

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CHIFFI

Teoremi di prolungamento e continuità per correnti

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 376-388

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__376_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

TEOREMI DI PROLUNGAMENTO E CONTINUITÀ PER CORRENTI

ANTONIO CHIFFI *)

Le correnti sono una generalizzazione del concetto di integrale su una varietà regolare orientata; pertanto ha senso chiedersi se talune questioni, nate nell'ambito di questa teoria, siano proponibili per le correnti.

Abbiamo provato allora a studiare le correnti su forme esterne a coefficienti limitati e continui rispetto a gruppi di variabili separatamente, pervenendo così ad un ampliamento e ad un approfondimento di questioni poste nell'ambito della integrazione su varietà ¹⁾. Si noti che in 2.10 e 2.11 viene volutamente adottato per le correnti un linguaggio proprio delle varietà.

DEFINIZIONE 1.1. Siano n e k due interi con $0 < k < n$; sia $A(k, n)$ l'insieme di tutte le funzioni λ crescenti definite sui primi k interi e a valori nei primi n interi:

$$\lambda : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Ad ogni tale λ corrisponde una proiezione ortogonale:

$$p^\lambda : R^n \rightarrow R^k$$

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata Università di Padova.

¹⁾ Cfr. [St], § 1 a pag. 34.

così definita per $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$:

$$p^\lambda(x) = (x_{\lambda(1)}, \dots, x_{\lambda(k)}).$$

DEFINIZIONE 1.2. Sia L_k la misura esterna di Lebesgue in R^k e sia μ_k la misura esterna definita sui sottoinsiemi di R^n associando ad ogni $I \subset R^n$ il numero reale esteso:

$$\mu_k(I) = \sum_{\lambda \in \Lambda(k, n)} L_k(p^\lambda(I)).$$

Diremo che una funzione reale f definita in R^n è μ_k -quasi continua se ad ogni numero reale $\varepsilon > 0$ si può associare un insieme A aperto di misura esterna μ_k minore di ε e tale che la restrizione di f a $R^n - A$ sia continua.

Ricordiamo che ²⁾ condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f definita in R^n sia μ_k -quasi continua è che essa sia continua separatamente rispetto ad ogni gruppo di $(n - k)$ variabili, cioè che per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k -quasi ogni $y \in R^k$ la restrizione della f all'insieme $[p^\lambda]^{-1}(y)$ sia continua.

DEFINIZIONE 1.3. Seguiamo, per le forme differenziali $\varphi \in E^k(R^n)$ di grado k e di classe ∞ su R^n e per le correnti $T \in E_k(R^n)$, le definizioni e il simbolismo di $[F F]$, ad eccezione del simbolo *diesis* (*sharp*) che, per ragioni tipografiche, sarà sostituito da un asterisco *.

Diremo per brevità che una forma differenziale φ di grado k su R^n è una k -forma limitata [di Baire; μ_s -quasi continua; continua] se i coefficienti di φ sono funzioni limitate [di Baire; μ_s -quasi continue; continue]. Se la k -forma φ è limitata, la sua massa $M(\varphi)$ è finita.

Si può prolungare la definizione di una corrente T , di massa $M(T)$ finita, alla classe delle k -forme φ di Baire localmente limitate e si ha: $|T(\varphi)| \leq M(T) \cdot M(\varphi)$.

DEFINIZIONE 1.4. Diremo che una corrente $T \in E_k(R^n)$ è *quasi normale* ³⁾ se ad ogni numero positivo $\varepsilon > 0$ si può associare una corrente normale $Q \in E_k(R^n)$ tale che $M(T - Q) < \varepsilon$.

²⁾ Cfr. [St], 1.III a pag. 32.

³⁾ Cfr. [C], def. 1.2 a pag. 189.

LEMMA 1.5. *Sia $T \in E_n(R^n)$ una corrente quasi normale n dimensionale; esiste una funzione reale ψ , definita in R^n e ivi sommabile e a supporto compatto, tale che $T = \mathbf{C} \psi$. Viceversa, se ψ è una funzione sommabile e a supporto compatto, la corrente $T = \mathbf{C} \psi$ è quasi normale.*

Esiste, per definizione di corrente quasi normale, una successione (T_h) di correnti normali $T_h \in E_n(R^n)$ tali che

$$(1.1) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} M(T_h - T) = 0.$$

e ad ogni corrente T_h si può associare ⁴⁾ una funzione sommabile e a supporto compatto ψ_h tale che $T_h = \mathbf{C} \psi_h$ e si ha, per la (1.1):

$$(1.2) \quad \lim_{h, m \rightarrow \infty} \int_{R^n} |\psi_h - \psi_m| dx = 0$$

e si può supporre ⁵⁾ che i supporti delle funzioni ψ_h siano contenuti in uno stesso insieme compatto. Dalle (1.1) e (1.2) segue allora che esiste una funzione ψ , sommabile e a supporto compatto, tale che $T = \mathbf{C} \psi$.

Viceversa, se ψ è una funzione sommabile e a supporto compatto, esiste una successione di funzioni $(\psi_h)_{h \in N}$ continue con le loro derivate prime in R^n e a supporto compatto, tali che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{R^n} |\psi_h - \psi| dx = 0.$$

Posto $T = \mathbf{C} \psi$ e $T_h = \mathbf{C} \psi_h$, risulta verificata la (1.1) e le funzioni T_h risultano normali perchè è:

$$M(\partial T_h) = \int_{R^n} |\text{grad } \psi_h| dx < \infty.$$

⁴⁾ Cfr. [FF], 6.4 a pag. 485.

⁵⁾ Cfr. [C], 1.7 a pag. 190.

LEMMA 1.6. *Se $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ è quasi normale, per ogni insieme di Borel B di misura esterna μ_k nulla, la misura $\|T\|$, variazione totale di T , è nulla.*

Sia B un insieme di Borel con $\mu_k(B) = 0$. Detta $\omega_k \in E^k(\mathbb{R}^k)$ la forma differenziale $\omega_k = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_k$, per ogni $\varphi \in E^k(\mathbb{R}^n)$ si può scrivere:

$$\varphi = \sum_{\lambda \in A(k, n)} \varphi_\lambda \wedge p^{\lambda*}(\omega_k)$$

con $\varphi_\lambda \in E^0(\mathbb{R}^n)$; ed anche

$$\begin{aligned} (1.3) \quad (T \cap B)(\varphi) &= \sum_{\lambda} (T \cap B)(\varphi_\lambda \wedge p^{\lambda*}(\omega_k)) = \\ &= \sum_{\lambda} (T \wedge p^{\lambda*}(\omega_k) \cap B)(\varphi_\lambda). \end{aligned}$$

Detta A_λ l'immagine inversa dell'insieme $p^\lambda(B)$ secondo l'applicazione p^λ , si ha subito ⁶⁾

$$(1.4) \quad (T \wedge p^{\lambda*}(\omega_k) \cap A_\lambda)(\varphi_\lambda) = \{[p_*^\lambda(T \wedge \varphi_\lambda)] \cap p^\lambda(B)\}(\omega_k)$$

La corrente $p_*^\lambda(T \wedge \varphi_\lambda) \in E_k(\mathbb{R}^k)$ è quasi normale ⁷⁾ e, per il lemma 1.5, esiste la funzione sommabile ψ_λ tale che $p_*^\lambda(T \wedge \varphi_\lambda) = \mathbb{C} \psi_\lambda$. Dalla (1.4) segue allora:

$$(T \wedge p^{\lambda*}(\omega_k) \cap A_\lambda)(\varphi_\lambda) = \int_{p^\lambda(B)} \psi_\lambda \wedge \omega_k = 0$$

da cui:

$$T \wedge p^{\lambda*}(\omega_k) \cap A_\lambda = 0$$

ed anche, essendo $B \subset A_\lambda$:

$$(1.5) \quad T \wedge p^{\lambda*}(\omega_k) \cap B = 0.$$

Dalle (1.3) e (1.5) segue: $\|T\|(B) = 0$.

⁶⁾ Cfr. [FF], 2.5 a pag. 465.

⁷⁾ Cfr. [C], 2.8 a pag. 198.

LEMMA 1.7. Se $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ è quasi normale, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che per ogni insieme di Borel B con $\mu_k(B) < \delta$ si ha $\|T\|(B) < \varepsilon$.

Il lemma 1.7 segue subito dal lemma 1.6, ragionando per assurdo.

LEMMA 1.8. Se $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ è quasi normale, la misura $\|T\|$ è assolutamente continua rispetto alla misura di Hausdorff H^k .

Infatti se B è un insieme di Borel con $H^k(B) = 0$, si ha pure: $\mu_k(B) = 0$ e, per il lemma 1.6, $\|T\|(B) = 0$.

TEOREMA 1.9. Sia $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ quasi normale; è possibile prolungare in modo unico la definizione della corrente T alle forme μ_k -quasi continue e limitate.

Se φ è una k -forma μ_k -quasi continua e limitata su \mathbb{R}^n , esiste un numero $L > 0$ tale che: $M(\varphi) \leq L$; fissato un intero i , si può determinare un insieme aperto A_i , con $\mu_k(A_i) < 1/i$, tale che la forma φ sia continua in $\mathbb{R}^n - A_i$. Sia φ_i una k forma continua su \mathbb{R}^n , uguale a φ nell'insieme chiuso $\mathbb{R}^n - A_i$, con $M(\varphi_i) \leq L$ ⁸⁾. La corrente quasi normale $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ è definita sulla k -forma continua φ_i e si ha, per ogni coppia di indici i e j :

$$|T(\varphi_i) - T(\varphi_j)| = |[T \cap (A_i \cup A_j)](\varphi_i - \varphi_j)| \leq 2L \|T\|(A_i \cup A_j).$$

Dal lemma 1.7 segue poi che, fissato $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, esiste un intero $m > 0$, tale che per ogni coppia di indici i e j entrambi maggiori di m , si ha:

$$(1.6) \quad |T(\varphi_i) - T(\varphi_j)| \leq 2L \varepsilon.$$

La (1.6) assicura l'esistenza del limite della successione $(T(\varphi_i))_{i \in \mathbb{N}}$ e si può porre:

$$(1.7) \quad T(\varphi) = \lim_{i \rightarrow \infty} T(\varphi_i).$$

Il limite indicato in (1.7) è poi indipendente dalla particolare successione (φ_i) scelta (e quindi anche dalla particolare successione

⁸⁾ Cfr. [MS], a pag. 842.

(A_i) scelta) perchè, se $(\varphi_{1,i})$ e $(\varphi_{2,i})$ sono due tali successioni, la successione :

$$\{T(\varphi_{1,1}), T(\varphi_{2,1}), T(\varphi_{1,2}), T(\varphi_{2,2}), \dots\}$$

risulta pure convergente.

OSSERVAZIONE 1.10. Nelle ipotesi del teorema 1.9, per ogni k -forma φ μ_k -quasi continua e limitata, si ha : $|T(\varphi)| \leq M(T)M(\varphi)$.

OSSERVAZIONE 1.11. Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti $T_h \in E_k(\mathbb{R}^n)$ di massa finita converge debolmente verso la corrente $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ e se è : $\sup\{M(T_h) : h = 1, 2, \dots\} < \infty$, allora è noto che T è di massa finita e che per ogni k -forma continua φ si ha :

$$(1.8) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Se invece φ è una k -forma μ_k -quasi continua e limitata, e le correnti T_h e T sono quasi normali, la (1.8) può non valere, come si può vedere con facili esempi. Nel teorema seguente vengono stabilite condizioni sufficienti per la validità della (1.8).

TEOREMA 1.12. *Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti quasi normali $T_h \in E_k(\mathbb{R}^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(\mathbb{R}^n)$ e se le misure $\|T_h\|$ ($h = 1, 2, \dots$), sono equiassolutamente continue rispetto alla misura k -dimensionale di Hausdorff H^k , allora, per ogni k -forma φ μ_k -quasi continua e limitata, si ha :*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Fissato il numero $\varepsilon > 0$, determiniamo $\sigma > 0$ tale che per ogni insieme di Borel B , con $\mu_k(B) < \sigma$, si abbia (cfr. lemma 1.8) : $\|T\|(B) < \varepsilon$ e $\|T_h\|(B) < \varepsilon$ per ogni h .

Sia A_σ un insieme aperto, con $\mu_k(A_\sigma) < \sigma$ e tale che in $\mathbb{R}^n - A_\sigma$ la k -forma φ risulti continua ⁹⁾. Sia φ_σ una k -forma continua su \mathbb{R}^n , uguale a φ in $\mathbb{R}^n - A_\sigma$ e tale che, se è : $M(\varphi) \leq L$, risulti

⁹⁾ Loc. cit. ⁸⁾.

pure $M(\varphi_\sigma) \leq L$. Per l'osservazione 1.11 si potrà determinare un indice h' tale che per $h > h'$ si abbia :

$$|T_h(\varphi_\sigma) - T(\varphi_\sigma)| < \varepsilon.$$

Con facili calcoli si ottiene allora, per $h > h'$:

$$\begin{aligned} |T_h(\varphi) - T(\varphi)| &\leq |[T_h \cap A_\sigma](\varphi - \varphi_\sigma)| + |T_h(\varphi_\sigma) - T(\varphi_\sigma)| + \\ &+ |[T \cap A_\sigma](\varphi_\sigma - \varphi)| \leq 2L \|T_h\| (A_\sigma) + \varepsilon + \\ &+ 2L \|T\| (A_\sigma) < (4L + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare.

§ 2. — In questo paragrafo stabiliremo alcuni risultati sulle sezioni delle correnti quasi normali, i quali ci permetteranno di rendere più espressive le ipotesi contenute nel teorema 1.12.

E' nota ¹⁰⁾ la definizione di *sezione* di una corrente normale ; tale definizione si può estendere facilmente alle correnti quasi normali nel modo seguente :

DEFINIZIONE 2.1. Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale ; s un intero $\leq k$; sia $f: R^n \rightarrow R^s$ una funzione localmente lipschitziana ; sia $\theta: R^s \rightarrow R^1$ una funzione non negativa, nulla al di fuori della sfera $\{z: z \in R^s, |z| \leq 1\}$, con $\theta(z) = \theta(-z)$ e $\int_{R^k} \theta(z) dz = 1$;

sia $(\theta_h)_{h \in N}$ una successione di funzioni così definite : $\theta_h(z) = h^s \theta(hz)$; sia $\tau_y: R^s \rightarrow R^s$, con $y \in R^s$, la traslazione così definita : $\tau_y(z) = \tau(y - z)$; sia, al solito, ω_s la s -forma : $dy_1 \wedge \dots \wedge dy_s$.

Per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$ risulta definita ¹¹⁾ la corrente quasi normale $f_*(T \wedge \psi) \in E_s(R^s)$; sia $y \in R^s$; se esiste il limite :

$$(2.1) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} (-1)^{s(k-s)} [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y)$$

¹⁰⁾ Cfr. [F], 3.5 a pag. 49.

¹¹⁾ Cfr. [C], 2.8 a pag. 198

qualunque sia $\psi \in E^{k-s}(R^n)$, se tale limite è indipendente dalla particolare funzione θ , esso si dirà sezione della corrente T con la varietà $f = y$ e si indicherà col simbolo $\langle T, f, y \rangle$.

TEOREMA 2.2. *Sia $T \in E_k(R^n)$ quasi normale, $s \leq k$, e $f: R^n \rightarrow R^s$ localmente lipschitziana; in tali ipotesi per L_s -quasi ogni $y \in R^s$ esiste la corrente $\langle T, f, y \rangle$ ed essa risulta di massa finita.*

Anche in questo caso basta constatare che può essere estesa la dimostrazione dell'esistenza delle sezioni delle correnti normali.

Poniamo, per $g: R^s \rightarrow R^1$ continua e non negativa:

$$\nu_f(g) = \sup \{ [f_* (T \wedge \psi) \wedge \omega_s](g) : \psi \in E^{k-s}(R^n), M(\psi) \leq 1 \}.$$

Sia D un insieme numerabile di $E^{k-s}(R^n)$, denso rispetto alla massa M ; esiste un insieme $N \subset R^s$, di misura L_s nulla, tale che per $y \in R^s - N$ e per ogni $\psi \in D$ esistono ¹²⁾ finite le derivate generali delle misure $f_* (T \wedge \psi) \wedge \omega_s$, nonchè la derivata generale della misura ν_f ; tali derivate si possono definire nel modo seguente:

$$(2.2) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} [f_* (T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y) = \bar{d}_\psi(y)$$

$$(2.3) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \nu_f(\theta_h \circ \tau_y) = \bar{d}(y)$$

e sono indipendenti dalla particolare funzione θ . Dalla (2.2) e (2.3) segue, con un facile calcolo, che il limite (2.1) esiste per $y \in R^s - N$ e per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$ e si ha:

$$(2.4) \quad \langle T, f, y \rangle(\psi) = (-1)^{s(k-s)} \bar{d}_\psi(y)$$

$$(2.5) \quad M(\langle T, f, y \rangle) \leq \bar{d}(y).$$

COROLLARIO 2.3. *Nelle ipotesi del teorema 2.2 si ha per L_s -quasi ogni $y \in R^s$:*

$$(2.6) \quad \text{supporto } \langle T, f, y \rangle \subset [\text{supporto } T] \cap f^{-1}(y).$$

La (2.6) si ottiene considerando il supporto della corrente $S_h(\psi) = [f_* (T \wedge \psi) \wedge \omega_s](\theta_h \circ \tau_y)$ e passando poi al limite per $h \rightarrow \infty$.

¹²⁾ Cfr. [S], cap. IV

COROLLARIO 2.4. *Nelle ipotesi del teorema 2.1 si ha :*

$$(2.7) \quad \nu_f(R^s) = \int_{R^s} M(\langle T, f, y \rangle) dy.$$

Per il lemma 1.5 la misura $f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s$ è assolutamente continua rispetto a L_s ; da (2.2) e (2.4) segue, indicando con lo stesso simbolo R^s e la sua funzione caratteristica, per ogni $\psi \in E^{k-s}(R^n)$:

$$(2.8) \quad [f_*(T \wedge \psi) \wedge \omega_s](R^s) = \int_{R^s} \langle T, f, y \rangle (\psi) dy.$$

Dalla (2.8) segue subito :

$$(2.9) \quad \nu_f(R^s) \leq \int_{R^s} M(\langle T, f, y \rangle) dy$$

mentre dalle (2.3) e (2.5) segue la disuguaglianza opposta alla (2.9).

COROLLARIO 2.5. *Nelle ipotesi del teorema 2.2, per L_s -quasi ogni $y \in R^s$ la corrente $\langle T, f, y \rangle$ è quasi normale.*

Se (T_h) è una successione di correnti normali k dimensionali di R^n tali che :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} M(T_h - T) = 0$$

dal corollario 2.4 segue che :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{R^s} M(\langle T - T_h, f, y \rangle) dy = 0$$

ed anche, per L_s -quasi ogni $y \in R^s$ e per una sottosuccessione $(T_{h'})$:

$$(2.10) \quad \lim_{h' \rightarrow \infty} M(\langle T - T_{h'}, f, y \rangle) = 0.$$

Dalla (2.10), tenuto conto che le sezioni delle correnti normali sono, per L_s -quasi ogni y , normali⁴³), segue quanto asserito.

⁴³) Cfr. [F], 3.5 a pag. 49.

DEFINIZIONE 2.6. Diremo che la corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ è una *corrente a sezione δ* se per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k -quasi ogni $y \in R^k$ esistono un numero finito di punti $x_1, x_2, \dots, x_{m(\lambda, y)}$ di R^n e gli interi $a_1, \dots, a_{m(\lambda, y)}$ tali che si abbia:

$$(2.11) \quad \langle T, p^\lambda, y \rangle = \sum_i a_i \delta_{x_i}$$

dove δ_x è la corrente di $E_0(R^n)$ così definita per ogni $\varphi \in E^0(R^n)$:

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x).$$

DEFINIZIONE 2.7. Se $T \in E_k(R^n)$ e $x \in R^n$, ricordiamo che con $\theta^k(\|T\|, x)$ si indica la $\|T\|$ -densità k -dimensionale di R^n nel punto x , vale a dire il limite, se esiste:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\|T\|(\{z : |z - x| < r\})}{\alpha(k) r^k}$$

dove $\alpha(k) = L_k(\{u : u \in R^k, |u| < 1\})$.

LEMMA 2.8. Una corrente $T \in E_k(R^n)$ rettificabile è una corrente a sezione δ .

Una corrente rettificabile $T \in E_k(R^n)$ è evidentemente quasi normale, per cui per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per L_k -quasi ogni $y \in R^k$ esiste la sezione $\langle T, p^\lambda, y \rangle$ e si ha, per [F] 3.13:

$$(2.12) \quad M(\langle T, p^\lambda, y \rangle) = \sum_x \theta^k(\|T\|, x)$$

dove la somma è fatta rispetto agli x dell'insieme $(p^\lambda)^{-1}(y)$, che risulta certamente finito, perchè la somma indicata è, per tali y , finita. In realtà la (2.12) è stata provata nella ipotesi che T sia rettificabile e normale, cioè intera (cfr. [F F], 8.14); ma una volta che sia stata estesa la definizione di sezione di corrente alle correnti quasi normali, la stessa dimostrazione vale per le correnti soltanto rettificabili.

Per [F] 3.13 si ha pure, sempre per L_k -quasi ogni $y \in R^k$ e per H^0 quasi ogni (cioè per ogni) $x \in (p^\lambda)^{-1}(y)$:

$$(2.13) \quad \theta^0(\|\langle T, p^\lambda, y \rangle\|, x) = \theta^k(\|T\|, x).$$

Da (2.12) e (2.13) segue che per L_k -quasi ogni $y \in R^k$ vale la (2.11), dove gli a_i sono numeri interi per l'uguaglianza:

$$a_i = \theta^0(\|\langle T, p^\lambda, y \rangle\|, x_i)$$

per la (2.13) e per [F F] 8.16 (1).

TEOREMA 2.9. *Se la successione $(T_h)_{h \in \mathbb{N}}$ di correnti quasi normali $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ e se per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ gli integrali indefiniti delle funzioni di $y \in R^k$: $M(\langle T, p^\lambda, y \rangle)$ sono equiassolutamente continui rispetto a L_k , allora, per ogni k -forma φ , μ_k -quasi continua e limitata, si ha:*

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

Nelle ipotesi poste la (2.7) del corollario 2.4 si può così scrivere per ogni $\lambda \in \Lambda(k, n)$ e per ogni h :

$$M(T_h \wedge p^{\lambda*}(\omega_k)) = \int_{R^k} M(\langle T_h, p^\lambda, y \rangle) dy.$$

Per ogni insieme di Borel $B \subset R^n$ si ha poi, tenendo presente il corollario 2.3 e ricordando che la corrente $T \cap B$ è quasi normale:

$$M(T_h \cap B \wedge p^{\lambda*}(\omega_k)) = \int_{p^\lambda(B)} M(\langle T_h \cap B, p^\lambda, y \rangle) dy.$$

Segue :

$$\begin{aligned} \|T_h\|(B) &= M(T_h \cap B) \leq \sum_{\lambda \in A(k, n)} M(T_h \cap B \wedge p^{\lambda*}(\omega_k)) = \\ &= \sum_{\lambda} \int_{p^{\lambda}(B)} M(\langle T_h \cap B, p^{\lambda}, y \rangle) dy \leq \sum_{\lambda} \int_{p^{\lambda}(B)} M(\langle T_h, p^{\lambda}, y \rangle) dy \end{aligned}$$

e le misure $\|T_h\|$ risultano così equiassolutamente continue rispetto a H^k .

DEFINIZIONE 2.10. Se $T \in E_k(R^n)$ è una corrente rettificabile, chiameremo il numero $\theta^k(\|T\|, x)$ (che, come si è detto, è intero per H^k -quasi ogni $x \in R^n$) molteplicità del punto $x \in R^n$ relativamente alla corrente rettificabile T . Poniamo per $\lambda \in A(k, n)$ e per $y \in R^k$ tale che esista la corrente $\langle T, p^{\lambda}, y \rangle$:

$$(2.14) \quad N(T, p^{\lambda}, y) = M(\langle T, p^{\lambda}, y \rangle)$$

Per il lemma 2.8 e, in particolare, per la (2.12) si può affermare che la funzione di y : $N(T, p^{\lambda}, y)$ esprime il numero dei punti, ciascuno contatto con la dovuta molteplicità, dell'insieme intersezione tra la varietà lineare $(n - k)$ -dimensionale $(p^{\lambda})^{-1}(y)$ e la corrente rettificabile T .

COROLLARIO 2.11. Se la successione $(T_h)_{h \in N}$ di correnti rettificabili $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ e se per ogni $\lambda \in A(k, n)$ gli integrali indefiniti delle funzioni di $y \in R^k$: $N(T_h, p^{\lambda}, y)$ sono equiassolutamente continui rispetto a L_k , allora, per ogni k -forma φ , μ_k -quasi continua e limitata, si ha:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi).$$

L'ipotesi posta è in particolare verificata se le funzioni $N(T_h, p^{\lambda}, y)$ sono equilimitate rispetto ad h .

Segue subito dal teorema 2.9 e dalla (2.14).

BIBLIOGRAFIA

- [C] A. CHIFFI: *Correnti quasi normali*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (3) 19 (1965), pp. 185-205.
- [F] H. FEDERER: *Some theorems on integral currents*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 117 (1965), pp. 43-67.
- [F F] H. FEDERER and W. FLEMING: *Normal and integral currents*, Ann. of Math. (2) 72 (1960), pp. 458-520.
- [M S] E. J. MAC SHANE: *Extension of range of functions*, Bull. Amer. Math Soc. 40 (1934), pp. 837-842.
- [S] S. SAKS: *Theory of the integral*, Warsaw, 1937.
- [St] G. STAMPACCHIA: *Sopra una classe di funzioni in n variabili*, Ricerche Mat. 1 (1952), pp. 27-54.

Manoscritto pervenuto in redazione il 30-11-67.