RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERGIULIO CORSINI

Sulle potenze di un ideale generato da una A-successione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 190-204

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__190_0>

SULLE POTENZE DI UN IDEALE GENERATO DA UNA A-SUCCESSIONE

PIERGIULIO CORSINI *)

1. È ben noto (cfr. ad. es. [2]) che l'algebra simmetrica, l'algebra di Rees, e l'anello graduato relativi ad un ideale $\mathfrak{a}$ generato da n elemènti $a_1, \ldots, a_n$ di un anello A si possono rappresentare come opportuni quozienti dell'anello di polinomi $A[Z_1, \ldots, Z_n]$ in n indeterminate su A.

In particolare, se φ è l'omomorfismo canonico di $A[Z_1, \ldots, Z_n]$ sull'algebra di Rees $R(\mathfrak{a})$, il nucleo di φ è generato dalle forme (polinomi omogenei nelle Z) che si annullano per $Z_1 = a_1, \ldots, Z_n = a_n$.

In questo lavoro ci siamo proposti di determinare un sistema minimale di generatori di $\operatorname{Ker} \varphi$, nel caso in cui $\mathfrak{a}$ sia la potenza n-esima (n intero positivo) di un ideale generato da una A-successione $y_1, \ldots, y_s$ di elementi di A, con $s \geq 2$.

Perveniamo al nostro scopo nel n^0 5, dopo aver stabilito varie premesse concernenti gli anelli di polinomi e particolari proprietà relative alle n-ple di numeri interi. Nel n^0 6 concludiamo il lavoro, mostrando che insieme all'algebra di Rees vengono completamente determinate anche l'algebra simmetrica e l'anello graduato associato all'ideale considerato.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del CNR.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti, 4 - Genova.

L'autore ringrazia il Prof. P. Salmon per avergli dato utili consigli nella redazione della presente nota.

2. Siano A un anello commutativo con identità, $y_1, y_2, \dots, y_s$, elementi di A costituenti una A-successione [1]) $\mathfrak{m}$ l'ideale da essi generato in A e supponiamo $\mathfrak{m}$ proprio. Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Se F è una forma di $A[X_1, \dots, X_s]$ tale che $F(y_1, \dots, y_s) = 0$, allora $F \in \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$.*

Per la dimostrazione si veda: [3], dimostrazione del teorema 2-1 pag. 33.

COROLLARIO. *Se $y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_s^{r_s}$ dove $t_1, t_2, \dots, t_s, r_1, r_2, \dots, r_s$ sono interi ≥ 0, si ha $t_i = r_i$ per $1 \leq i \leq s$, cioè: gli esponenti di ogni monomio unitario negli elementi y_i sono univocamente determinati.*

Sia σ l'omomorfismo di $A[X_1, \dots, X_s]$ su A così definito: $\sigma(a) = a$ se $a \in A$, $\sigma(X_j) = y_j$ se $1 \leq j \leq s$. Posto $M = X_1^{t_1} \dots X_s^{t_s}$, $M' = X_1^{r_1} \dots X_s^{r_s}$ basta provare che: $\sigma(M) = \sigma(M') \Longrightarrow M = M'$. Supponiamo infatti $M \neq M'$. Per ogni monomio T di $A[X_1, \dots, X_s]$ denotiamo con ∂T il suo grado totale nelle X_j. Sia $\partial M \geq \partial M'$: esistono allora due monomi P e N tali che $M = PN$, $\partial N = \partial M'$ $\partial P \geq 0$. Posto $Q = \sigma(P)N - M'$, si ha $Q \notin \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$; d'altra parte, poichè $\sigma(M) = \sigma(M')$, si ha anche $\sigma(Q) = 0$ e quindi, per la prop. 1, $Q \in \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$ assurdo. Dunque $M = M'$ c.v.d.

Consideriamo adesso l'ideale $\mathfrak{m}^n = (y_1, \dots, y_s)^n$, di cui vogliamo determinare certe algebre particolari, come abbiamo detto nel n^0 1.

Osserviamo che un insieme di generatori di $\mathfrak{m}^n$ è costituito dai «monomi» del tipo $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s}$ tali che $i_1 + i_2 + \dots + i_s = n$. Sia $B = A[\dots, Z_{i_1 i_2 \dots i_s}, \dots]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A nelle $\binom{n+s-1}{s-1}$ indeterminate $Z_{i_1 \dots i_s}$ indiciate nelle s-uple $(i_1, \dots, i_s)$ tali che $\sum_{k=1}^{s} i_k = n$ (cioè le indeterminate sono in corrispondenza biunivoca con i generatori fissati di $\mathfrak{m}^n$). Sia $\varphi: B \rightarrow A$ l'omomorfismo così definito: $\varphi(a) = a$ se $a \in A$, $\varphi(Z_{i_1 \dots i_s}) = y_1^{i_1} \dots y_s^{i_s}$.

---

[1]) Ricordiamo la seguente ben nota definizione: si dice che s elementi di un anello A, $y_1, y_2, \dots, y_s$ costituiscono una A-successione se si ha $(y_1, \dots, y_{i-1}) : (y_i) = (y_1, \dots, y_{i-1})$ per ogni i, $1 \leq i \leq s$.

Ci proponiamo ora di stabilire, colla successiva prop. 2, una notevole proprietà relativa ai polinomi Φ di B tali che $\varphi(\Phi) = 0$.

Consideriamo il sottoinsieme S di B costituito dai monomi del tipo $y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$ $(t_1, \dots, t_s$ interi $\geq 0)$.

Il corollario alla prop. 1 consente allora di porre la seguente

DEFINIZIONE 1. Se M è un monomio di S e se $\varphi(M) = y_1^{d_1} \dots y_s^{d_s}$, diciamo *peso* di M la s-pla univocamente determinata $(d_1, \dots, d_s)$ e *peso globale* di M l'intero $\sum_{k=1}^{s} d_k$.

DEFINIZIONE 2. Diciamo che due monomi M e M' di S sono *isobari* (risp. *globalmente isobari*) se hanno lo stesso peso (risp. lo stesso peso globale). Dunque se M e M' sono monomi di S, posto $M = y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$, $M' = y_1^{t'_1} y_2^{t'_2} \dots y_s^{t'_s} Z_{j_1^1 \dots j_s^1} \dots Z_{j_1^r \dots j_s^r}$ segue dalle definizioni 1 e 2 che M e M' sono isobari se e solo se $t_u + \sum_{k=1}^{r} i_u^k = t'_u + \sum_{k=1}^{r} j_u^k$ per ogni $u = 1, 2, \dots, s$.

DEFINIZIONE 3. Diciamo che un binomio di B è *isobaro* se è differenza di monomi isobari di S.

LEMMA 1. *Sia M un A-modulo, $m_1, m_2, \dots, m_k$, elementi di M e sia $m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_k m_k$ dove $a_j \in A$. Allora esistono degli elementi $b_1, b_2, \dots, b \in A$ tali che $m = b_1(m_1 - m_2) + b_2(m_2 - m_3) + \dots + b_{k-1}(m_{k-1} - m_k) + b_k m_k$.*

Infatti si ha: $m = a_1 m_1 - a_1 m_2 + a_1 m_2 + a_2 m_2 - (a_1 + a_2) m_3 + (a_1 + a_2) m_3 + a_3 m_3 - (a_1 + a_2 + a_3) m_4 + (a_1 + a_2 + a_3) m_4 + \dots - (a_1 + \dots + a_{k-1}) m_k + a_k m_k$ da cui : $m = a_1(m_1 - m_2) + (a_1 + a_2)(m_2 - m_3) + \dots + (a_1 + \dots + a_{k-1}) \cdot (m_{k-1} - m_k) + (a_1 + \dots + a_k) m_k$.

DEFINIZIONE 4. Siano Φ e Φ' elementi di B. Diciamo che Φ è *equivalente* a Φ', e notiamo $\Phi \backsim \Phi'$, se $\Phi - \Phi' \in K$, dove K è il sotto-A-modulo di B generato dai binomi isobari. La relazione $\backsim$ è manifestamente una congruenza.

Immediata conseguenza del lemma 1 e della definizione 4 è il

COROLLARIO 1. *Se Φ è combinazione su A di monomi di S isobari $M_1, \dots, M_k$, esiste $c \in A$ tale che $\Phi \backsim cM_k$.*

Nel seguito denoteremo spesso per brevità con (h) le s-uple $(h_1, \dots, h_s)$ con $h_j \geq 0$.

COROLLARIO 2. *Ogni elemento di B è equivalente a una espressione del tipo $\Phi = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ dove $d_{(h)} \in A$ e gli $M_{(h)}$ sono monomi di S di peso (h); in particolare Φ è combinazione di monomi di peso distinto.*

Infatti Φ si può decomporre nella somma $\sum_{(h)} \Phi_{(h)}$ dove le $\Phi_{(h)}$ sono combinazioni su A di monomi di S isobari di peso (h).

A ciascuna $\Phi_{(h)}$ si applica il corollario 1, donde l'asserto.

LEMMA 2. *Sia M un monomio di S di grado r nelle Z avente peso $(k_1, \dots, k_v, 0, \dots, 0)$ con $k_v > 0$; sia j un intero tale che $1 \leq \leq j \leq v-1$. Esiste allora un monomio M'_j, avente peso superiore a quello di M, ma globalmente isobaro a M tale che $y_j M$ e $y_v M'$ sono isobari.*

Sia infatti $M = y_1^{t_1} \dots y_v^{t_v} \cdot N$, dove

$$N = Z_{i_1^1 \dots i_v^1 0 \dots 0} \dots Z_{i_1^r \dots i_v^r 0 \dots 0}.$$

Se $t_v > 0$, basta porre; $M'_j = y_1^{t_1} \dots y_j^{t_j+1} \dots y_v^{t_v - 1} N$.

Se $t_v = 0$, da $k_v > 0$ segue l'esistenza di $q\,(1 \leq q \leq r)$ tale che $i_v^q > 0$. Allora si prende per M'_j il monomio che si ottiene da M sostituendo $Z_{i_1^q, \dots, i_v^q, 0, \dots, 0}$ con $Z_{i_1^q, \dots, i_j^q + 1, \dots, i_v^q - 1, 0, \dots, 0}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia Φ un polinomio di B, combinazione a coefficienti in A di monomi di S globalmente isobari, tale che $\varphi(\Phi) = 0$. Allora si ha $\Phi \backsim 0$. Inoltre, se Φ è omogeneo nelle Z, Φ è combinazione di binomi isobari ed omogenei nelle Z.*

Ordiniamo lexicograficamente le s-ple di interi $(h) = (h_1, \dots, h_s)$ tali che $h_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{s} h_j = q$, dove q è il peso globale dei monomi di

Φ, ponendo $(h_1, \dots, h_s) > (h'_1, \dots, h'_s)$ se esiste un intero p, $1 \leq p < s$, tale che $h_j = h'_j$ se $1 \leq j \leq p - I$, $h_p > h'_p$. Possiamo supporre per il corollario 2 al lemma 1, che sia $\Phi = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ dove i monomi $M_{(h)}$ hanno peso (h). Nell'insieme delle s-ple $(h) = (h_1, \dots, h_s)$ indicanti i monomi di S che compaiono in Φ, sia $(k) = (k_1, \dots, k_v, 0, \dots, 0)$ quella minima (v è il massimo intero nell'insieme degli j tali che $k_j > 0$). Proveremo innanzitutto che $d_{(k)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j v_j$ dove $b_j \in A$.

Essendo $\varphi(\Phi) = 0$ si ha:

$$d_{(k)} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_v^{k_v} \in (y_1^{k_1+1}, y_1^{k_1} y_2^{k_2+1}, \dots, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}).$$

Poichè y_1 e quindi $y_1^{k_1}$ non è divisore dello zero, si può dividere per $y_1^{k_1}$ e si ha:

$$d_{(k)} y_2^{k_2} \dots y_v^{k_v} \in (y_2^{k_2+1}, y_2^{k_2} y_3^{k_3+1}, \dots, y_2^{k_2} y_3^{k_3} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}) \bmod y_1 .$$

Ma y_2 (e quindi $y_2^{k_2}$) non è divisore dello zero mod y_1; quindi nella relazione precedente si può dividere per $y_2^{k_2}$ (mod y_1) e si ottiene:

$$d_{(k)} y^{k_3} \dots y_v^{k_v} \in (y_3^{k_3+1}, y_3 y_4^{k_4+1}, \dots, y_3^{k_3} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}) \bmod (y_1, y_2),$$

da cui proseguendo analogamente, si deduce

$$d_{(k)} y_v^{k_v} = 0 \bmod (y_1, \dots, y_{v-1})$$

ed infine: $d_{(k)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j y_j$ dove $b_j \in A$.

Per ogni combinazione $Q = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ del tipo sopra considerato, diciamo ordine di Q e lo denotiamo con $\nu(Q)$, l's-pla minima (h) tale che $d_{(h)} \neq 0$. Allora $\nu(\Phi) = (k)$. Proveremo che esiste un polinomio Φ' tale che: $\Phi' \backsim \Phi$, $\nu(\Phi') > \nu(\Phi)$, Φ' è combinazione di monomi globalmente isobari. Infatti, per quanto precede si ha:

$$\Phi = d_{(k)} M_{(k)} + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j y_j M_{(k)} + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)} .$$

Inoltre, in virtù del lemma 2, si può scrivere, per ogni j:

$$y_j M_{(k)} = (y_j M_{(k)} - y_v M'_j) + y_v M'_j$$

dove $y_v M'_j$ è isobaro a $y_j M_{(k)}$.

Dunque, posto $\Phi' = \sum_{j=1}^{v-1} (b_j y_v) M'_j + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)}$, si ha:

$$\Phi \backsim \Phi' \quad \text{e} \quad \nu(\Phi') > \nu(\Phi).$$

Proseguendo in questo modo si ottiene in conclusione che esiste $c \in A$ tale che $\Phi \backsim c M_{q, 0, \dots, 0}$. Essendo $\varphi(\Phi) = 0$ segue che $c y_1^q = 0$ da cui, poichè y_1 non divide lo zero, $c = 0$ e quindi $\Phi \backsim 0$.

Inoltre se Φ è una forma nelle Z di grado r, si può supporre che i monomi $M_{(h)}$ siano tutti di grado r nelle Z; dal corso della dimostrazione segue allora anche l'ultima asserzione della proposizione.

3. Ci proponiamo adesso di stabilire, colla seguente proposizione 3, una proprietà di riduzione dei binomi isobari ed omogenei a binomi unitari nelle Z, modulo particolari binomi lineari appartenenti al nucleo di φ.

Siano n, r, interi positivi. Sia J l'insieme costituito dai sistemi di r s-ple non necessariamente distinte di numeri interi ≥ 0:

$$(i_1^1, \dots, i_s^1), \ (i_1^2, \dots, i_s^2), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r)$$

tali che $\sum_{u=1}^{s} i_u^k = n$ per ogni $k = 1, 2, \dots, r$.

Sia $W = \mathbf{N}^s \times J$ (prodotto cartesiano).

Se $T \in W$ chiamiamo *peso* di T, e lo notiamo $P(T)$, l's-upla

$$c_1 + \sum_{k=1}^{r} i_1^k, \ c_2 + \sum_{k=1}^{r} i_2^k, \dots, c_s + \sum_{k=1}^{r} i_s^k$$

e diciamo che due elementi di W sono *isobari* se hanno lo stesso peso. Ogni elemento T di W si spezza in $T = C \times I$ dove $C \in \mathbf{N}^s$ e I è un insieme di r s-ple $(i_1^v, \dots, i_s^v)$ tali che $\sum_{k=1}^{s} i_k^v = n \quad v = 1, 2, \dots, r$.

Se $T = C \times I$ e $T' = C' \times I'$ sono elementi di W e si ha $C = (c_1, c_2, \dots, c_s)$, $C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_s)$, poniamo $D(T, T') = \sum_{j=1}^{s} |c_j - c'_j|$.

Sia $T = (c_1, \dots, c_s), (i^1_1, \dots, i^1_s), (i^2_1, \dots, i^2_s), \dots, (i^r_1, \dots, i^r_s)$ un elemento di W tale che, per almeno un h, risulti $c_h > 0$, e siano k, q, tali che $i^q_k > 0$, $\left(k \text{ e } q \text{ esistono certamente essendo } \sum_{t=1}^{s} i^v_t = n \text{ per ogni } v\right)$. Denotiamo allora con $\psi(T)$ il sottoinsieme di W costituito dagli elementi T' isobari a T del tipo $T' = (c_1, \dots, c_h - 1, \dots, c_k + 1, \dots, c_s), (i^1_1, \dots, i^1_s), \dots, (i^q_1, \dots, i^q_h + 1, \dots, i^q_k - 1, \dots, i^q_s), \dots, (i^r_1, \dots, i^r_s)$, al variare di h, k, q, in modo che $c_h > 0$, $i^q_k > 0$.

Lemma 3. *Dati due elementi $T = C \times I$, $T' = C' \times I'$, appartenenti a W e isobari, se $C \neq C'$, esiste una successione $T_0 = C_0 \times I_0$, $T_1 = C_1 \times I_1, \dots, T_g = C_g \times I_g$ di elementi di W isobari tali che $T_0 = T$, $T_{i+1} \in \psi(T_i)$, $D(T_g, T') = 0$ ovvero $C_g = C'$.*

Poniamo $H = \{h \in N \mid c_h > c'_h\}$, $K = \{k \in N \mid c_k < c'_k\}$. Poichè $C \neq C'$, H e K sono entrambi non vuoti. Sia $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, per la condizione di isobarità si ha: $c_{k_1} + \sum_{v=1}^{r} i^v_{k_1} = c'_{k_1} + \sum_{v=1}^{r} i'^v_{k_1}$, di qui si deduce che esiste q tale che $i^q_{k_1} > 0$. Da $h_1 \in H$, segue che $\psi(T)$ non è vuoto; sia $T_1 \in \psi(T)$, allora:

$$P(T_1) = P(T) \quad \text{e} \quad 0 \leq D(T_1, T') < D(T, T').$$

Se $D(T_1, T') = 0$ allora $C_1 = C'$ e la dimostrazione è conclusa, altrimenti si opera allo stesso modo su T_1 e si ottiene un sistema T_2 tale che $P(T_2) = P(T_1)$ e $0 \leq D(T_2, T') < D(T_1, T')$. Così proseguendo si perviene infine a un sistema T_g che soddisfa a:

$$P(T_g) = P(T) \quad \text{e} \quad D(T_g, T') = 0$$

da cui $C_g = C'$ c.v.d.

Proposizione 3. *Denotiamo con A_1 l'ideale di B generato dai binomi del tipo $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ tali che $i_u = j_u$ se $u \neq h, k$*

$i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; *allora se* Q *è un binomio isobaro e omogeneo nelle* Z, *si ha:* $Q = NF \bmod A_1$ *dove* N *è un monomio nelle sole* y *e* F *un binomio isobaro (e quindi omogeneo) nelle sole* Z.

Sia $\vartheta : S \longrightarrow W$ la corrispondenza così definita

$$y_1^{t_1} y_2^{t_2} \ldots y_s^{t_s} Z_{i_1^1 \ldots i_s^1} \ldots Z_{i_1^r \ldots i_s^r} \longrightarrow (t_1, \ldots, t_s), (i_1^1, \ldots, i_s^1), \ldots, (i_1^r, \ldots, i_s^r).$$

Per il corollario alla proposizione 1, ϑ è biunivoca. Sia ora dato un binomio isobaro e omogeneo nelle Z: $Q = M - M'$ e sia T_1 un sistema appartenente a $\psi(\vartheta(M))$. Notiamo che $M = \vartheta^{-1}(T_1) \bmod. A_1$.

Allora $Q = M - M' = (\vartheta^{-1}(T_1) - M') \bmod A_1$ e per il lemma 3, si ha: $Q = (\vartheta^{-1}(T_g) - M') \bmod A_1$ da cui: $Q = NF \bmod A_1$ dove N è un monomio nelle sole y_j e F un binomio isobaro nelle sole Z c.v.d.

4. Premettiamo adesso alcuni lemmi concernenti sistemi di numeri naturali, mediante i quali possiamo esprimere i binomi isobari nelle sole Z come combinazione dei binomi isobari di secondo grado (Prop. 4).

Sia L l'insieme dei sistemi ordinati costituiti da $r \geq 2$ s-uple di interi ≥ 0: $(i_1^1, \ldots, i_s^1) \geq \ldots \geq (i_1^r, \ldots, i_s^r)$ tali che $\sum_{k=1}^{s} i_k^h = n$ per ogni h, dove l'ordinamento è quello lexicografico (introdotto nella prop. 2).

L'insieme L ora definito è equipotente all'insieme J introdotto nel n⁰ 3.

Definizione 5. Dati due elementi $M = (i_1^1, \ldots, i_s^1) \geq \ldots \geq (i_1^r, \ldots, i_s^r)$ e $N = (j_1^1, \ldots, j_s^1) \geq \ldots \geq (j_1^r, \ldots, j_s^r)$ di L, poniamo $M > N$ se per il più piccolo u tale che $(i_1^u, \ldots, i_s^u) \neq (j_1^u, \ldots, j_s^u)$ si ha $(i_1^u, \ldots, i_s^u) > (j_1^u, \ldots, j_s^u)$. In tal modo L è totalmente ordinato.

Sia ora dato un elemento di L: $M = (i_1^1, \ldots, i_s^1) \geq \ldots \geq (i_1^r, \ldots, i_s^r)$.

Denotiamo con $\sigma(M)$ il sottoinsieme di L costituito dai sistemi $F = (f_1^1, \ldots, f_s^1) \geq \ldots \geq (f_1^r, \ldots, f_s^r)$ tali che:

$$(1) \qquad \sum_{h=1}^{r} f_k^h = \sum_{h=1}^{r} i_k^h \quad \text{per ogni } k,\ 1 \leq k \leq s.$$

Siano inoltre p, q due interi distinti tali che $1 \leq p, q \leq r$.

Sia $F' = (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^r, \dots, f_s^r)$ un elemento di $(\mathrm{N}^s)^r$ tale che

$$(f_1^t, \dots, f_s^t) = (i_1^t, \dots, i_s^t) \quad \text{se } t \neq p, q,$$

$$f_h^p + f_h^q = i_h^p + i_h^q \quad \text{se } 1 \leq h \leq s,$$

$$\sum_{h=1}^{s} f_h^p = \sum_{h=1}^{s} f_h^q = n.$$

F' individua un elemento di J e quindi un elemento F di L nella bigezione $J \to L$.

Diciamo allora che F è dedotto da M con una sostituzione elementare e denotiamo con $\tau(M)$ il sottoinsieme di L costituito dai sistemi deducibili da M con sostituzioni elementari successive al variare della coppia (p, q). Si ha manifestamente : $\tau(M) \subset \sigma(M)$.

LEMMA 4. *Sia $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ un sistema di L, sia t un intero $(1 \leq t \leq s-1)$ per cui valgono le seguenti condizioni :*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{t} i_k^1 < n \qquad\qquad (2') \qquad i_t^1 < \sum_{h=1}^{r} i_t^h .$$

Allora esiste in $\tau(M)$ un sistema M' tale che $M' > M$.

Infatti, essendo $\sum_{k=1}^{s} i_k^1 = n$, da (2) si deduce che esiste un intero $p\,(t < p \leq s)$, tale che $i_p^1 > 0$. Inoltre da (2′) segue che esiste un intero q, $(1 < q \leq r)$, tale che $i_t^q > 0$. Allora se si pone :

$$F' = (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^r \dots, f_s^r) \in (\mathrm{N}^s)^r,$$

dove :

$$f_v^u = i_v^u \quad \text{per } u \neq 1, q;\ f_v^1 = i_v^1,\ f_v^q = i_v^q \quad \text{per } v \neq t, p;$$

$$f_t^1 = i_t^1 + 1,\ f_p^1 = i_p^1 - 1, \quad f_t^q = i_t^q - 1, \quad f_p^q = i_p^q + 1,$$

F' individua un elemento di J, dunque un elemento F di L, t tale che: $F \in \tau(M)$, $F > M$ (in quanto $(f_1^1, \dots, f_s^1) > (i_1^1, \dots, i_s^1)$). Siano ora: M_0 il massimo di $\sigma(M)$ ed M_1 il massimo di $\tau(M)$. Vale il

LEMMA 5. *Per ogni sistema M di L si ha $M_0 = M_1$. Essendo $M_1 \leq M_0$, è sufficiente provare che M_1 non può essere strettamente minore di M_0; supponiamo infatti $M_1 < M_0$. Sia*

$$M_1 = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r),\ M_0 = (j_1^1, \dots, j_s^1) \geq \dots \geq (j_1^r, \dots, j_s^r).$$

Sia u il più piccolo intero tale che $(i_1^u, \dots, i_s^u) < (j_1^u, \dots, j_s^u)$, sia t il minimo intero tale che $i_t^u < j_t^u$. Si ha $t < s$, perchè, se fosse $i_k^u = j_k^u$ per $1 \leq k < s$, e $i_s^u < j_s^u$: seguirebbe:

$$n = \sum_{k=1}^{s} i_k^u < \sum_{k=1}^{s} j_k^u = n:$$

assurdo. Si ha inoltre, in virtù di (1):

$$\sum_{h=1}^{u-1} i_t^h + \sum_{h=u}^{r} i_t^h = \sum_{h=1}^{u-1} j_t^h + \sum_{h=u}^{r} j_t^h; \tag{3}$$

poichè, per la definizione di u: $h < u \Longrightarrow i_p^h = j_p^h$ per ogni $p = 1, 2, \dots, s$, si ha $i_t^h = j_t^h$ e quindi, per (3): $\sum_{h=u}^{r} i_t^h = \sum_{h=u}^{r} j_t^h$. Poniamo ora [2])

$$N = (i_1^u, \dots, i_s^u) \geq (i_1^{u+1}, \dots, i_s^{u+1}) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r),$$

$g_k^p = i_k^{p+u-1}$, onde si ha $N = (g_1^1, \dots, g_s^1) \geq \dots \geq (g_1^q, \dots, g_s^q)$ dove $q = r - u + 1$. Risulta:

$$g_t^1 = i_t^u < j_t^u \leq \sum_{h=u}^{r} j_t^h = \sum_{h=u}^{r} i_t^h = \sum_{h=1}^{q} g_t^h$$

---

[2]) ripetendo in $(\mathbf{N}^s)^{r-u+1}$ le stesse considerazioni fatte all'inizio del n° 4 per $(\mathbf{N}^s)^r$.

da cui:

$$g_t^1 < \sum_{h=1}^{q} g_t^h . \tag{4}$$

Si ha inoltre:

$$\sum_{k=1}^{t} g_k^1 = \sum_{k=1}^{t-1} g_k^1 + g_t^1 = \sum_{k=1}^{t-1} i_k^u + i_t^u < \sum_{k=1}^{t-1} j_k^u + j_t^u \leq n.$$

Ne segue:

$$\sum_{k=1}^{t} g_k^1 < n. \tag{5}$$

In virtù delle relazioni (4) e (5), segue dal lemma 4 che esiste un sistema $N_1 \in \tau(N)$ tale che $N_1 > N$. Allora, se poniamo $N_1 = (f_1^1, \dots, f_s^1) \dots (f_1^q, \dots, f_s^q)$ e denotiamo con M_2 l'elemento individuato in L dal sistema: $(i_1^1, \dots, i_s^1), \dots, (i_1^{u-1}, \dots, i_s^{u-1})$, $(f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^q, \dots, f_s^q)$ di $(\mathrm{N}^s)^r$, si ha $M_2 \in \tau(M_1) = \tau(M)$ e $M_2 > M_1$, contro l'ipotesi che M_1 sia massimo in $\tau(M)$. Ciò è assurdo e quindi: $M_1 = M_0$ c.v.d.

DEFINIZIONE 6. Diciamo *semplice* un binomio del tipo

$$Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$$

dove $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h.

Per ogni monomio $F = Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$, si può supporre

$$(i_1^1 \dots i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r \dots i_s^r).$$

Se T è il sottoinsieme di S costituito dai monomi di grado r nelle sole Z, si ha allora la corrispondenza biunivoca $\delta: T \to L$ così definita:

$$Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r} \to (i_1^1 \dots i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r \dots i_s^r) .$$

Dimostriamo adesso la

PROPOSIZIONE 4. *Ogni binomio Q nelle sole Z isobaro e quindi omogeneo, appartiene all'ideale Λ_2 generato in B dai binomi semplici.*

Proviamo innanzitutto che se F e F' sono due monomi nelle sole Z isobari e se $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$ allora vale

$$F = F' \bmod \Lambda_2 . \tag{6}$$

Infatti, $F - F'$ è un binomio nelle Z isobaro e omogeneo, e si ha quindi necessariamente $\partial F = \partial F' \geq 2$.

Allora se $\delta(F')$ è deducibile da $\delta(F)$ mediante una sostituzione elementare, si possono fattorizzare F e F' nel modo seguente $F = KG$, $F' = KG'$ dove G e G' sono monomi isobari nelle Z di secondo grado e $K \in S$.

Di qui $F - F' = K(G - G') \in \Lambda_2$.

Più generalmente, se $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$, ragionando come sopra, si vede che $F - F'$ è combinazione finita a coefficienti in B di binomi semplici, cioè: $F = F' \bmod \Lambda_2$.

Sia ora $Q = F - F'$ un binomio nelle sole Z, isobaro; ciò implica: $\sigma(\delta(F)) = \sigma(\delta(F'))$ da cui, con le notazioni introdotte nel lemma 5: $(\delta(F))_0 = (\delta(F'))_0$. Per il lemma 5 si ha allora $(\delta(F))_1 = (\delta(F'))_1$, e di qui si deduce: $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$. Dunque vale la (6) e $Q \in \Lambda_2$ c.v.d.

5. Siamo adesso in grado di stabilire il teorema centrale del presente lavoro, dal quale trarremo immediatamente, nel numero successivo, le annunciate applicazioni alle algebre relative all'ideale $\mathfrak{m}^n$.

TEOREMA 1. *L'ideale $\mathfrak{q}_\infty$ di B* [3]) *generato dalle forme Φ tali che $\varphi(\Phi) = 0$, ha un sistema di generatori costituito dai binomi del tipo*

[3]) Abbiamo adottato per l'ideale in questione la notazione $\mathfrak{q}_\infty$ già introdotta da Micali in [2].

(λ_1) $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ *dove* $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$, *e*

(λ_2) $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$ *dove* $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ *per ogni* h.

Sia infatti Φ una forma di $\mathfrak{q}_\infty$ di grado r nelle Z. Si ha: $\Phi = \Sigma\, a_i M_i$ dove gli M_i sono monomi unitari di grado r, $a_i \in A$, per ogni i. Allora il peso globale di ogni M_i vale nr, onde Φ è combinazione di monomi globalmente isobari. Si può quindi applicare la proposizione 2 e si ha: Φ è combinazione a coefficienti in A di binomi isobari e omogenei nelle Z. D'altra parte, per le proposizioni 3 e 4, ogni binomio isobaro e omogeneo nelle Z appartiene all'ideale generato da binomi dei tipi (λ_1) e (λ_2); di qui l'asserto.

COROLLARIO. *L'ideale* $\mathfrak{q}$ *di* B *generato dalle forme lineari* $\Sigma\, b_{i_1 \dots i_s} Z_{i_1 \dots i_s}$ *tali che* $\Sigma\, b_{i_1 \dots i_s} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s} = 0$ *ha un sistema di generatori costituito dai binomi del tipo* (λ_1).

6. I risultati ottenuti permettono di determinare l'algebra simmetrica, l'algebra di Rees e l'anello graduato associato relativi all'ideale $\mathfrak{m}^n$.

Ricordiamo brevemente il significato di queste strutture. Sia A un anello e $\mathfrak{a}$ un suo ideale proprio.

DEFINIZIONE 7. Sia T l'algebra tensoriale relativa all'ideale $\mathfrak{a}$ e Q l'ideale di T generato dagli elementi del tipo $xy - yx$, dove $x, y \in \mathfrak{a}$. Chiamiamo *algebra simmetrica* di $\mathfrak{a}$ l'algebra quoziente T/Q [4]).

Nel seguito denoteremo con $\mathfrak{a}$ un ideale di tipo finito e con $a_1, a_2, \dots, a_s$, un suo sistema di generatori.

Si ha la seguente proposizione (cf. [2], ch I, n^0 2).

PROPOSIZIONE 5. *Posto* $B = A[Z_1, \dots, Z_s]$ *chiamiamo* $\mathfrak{q}$ *l'ideale di* B *generato dalle forme lineari* $b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_s Z_s$, *dove* $b_j \in A\ (1 \leq j \leq s)$, *tali che* $b_1 a_1 + \dots + b_s a_s = 0$. *Allora si ha* $S(\mathfrak{a}) \simeq B/\mathfrak{q}$.

---

[4]) Per maggiori particolari sulle algebre tensoriali e simmetriche, cf. [1].

DEFINIZIONE 8. Diciamo *algebra di Rees* $R(\mathfrak{a})$ dell'ideale $\mathfrak{a}$ il sottoanello di $A[Z]$ costituito dalle somme finite del tipo $c_0 + c_1 Z + + c_2 Z^2 + \dots + c_n Z^n$ dove $c_i \in \mathfrak{a}^i$.

Vale la seguente proposizione (cf. [2]):

PROPOSIZIONE 6. *Se chiamiamo $\mathfrak{q}_\infty$ l'ideale omogeneo di B generato dalle forme $g(Z_1, \dots, Z_s)$ tali che $g(a_1, \dots, a_s) = 0$, allora $R(\mathfrak{a})$ è isomorfa a $B/\mathfrak{q}_\infty$.*

Si ha evidentemente $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_\infty$.

DEFINIZIONE 9. Chiamiamo *anello graduato associato* dell'ideale $\mathfrak{a}$, l'anello $G(\mathfrak{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$.

Segue facilmente dalla proposizione 6 la seguente

PROPOSIZIONE 7. *È possibile rappresentare $G(\mathfrak{a})$ come quoziente di $A[Z_1, \dots, Z_s]$ rispetto all'ideale $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_\infty + \mathfrak{a}\, A[Z_1, \dots, Z_s]$.*

Possiamo adesso concludere, in virtù del teorema 1, che per l'ideale $\mathfrak{m}^n$, dove $\mathfrak{m}$ è un ideale generato da una A-successione $y_1, \dots, y_s$, vale il seguente teorema.

TEOREMA 2. *Si hanno i seguenti isomorfismi:*
$S(\mathfrak{m}^n) = A[\dots Z_{i_1 \dots i_s} \dots]/\mathfrak{q}$, dove $\mathfrak{q}$ è generato dai binomi del tipo $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ con $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; $R(\mathfrak{m}^n) = A[\dots Z_{i_1 \dots i_s} \dots]/\mathfrak{q}_\infty$, dove $\mathfrak{q}_\infty$ è generato dai binomi $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$ con $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h e da $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ con $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; $G(\mathfrak{m}^n) = A[\dots Z_{i_1 \dots i_s} \dots]/\mathfrak{q}'$, dove q' è generato dagli elementi $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s}$, $(i_1 + i_2 + \dots + i_s = n)$ e dai binomi $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$ dove $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CHEVALLEY, *Fundamental concepts of algebra.* Academic Press Inc. New York 1956.

[2] A. MICALI, *Sur les algèbres universelles* (tesi) Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14, 2 (1964).

[3] D. REES, *The grade of an ideal or module.* Proc. Camb. Phil Soc. 53 (1957) pag. 28-42.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1º gennaio 1967.