RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

Sulle localizzazioni di ideali e moduli di tipo finito privi di torsione. (Proprietà del chiuso di un fascio algebrico coerente e liscio)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 205-218

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__205_0>

SULLE LOCALIZZAZIONI DI IDEALI E MODULI DI TIPO FINITO PRIVI DI TORSIONE. (PROPRIETÀ DEL CHIUSO DI UN FASCIO ALGEBRICO COERENTE E LISCIO).

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO *)

Sommario.

Sia V una varietà affine (irriducibile) su un corpo K commutativo algebricamente chiuso, ed $A = A[V]$ il suo anello delle coordinate, il quale è isomorfo all'anello delle sezioni globali del fascio $\mathcal{A}_V$ degli anelli locali di V. Sia inoltre M un A-modulo di tipo finito, il quale può sempre pensarsi come modulo delle sezioni globali d'un fascio $\mathcal{M}$ algebrico coerente su V.

È noto che, detto A_x l'anello locale in un punto (x) di V, se l'A_x-modulo $M_x \simeq M \bigotimes_A A_x$ è libero di rango r, esiste un aperto U di V contenente (x), tale che per ogni $(x') \in U$ siano liberi di rango r gli $A_{x'}$-moduli $M_{x'}$, e sia $(\mathcal{M}/U) \simeq (\mathcal{A}_V^r/U)$.

Inoltre ([1], [7] e [10]) il fascio $\mathcal{M}$ su V è certo libero fuori di un chiuso di cdm 1 in V, mentre se V è normale ed $\mathcal{M}$ privo di torsione, allora $\mathcal{M}$ è localmente libero fuori di un chiuso di cdm > 1 in V.

Nella presente nota dimostro che se I è un ideale d'un dominio d'integrità noetheriano A e $H(I)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi p di A nei quali I possiede localizzazione non libera, $I_p \not\simeq A_p$, allora accanto alla nota equivalenza:

$$I \subseteq p \Longleftrightarrow I_p \neq A_p$$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

vale la:

$$H(I) \subseteq p \Longleftrightarrow I_p \nsim A_p \, .$$

Da ciò segue anche che se un fascio d'ideali su di una varietà V affine, ha fibra libera in un punto, l'ideale associato ha localizzazioni libere (sui propri anelli locali) in tutti i chiusi propri irriducibili (sottovarietà) della varietà V, passanti per quel punto.

Dimostro poi (n. 13) che: *per ogni ideale I, d'un dominio noetheriano A, l'ideale $H(I)$ non ha divisori primi minimali principali.*

Cioè anche che: *se $\mathcal{J}$ è un fascio d'ideali sulla varietà affine V, e $\chi(\mathcal{J})$ è il chiuso fuori del quale $\mathcal{J}$ è libero, $\chi(\mathcal{J})$ non ha componenti irriducibili di* cdm 1 *le quali non siano intersezione non completa di V con forme di K^n.*

Inoltre per ogni A-modulo M, detto $H(M)$ l'ideale intersezione degli ideali primi p di A in cui M_p non è libero su A_p, dimostro (n. 10) che per qualsiasi sequenza esatta di A-moduli del tipo

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

vale la relazione

$$H(M') \cap H(M'') \subseteq H(M).$$

Dopo di che posso infine dimostrare (n. 14) che: *per ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione, sopra un dominio noetheriano A, l'ideale $H(M)$ non ha divisori primi minimali principali,* e quindi anche che: *un fascio algebrico coerente e liscio $\mathcal{M}$ di rango $r \geq 1$ sopra una K-varietà algebrica affine non può avere nel suo chiuso $\chi(\mathcal{M})$ componenti irriducibili di* cdm. 1, *le quali non siano intersezione non completa dl V con forme dell'ambiente.*

1. Indicheremo qui sempre con K un corpo commutativo algebricamente chiuso e con K^n lo spazio affine n-dimensionale, dotato della topologia di Zariski, per la quale i chiusi sono tutti e soli gli insiemi algebrici $V(E)$ di K^n costituiti dalle totalità degli zeri delle famiglie E di polinomi di $K[X]$.

Indicheremo inoltre con $D(E)$ gli aperti complementari dei $V(E)$, e con $I(H)$ l'ideale appartenente ad un insieme algebrico H di K^n, cioè l'ideale (radicale) di tutti i polinomi nulli in ogni punto di H.

$I(H)$ sarà primo se e solo se H è irriducibile, (e quindi qui assolutamente irriducibile, poichè K è algebricamente chiuso).

2. Sia V un qualunque sottospazio non vuoto di K^n.

Si dice fascio degli anelli locali di V, il fascio $\mathcal{A}_V$, determinato dal prefascio (canonico) ottenuto associando ad ogni porzione aperta U di V, l'anello delle applicazioni regolari $U \longrightarrow K$, e ad ogni coppia di aperti U e U', con $U' \subseteq U$, l'omomorfismo canonico $\varphi_{U'}^{U}$ di restrizione, operante sulle applicazioni $f: U \longrightarrow K$ con $\varphi_{U'}^{U}(f) = f \mid U'$.

Ogni fibra $\mathcal{A}_{V,x_0}$ di $\mathcal{A}_V$ è un anello locale, il cui ideale massimale è costituito con i germi rappresentati da applicazioni regolari nulle nel punto (x_0), cioè il cui numeratore appartiene all'ideale del punto (x_0).

Inoltre il nucleo dell'omomorfismo canonico ε_{x_0} dell'anello $A[x_0]$, delle frazioni regolari in (x_0), sulla fibra $\mathcal{A}_{V,x_0}$, che associa ad ogni frazione regolare in (x_0) il germe da essa rappresentato, è l'ideale di $A[x_0]$, formato con gli elementi esprimibili come prodotto di un elemento di $I(V)$, per un elemento di $A[x_0]$. Ideale che si indica con $I(V) \cdot A[x_0]$.

3. Sia, d'ora in poi, V un chiuso irriducibile di K^n e quindi $I(V)$ primo in $K[X]$, allora $I(V) \cdot A[x_0]$ è primo in $A[x_0]$.

Inoltre se $A[V] = K[X]/I(V)$, che indicheremo soltanto con A, è l'anello delle coordinate del chiuso V; e se p è l'ideale (primo) di A appartenente ad (x_0), la fibra $\mathcal{A}_{V,x_0}$ di $\mathcal{A}_V$ s'identifica canonicamente con l'anello $S^{-1}A$ delle frazioni di elementi di A con denominatore nella parte moltiplicativa $S = A - p$, anello che indicheremo anche con $A_p \simeq A[x_0]/(I(V) \cdot A[x_0])$, o anche con A_{x_0}.

Dunque ogni germe di $\mathcal{A}_{V,x_0}$ può esser rappresentato in uno ed un sol modo con una frazione, elemento di A_p, ed essendo V irriducibile, $\mathcal{A}_{V,x_0}$ è un dominio d'integrità (per ogni x_0).

4. L'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ delle sezioni globali di $\mathcal{A}_V$, cioè delle applicazioni di V in K ovunque regolari su V, può identificarsi con l'anello $A = A[V]$ delle coordinate di V.

Inoltre le sezioni di $\mathcal{A}_V$ su un aperto $U, f \in \Gamma(U, \mathcal{A}_V)$, si possono identificare (in modo naturale) con le applicazioni regolari

$f: U \longrightarrow K$, tenendo però essenzialmente distinto, per ogni $(x) \in U$, il valore f_x della sezione f nel punto (x), (elemento della fibra $\mathcal{A}_{V,x}$ di $\mathcal{A}_V$ nel punto (x)), dal valore $f(x)$ della applicazione regolare f nel punto (x), (elemento di K).

5. Se V è ancora un insieme chiuso irriducibile di K^n con la topologia relativa rispetto a quella di K^n, indicheremo con V anche la varietà affine, sottovarietà chiusa di K^n, definita dallo spazio anellato $(V, \mathcal{A}_V)$; e, in generale, diremo varietà algebrica affine ogni spazio anellato $(X, \mathcal{A}_X)$, isomorfo ad una sottovarietà chiusa di K^n.

Sia dunque V una varietà affine (irriducibile) su K.

L'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V) \simeq A[V]$, che indicheremo come in 4) con A, risulta evidentemente un dominio d'integrità noetheriano (in quanto immagine omomorfa d'un anello di polinomi in un n^0 finito d'indeterminate sopra un corpo).

Ricordiamo qui che se $\mathcal{M}$ è un fascio algebrico coerente su V, $\Gamma(V, \mathcal{M})$ (o $\Gamma(\mathcal{M})$), è un A-modulo di tipo finito, e $\Gamma(\ )$ è funtore covariante esatto sulla categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini V, e omomorfismi algebrici, con valori nella categoria degli A-moduli di tipo finito.

Inoltre per ogni A-modulo di tipo finito M, se si considera su V il fascio costante M a fibra isomorfa ad M, tenuto conto che $\mathcal{A}_V$ è in modo naturale fascio di A-moduli, resta individuato ([10] n^0 48) un fascio di $\mathcal{A}_V$-moduli, cioè, algebrico coerente su V:

$$\mathcal{A}_V \bigotimes_A M$$

che si indica con $\mathcal{C}(M)$.

Poichè l'essere di tipo finito, per un A-modulo equivale ad ammettere una suriezione del tipo $A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$, e l'operatore tensoriale è esatto a destra (anzi qui A_x è addirittura piatto), la fibra di $\mathcal{C}(M)$ nel punto $(x) \in V$ è un A_x-modulo di tipo finito (su A_x (n^0 3)) che s'identifica con:

$$M_x \simeq M \bigotimes_A A_x .$$

L'operatore $\mathcal{C}(\ )$ risulta funtore covariante esatto sulla categoria degli A-moduli di tipo finito ed A-omomorfismi (se $\mathcal{C}(\varphi) = i_{\mathcal{A}_V} \bigotimes \varphi$)

con valori nella categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini e degli omomorfismi algebrici.

(Ricordiamo che A deve essere una K-algebra di tipo finito, priva di nullipotenti, affinchè la si possa pensare come K-algebra delle sezioni globali del fascio degli anelli locali di qualche varietà affine).

Infine per i funtori $\Gamma(\ )$ e $\mathcal{C}(\ )$, così definiti valgono gli isomorfismi (canonici) $\Gamma(\mathcal{C}(M)) \simeq M$ e $\mathcal{C}(\Gamma(\mathcal{M})) \simeq \mathcal{M}$.

6. Diciamo che un fascio di $\mathcal{A}_V$-moduli $\mathcal{M}$ è liscio o privo di torsione, se l'$\mathcal{A}_{V,x}$-modulo $\mathcal{M}_x$, fibra di $\mathcal{M}$ nel punto (x), e quindi l'A_x-modulo $M_x \simeq M \bigotimes_A A_x$ (con $M = \Gamma(\mathcal{M})$ ed $A = \Gamma(\mathcal{A}_V)$) è privo di torsione per ogni $(x) \in V$, o (il che sopra le varietà V, in quanto hanno il chiuso irriducibile, è lo stesso), se $\mathcal{M}_x$ è privo di germi f_x appartenenti a sezioni $f \in \Gamma(U, \mathcal{M})$, con U aperto contenente (x), tali che in qualche punto $(x_0) \in U$ sia $f_{x_0} = 0$.

In caso contrario, l'insieme dei germi suddetti costituisce un sottofascio di $\mathcal{M}$: il sottofascio di torsione $t(\mathcal{M})$.

È noto che se $\mathcal{M}$ è algebrico, coerente e privo di torsione, sulla varietà V esso è isomorfo ad un sottofascio di un $\mathcal{A}_V^q$, anzi [3] se $\mathcal{M}$ ha rango r, esso ammette una iniezione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{A}_V^r \qquad (\text{con supp.}\ (\mathcal{A}_V^r/i(\mathcal{M})) \neq V),$$

e viceversa.

Ogni fascio algebrico coerente e liscio su di una varietà affine, il quale sia di rango 1, è dunque un fascio d'ideali.

(L'esistenza della i si può dedurre, del resto, dalla analoga ([6] pg. 131) per i moduli di tipo finito, privi di torsione, tramite il funtore $\mathcal{C}$ del n^0 5).

7. Diciamo che un fascio algebrico coerente $\mathcal{M}$, sulla varietà V affine, è localmente libero se l'A_x-modulo M_x è libero di tipo finito su A_x, per ogni (x) di V.

D'altra parte è noto ([7] e [10]) che, se per un $(x) \in V$ l'A_x-modulo M_x è libero, esiste un aperto connesso U di V contenente (x) ed un intero $r \geq 0$, tali che $\mathcal{M}/U$ sia isomorfo ad $\mathcal{A}_V^r/U$; e in tal caso sono anche liberi gli $A_{x'}$-moduli $M_{x'}$ per ogni $(x') \in U$; ed il rango r di M_x su A_x è costante al variare di (x) in U.

Perciò si può dire che un fascio algebrico coerente è localmente libero su V, se per ogni $(x) \in V$, esiste un aperto U di V contenente (x) tale che $\mathcal{M}/U$ sia isomorfo ad un $(\mathcal{A}_V/U)$-fascio della forma $\mathcal{A}_V^r/U$, ed è noto ([10]) che ciò accade se e solo se $\Gamma(V, \mathcal{M})$ è un A-modulo proiettivo.

Inoltre ([7] e [10]) per ogni fascio algebrico $\mathcal{M}$ su V, l'insieme degli $(x) \in V$ tali che M_x sia libero su A_x, è un aperto W non vuoto di V, e su W, per quanto detto prima, il rango r di M_x su A_x sarà localmente costante, ed il fascio $\mathcal{M}$ localmente libero. Il chiuso X complementare di W in V (come è detto al n^0 5), V è pensata sempre come sottovarietà chiusa di K^n) si dice il *chiuso del fascio* $\mathcal{M}$, e si indica con $\chi(\mathcal{M})$.

Anzi risulta [1] che ogni fascio algebrico coerente $\mathcal{M}$ è addirittura libero fuori di un chiuso proprio X, cioè sarà su tutto $V - X$, $\mathcal{M}/(V - X) \simeq \mathcal{A}_V^r/V - X)$, e il chiuso X avrà generalmente codimensione 1 in V.

Mario Baldassarri ha dimostrato inoltre [1] che, se si aggiunge alle ipotesi precedenti la condizione che V sia normale, ed $\mathcal{M}$ liscio, esso risulta localmente libero fuori di un chiuso X di V di cdm > 1 su V.

8. Osservazione. L'ipotesi della normalità di V è in [1] usata per escludere l'esistenza su V di luoghi singolari di cdm 1. Mentre l'esempio riportato in [2] nella osservazione di pag. 280 mostra come $M = I = (\bar{x}, \bar{y})$ su $A = K[x, y]/(x^3 - y^2)$, abbia nel punto singolare $(x) = (0, 0)$, localizzazione non libera, (anzi non proiettiva).

Osserviamo che in tale esempio il punto $(0, 0)$ della varietà lo si ottiene sia come sottovarietà dell'ideale $(\bar{x})$, cioè su K^2 come $V_1(x, x^3 - y^2)$, ma è in sostanza una componente irriducibile dell'insieme algebrico appartenente all'ideale $(\bar{x}, \bar{y})$ di A, il quale non è principale, cioè è una componente di $V_1'(x, y, x^3 - y^2)$.

In altre parole il chiuso irriducibile costituito dal punto 0, è intersezione completa di $V(x^3 - y^2)$ con $V(x)$, ma si presenta anche come intersezione non completa di $V(x^3 - y^2)$ con $V(y - mx)$.

Ebbene, vogliamo dimostrare come solo su chiusi siffatti di codimensione 1, di una varietà affine, un fascio algebrico coerente e liscio può essere non libero, e mai su chiusi di cdm 1 che si ottengono solo come intersezione completa della varietà con divisori irriducibili dello spazio.

9. Sia ancora V una varietà affine sul corpo K, e quindi il chiuso di V (n^0 5)) abbia l'anello delle coordinate $A \simeq \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ d'integrità e noetheriano.

Sia $\mathcal{M}$ un fascio algebrico coerente di rango r su V, e quindi $M = \Gamma(V, \mathcal{M})$ sia un A-modulo di tipo finito e rango r. Consideriamo l'insieme dei chiusi irriducibili di V sui quali M_p non è libero su A_p, cioè l'insieme, che indichiamo con $\mathbf{H}(M)$, degli ideali primi p di A per cui $M_p \simeq M \bigotimes_A A_p \not\simeq A_p^r$.

Abbiamo detto in 7), che esiste almeno un punto $(x) \in V$ tale che, se p è l'ideale appartenente ad (x), M_p sia libero su A_p, e che se e soltanto se M è proiettivo, M_p è libero per tutti gli ideali p dei punti di V (v. del resto anche [5] teor. 2 pag. 141).

Dunque in generale l'insieme $\mathbf{H}(M)$ degli ideali p per cui $M_p \not\simeq A_p^r$ non è vuoto; indichiamo con $H(M)$ l'ideale intersezione di tutti gli ideali di questo insieme, cioè $H(M) = \bigcap_\alpha p_\alpha$, con $p_\alpha \in \mathbf{H}(M)$.

10. Dimostriamo intanto che, per ogni modulo sopra un anello A, vale il seguente:

Lemma 1: *Se M è un A-modulo per il quale esiste una sequenza esatta del tipo:*

$$a) \qquad 0 \longrightarrow Nc(\varphi) \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} A^q \longrightarrow 0,$$

risulta $\mathbf{H}(M) = \mathbf{H}(Nc(\varphi))$.

Infatti, essendo A^q proiettivo, la sequenza $a)$ è spezzante, ed $M \simeq A^q \oplus Nc(\varphi)$, pertanto, ponendo $Nc(\varphi) = M'$, da

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A^q \oplus M' \longrightarrow 0,$$

si ha:

$$0 \longrightarrow M \bigotimes_A A_p \longrightarrow (A^q \oplus M') \bigotimes_A A_p \longrightarrow 0$$

e quindi:

$$0 \longrightarrow M_p \longrightarrow A_p^q \oplus M_p' \longrightarrow 0,$$

da cui si vede che M_p' è libero se e solo se lo è M_p, donde l'asserto.

Si può allora dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 1). *Per ogni sequenza esatta di A-moduli, del tipo :*

1) $$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

risulta :

2) $$H(M') \cap H(M'') \subseteq H(M).$$

In altri termini: *per gli insiemi algebrici appartenenti agli ideali $H(\ )$, vale la reazione*:

2′) $$V(H(M')) \cup V(H(M'')) \supseteq V(H(M)).$$

Infatti, localizzando negli ideali primi p, dalla 1) si ottengono sequenze asatte (per la piattezza di A_p) del tipo :

$$0 \longrightarrow M_p' \longrightarrow M_p \longrightarrow M_p'' \longrightarrow 0.$$

Siano $\mathbf{H}(M')$, $\mathbf{H}(M)$ ed $\mathbf{H}(M'')$ gli insiemi degli ideali in cui non sono liberi rispettivamente M_p', M_p ed M_p'', allora $H(M') \cap H(M'')$ sarà l'intersezione degli ideali appartenenti all'insieme $\mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'')$, e $H(M)$ l'intersezione degli ideali appartenenti ad $\mathbf{H}(M)$.

Ora se M_p'' è libero, per il lemma 1), si ha che, per l'ideale p, l'appartenenza ad $\mathbf{H}(M')$ ed $\mathbf{H}(M)$ si verifica o no simultaneamente, quindi in tal caso:

$$p \in \mathbf{H}(M) \Longrightarrow p \in \mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'');$$

se invece M_p'' non è libero, $p \in \mathbf{H}(M'')$ e quindi $p \in \mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'')$, anche se $p \notin \mathbf{H}(M)$.

Ne segue perciò l'affermazione 2) voluta.

11. Sia ora A un dominio d'integrità noetheriano, ed I un ideale di A, che possiamo considerare come sottomodulo di A, cioè come un A-modulo di tipo finito.

Consideriamo l'ideale $H(I)$, intersezione di tutti gli ideali primi di A, nei quali I ha localizzazione non libera. Analogamente al n^0 precedente, indicheremo con $\mathbf{H}(I)$ l'insieme di siffatti ideali.

Poichè A è noetheriano, $H(I)$ ammette una rappresentazione normale come intersezione di un numero finito di ideali primari: $H(I) = \cap Q_i$ (nessun Q_i contiene l'intersezione dei rimanenti Q_j (rappresentazione ridotta), ed i divisori primi delle varie componenti primarie Q_i, cioè gli ideali primi associati a $H(I)$, sono tutti distinti).

Osserviamo subito che quì per la definizione di $H(I)$, si ha una rappresentazione normale che dà $H(I)$ come intersezione di ideali primi, tutti appartenenti all'insieme $\mathbf{H}(I)$.

D'altra parte ricordando che per la localizzazione di I in un ideale primo p di A, si ha:

$$I_p = IA_p ,$$

e cioè che I_p può considerarsi l'ideale esteso di I nell'anello locale A_p, risulta come è noto, che se $I \subseteq p$ è $IA_p \subseteq pA_p$ e perciò IA_p non contiene elementi invertibili, dunque $IA_p \neq A_p$, anzi si ha l'equivalenza:

(1.11) $$I \subseteq p \Longleftrightarrow I_p \neq A_p ,$$

poichè se $I \not\subseteq p$, esiste un elemento $f \in I$ che non appartiene a p, e quindi ha immagine invertibile in A_p, per cui $f/f = 1 \in IA_p$ e dunque $IA_p = A_p$.

La (1.11) permette quì di affermare che vale la relazione:

$$I \subseteq H(I).$$

Infatti per ogni ideale $p \in \mathbf{H}(I)$, è certo $I_p \neq A_p$, e quindi risulta $I \subseteq p$.

Ne segue che il chiuso d'un fascio d'ideali $\mathcal{J}$ è contenuto nel chiuso degli zeri dell'ideale $\Gamma(\mathcal{J})$.

12. Si può ora dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 2). *Se $H(I)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi del dominio noetheriano A, nei quali un ideale I di A possiede loca-*

lizzazione non libera, nessun ideale primo p' di A tale che $I_{p'} \simeq A_{p'}$ può contenere $H(I)$.

Si potrà quindi affermare che *vale l'equivalenza*:

$$H(I) \subseteq p \iff I_p \not\simeq A_p . \tag{1.12}$$

Infatti se in p è $I_p \not\simeq A_p$ allora $H(I) \subseteq p$ per la definizione di $H(I)$. Viceversa, sia p' un ideale primo di A che contenga $H(I)$; in tal caso è noto ([8], (2.5)) che p' contiene necessariamente qualche divisore primo minimale p di $H(I)$, il quale, come, osservato in 11), appartiene all'insieme $\mathbf{H}(I)$, cioè si ha $I_p \not\simeq A_p$.

Vogliamo far vedere che deve essere anche $I_{p'} \not\simeq A_{p'}$.

Infatti poichè essendo $p \subseteq p'$, esiste il monomorfismo d'anelli dato dall'inclusione:

$$0 \longrightarrow A_{p'} \longrightarrow A_p ,$$

A_p risulta $A_{p'}$-modulo (oltre che A-modulo), e quindi si ha:

$$A_p \bigotimes_{A_{p'}} I_{p'} \simeq A_p \bigotimes_{A_{p'}} (A_{p'} \bigotimes_{A} I) \simeq (A_p \bigotimes_{A_{p'}} A_{p'}) \bigotimes_{A} I \simeq A_p \bigotimes_{A} I \simeq I_p .$$

Allora se fosse $I_{p'} \simeq A_{p'}$ seguirebbe

$$A_p \bigotimes_{A_{p'}} I_{p'} \simeq A_p \bigotimes_{A_{p'}} A_{p'} ,$$

e quindi risulterebbe anche

$$I_p \simeq A_p ,$$

in contraddizione col fatto che $p \in \mathbf{H}(I)$.

Ciò completa la dimostrazione della proposizione 2), anzi della (1.12).

Ne segue anche che se $p \subseteq p'$ sono ideali di A, ed è:

$$I_{p'} \simeq A_{p'}$$

è anche:

$$I_p \simeq A_p .$$

Infatti $I_{p'} \simeq A_{p'} \Longrightarrow H(I) \not\subseteq p'$, quindi esiste un elemento di $H(I)$ che non sta in p' è quindi neanche in p. Perciò $H(I) \not\subseteq p$ e quindi $I_p \simeq A_p$.

Cioè in particolare: *se un fascio $\mathcal{A}(I)$ d'ideali su di una K-varietà V affine, ha fibra libera in un punto, I_p è libero su A_p in tutti i chiusi propri $V(p)$ irriducibili della varietà passanti per quel punto.*

Dunque il supporto del chiuso di $H(I)$ contiene tutti e soli i punti in cui $\mathcal{A}(I)$ possiede fibra non libera, e quindi coincide col chiuso del fascio $\mathcal{A}(I)$, (n. 7).

13. Premettiamo ora un'osservazione che ci sarà utile in quel che segue.

Sia ancora A un dominio noetheriano. È noto che una potenza di un ideale primo P di A, può non essere un ideale primario, però per un ideale primo P di A, P è l'unico divisore primo minimale di P^r (per ogni numero naturale r).

Ora se P è primo principale in A, cioè se $P = (f)$ con $f \neq 0$ e non invertibile, $P^r = (f^r)$ e P risulta anche divisore primo massimale di P^r (si verifica facilmente che nel nostro caso P contiene tutti i divisori di zero modulo P^r). Ne segue che P^r ha il solo divisore primo P e quindi è primario per P. ([8], Ch. I, n. 7).

Dimostriamo ora che vale il seguente:

Teorema 1) *Per ogni ideale I, d'un dominio d'integrità noetheriano A, l'ideale $H(I)$ non ha divisori primi minimali principali.*

Questo teorema, per quanto è ricordato ai nn. 5) e 7), e tenuto conto del fatto che in un dominio noetheriano ogni ideale primo principale proprio è minimale e quindi di altezza 1, afferma che:

Se V è una varietà affine sul corpo K, ed $\mathcal{J}$ un fascio d'ideali su V, se il chiuso $\chi(\mathcal{J})$ del fascio $\mathcal{J}$ contiene componenti irriducibili di codimensione 1, *queste sono forme intersezione non completa di V con forme di K^n.*

Dimostrazione del teorema 1): Consideriamo per l'ideale $H(I)$ la rappresentazione normale di cui abbiamo detto al n. 11).

Supponiamo che l'ideale $H(I)$ abbia un divisore primo minimale principale (proprio) P, allora P è minimale fra gli ideali primi che contengono $H(I)$ e per la costruzione stessa della rappresentazione normale di $H(I)$, $P \in H(I)$ quindi $I_P \not\sim A_P$.

Consideriamo ora una rappresentazione normale dell'ideale I, come intersezione finita di ideali primari, sia:

1) $$I = \bigcap_i q_i \, .$$

Poichè P contiene I (n. 11), P contiene un divisore primo minimale p_i di I, e sarà anzi $P = p_i$, poichè essendo P principale primo nel dominio noetheriano A, esso è anche minimale in A. Dunque P è divisore primo minimale (ideale primo isolato) di I.

Sia $P = (f)$ con $f \neq 0$ e non invertibile; e nella decomposizione 1) primaria normale di I, sia $q_{i_1} \subset P$ la componente primaria ad esso associata univocamente (in quanto P è divisore primo minimale di I). Vista l'osservazione precedente, sarà $q_{i_1} = (f^\nu)$, per un intero $\nu \neq 0$, e potremo intanto scrivere la decomposizione sopra considerata $I = \bigcap_i q_i$ nel seguente modo:

$$I = q_{i_1} \cap I' \, , \text{dove } I' = \bigcap_{i \neq i_1} q_i \, ,$$

e q_{i_1} non contiene I', trattandosi di decomposizione ridotta.

È subito visto che esistono ideali primi associati a $H(I)$ che contengono P e non contengono I' (per es. P stesso, poichè se un ideale primo contiene I', contiene qualche ideale primo p_j associato ad I', ma P è divisore primo minimale di I, e la 1) è una rappresentazione normale di I).

Ora essendo A noetheriano esisterà in $\mathbf{H}(I)$ un ideale primo p massimale rispetto alle condizioni: $f \equiv 0 \, (p)$ e $I' \not\subseteq p$.

Per un siffatto ideale p sarà intanto $I'_p = A_p$ (n. 11), e di conseguenza

$$I_p = IA_p = (q_{i_1} \cap I') \, A_p = q_{i_1} A_p \, ,$$

poichè

$$q_{i_1} I' \subseteq q_{i_1} \cap I' \subset q_{i_1}$$

e dunque

$$q_{i_1} I' A_p \subseteq (q_{i_1} \cap I') \, A_p \subseteq q_{i_1} A_p$$

dove $I' A_p = I'_p = A_p$.

Ma inoltre è $q_{i_1} A_p \simeq A_p$ nell'isomorfismo $\varphi : f^\nu \longrightarrow 1$.

In conclusione, nelle ipotesi poste, sarebbe $I_p \simeq A_p$ il che è in contraddizione col fatto che $p \in \mathbf{H}(I)$. Se ne deduce che l'ideale $H(I)$ non può avere divisori primi minimali principali.

14. Ricordando ora che ogni fascio algebrico coerente e liscio di rango 1, su una varietà affine è isomorfo ad un fascio $\mathcal{J}$ d'ideali, siamo in grado di dimostrare che:

Un fascio algebrico coerente e liscio $\mathcal{M}$ di rango $r \geq 1$ sopra una varietà V algebrica affine sul corpo K, non può avere nel suo chiuso $\chi(\mathcal{M})$ componenti irriducibili di codimensione 1 le quali non siano intersezione non completa di V con forme dell'ambiente.

Dimostriamo precisamente il seguente:

TEOREMA 2): *Per ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione, sopra un dominio d'integrità noetheriano A, l'ideale $H(M)$ non ha divisori primi minimali principali.*

La dimostrazione può farsi per induzione sul rango r di M, poichè per il teorema 1) l'affermazione è vera se M ha rango 1, giacchè in tal caso esso può sempre pensarsi come un ideale di A.

Se $r > 1$, ammettiamo vero il teorema 2) per i moduli di rango $\leq r-1$, e dimostriamo che di conseguenza esso è vero per $rg(M) = r$.

Sia quindi M di rango r, e consideriamo una iniezione (n^0 6)):

$$0 \to M \xrightarrow{i} A^r;$$

componiamo i con la proiezione canonica r-sima:

$$A^r \xrightarrow{p} A \to 0,$$

cioè restringiamo la p ad $i(M)$; otterremo una sequenza esatta del tipo:

$$0 \to M' \to M \to I \to 0$$

dove ora $rg(M') = r - 1$ e $rg(I) = 1$, per cui: $H(M')$ non ha divisori primi minimali principali per l'ipotesi induttiva e $H(I)$ nemmeno per il teorema 1) del n^0 precedente.

Ma per la proposizione 1) del n^0 10)

$$H(M') \cap H(I) \subseteq H(M)$$

e poichè $H(M')$ e $H(I)$ non hanno divisori primi minimali principali non può averne neanche $H(M)$, come volevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BALDASSARRI, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci,* Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino del 1961.

[2] S. BALDASSARRI GHEZZO, C. MARGAGLIO e T. MILLEVOI, *Considerazioni sulla conferenza tenuta da* M BALDASSARRI *a Torino nel 1961 : « Osservaz. sulla struttura dei fasci lisci »* Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova CEDAM, (1966).

[3] S. BALDASSARRI GHEZZO, C. MARGAGLIO e T. MILLEVOI, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica.* Cremonese Roma, (1967).

[4] N. BOURBAKI, *Algèbre linéaire.* Paris. Hermann, (1962).

[5] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative.* Paris. Hermann, (1961).

[6] H. CARTAN and S. EILENRERG, *Homological algebra.* Princeton Univ. Press, (1956).

[7] P. CARTIER, *Questions de rationalité des diviseurs en géometrie algebrique.* Bull. Soc. Math. France. T. 86, (1958).

[8] M. NAGATA, *Local rings.* Interscience Publishers, (1962).

[9] D. G. NORTHCOTT, *Ideal theory.* Cambridge at the Univ. Press, (1953).

[10] J. P. SERRE, *Faisceaux algebriques coherents.* Annals. of Mathematcs. Vol. 61, No. 2. U.S.A., (1955).

[11] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra.* Springer-Verlag. Berlin, (1955).

[12] O. ZARISKI and P. SAMUEL, *Commutative algebra.* D. van Nostrand Comp. Inc. (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 Marzo 1967.