus stochastique* » C. R. Acad. Sci. Paris, Tome 249 II (1959), pp. 2475-6.

[3] PETTIS B. J.: « *On the extension of measures* ». Annals of Math. 54 (1951), p. 186-197.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 maggio 1967.