RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIA GRAZIA MAIA

Un'osservazione sulle contrazioni metriche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 139-143

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__139_0>

UN'OSSERVAZIONE SULLE CONTRAZIONI METRICHE

di MARIA GRAZIA MAIA *)

Si dà una generalizzazione del teorema sui punti fissi di una contrazione, nel caso di uno spazio completo rispetto a una metrica e di una contrazione rispetto a una metrica maggiorante. Si dà successivamente un metodo per costruire una tale metrica maggiorante ed alcuni criteri per la sua esistenza.

TEOREMA 1. *Sia X uno spazio con due metriche d e δ, tali che: $d(x, y) \leq \delta(x, y)$ per tutti i punti x, y di X. Sia inoltre X completo rispetto a d; sia $T: X \rightarrow X$ un'applicazione continua rispetto a d e una contrazione rispetto a δ; allora esiste uno e un solo punto fisso per T in X.*

DIM. Sia X_0 un punto di X, consideriamo la successione $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbf{N}}$. Tale successione è di Cauchy rispetto a δ, infatti: poichè T è una contrazione rispetto a δ, esiste $k < 1$ tale che:

$$\delta(T(x), T(y)) \leq k\, \delta(x, y) \quad \text{per tutti i punti } x, y \text{ di } X.$$

Siano n, m numeri interi, $m < n$:

$$\delta(T^n(x), T^m(y)) \leq k^m\, \delta(T^{n-m}(x_0), x_0)$$

ma k è minore di 1, quindi per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematica n[0] 20 del C N.R.

Indirizzo dell'A: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

che, se $m > \nu$, si ha: $k^m < \varepsilon$. Allora:

$$\delta\,(T^n\,(x_0),\,T^m(x_0)) \leq \varepsilon\delta\,(T^{n-m}\,(x_0),\,x_0) \quad \text{se } n > m > \nu.$$

Dunque $\{T^n\,(x_0)\}_{n\in\mathbf{N}}$ è di Cauchy rispetto a δ e quindi anche rispetto a d, in quanto d è maggiorata da δ. Ma X è completo rispetto a d, per cui $\{T^n\,(x_0)\}_{n\in\mathbf{N}}$ è convergente in d. Sia x il punto di convergenza:

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n\,(x_0) = T\,(\lim_{n\to\infty} T^n\,(x_0)) = T\,(x)$$

x risulta così punto fisso per T in X.

Tale punto fisso è anche unico, infatti: siano x e y punti fissi per T:

$$\delta\,(T\,(x),\,T\,(y)) \leq k\,\delta\,(x,\,y)$$

da cui: $\delta\,(x,\,y) = 0$ e quindi $x = y$.

Osservazione. L'ipotesi di continuità di T rispetto a d nel teorema 1 non è superflua, infatti se X è l'insieme dei numeri naturali (zero incluso), consideriamo le seguenti metriche su X:

$$\delta(p,\,q) = \left|\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^q}\right|; \quad d\,(p,\,q) = \begin{cases} \left|\dfrac{1}{2^{p+1}} - \dfrac{1}{2^{q+1}}\right| & \text{se } p > 0 \text{ e } q > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2^{p+1}} & \text{se } p > 0 \text{ e } q = 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2^{q+1}} & \text{se } p = 0 \text{ e } q > 0 \\[2ex] 0 & \text{se } p = 0 \text{ e } q = 0. \end{cases}$$

Risulta: $d\,(p,\,q) \leq \delta\,(p,\,q)$ per tutti i punti p, q di X; inoltre X è completo rispetto a δ e non rispetto a d. Sia $T\colon X \to X$ tale che: $T\,(p) = p + 1$; T è una contrazione rispetto a δ, ma non ha punti fissi in X.

TEOREMA 2. *Sia X uno spazio metrico, d la metrica su X, $T: X \longrightarrow X$ un'applicazione; consideriamo la serie di potenze:*

$$(*) \qquad \sum_{0}^{\infty} \lambda^n d(T^n(x), T^n(y)).$$

Supponiamo che, per un certo $\lambda > 1$, la serie $(*)$ converga qualunque siano i punti x, y in X. Allora, posto per un tale λ:

$$\delta(x, y) = \sum_{0}^{\infty} \lambda^n d(T^n(x), T^n(y))$$

si ha:

(i) *δ è una metrica su X, maggiorante la metrica d*
(ii) *T risulta una contrazione rispetto a δ.*

DIM. δ è una metrica su X:
se $x = y$, $\delta(x, y) = 0$; viceversa sia $\delta(x, y) = 0$, cioè:

$$\sum_{0}^{\infty} \lambda^n d(T^n(x), T^n(y)) = 0$$

poichè la serie è a termini positivi, si ha: $d(T^n(x), T^n(y)) = 0$ per ogni n, da cui: $T^0(x) = T^0(y)$, cioè $x = y$.

Tralasciamo la ovvia dimostrazione della simmetria e della disuguaglianza triangolare e proviamo che T è una contrazione rispetto a δ:

$$\delta(x, y) = d(x, y) + \lambda \sum_{0}^{\infty} \lambda^n d(T^{n+1}(x), T^{n+1}(y)) =$$
$$= d(x, y) + \lambda\, d(T(x), T y))$$

da cui:

$$\delta(T(x), T(y)) = \frac{1}{\lambda}(\delta(x, y) - d(x, y)) \leq \frac{1}{\lambda}\delta(x, y).$$

TEOREMA 3. *Sia $T: X \longrightarrow X$ un'applicazione dello spazio metrico X in sè. Se una certa iterata di T è una contrazione, la serie $(*)$ del teorema 2 converge per un $\lambda > 1$, qualunque siano i punti x, y in X.*

Dim. Per ipotesi si ha che esistono $k < 1$ e un intero ν tali che:

$$d\,(T^\nu(x),\, T^\nu(y)) \leq k\, d\,(x, y)$$

da cui, per ogni n intero:

$$d\,(T^{\nu n}(x),\, T^{\nu n}(y)) \leq k^n\, d\,(x, y).$$

Allora:

$$\sum_0^\infty \lambda^n\, d\,(T^n(x),\, T^n(y)) = \sum_0^\infty \lambda^{\nu n}\, d\,(T^n(x),\, T^n(y)) +$$

$$\sum_0^\infty \lambda^{\nu n+1}\, d\,(T^{\nu n+1}(x),\, T^{\nu n+1}(y)) + \dots +$$

$$\sum_0^\infty \lambda^{\nu n+n-1}\, d\,(T^{\nu n+n-1}(x),\, T^{\nu n+n-1}(y)) \leq \sum_0^\infty \lambda^{\nu n}\, k^n\, d\,(x, y) +$$

$$\lambda \sum_0^\infty \lambda^{\nu n}\, k^n\, d\,(T(x),\, T(y)) + \dots +$$

$$\lambda^{n-1} \sum_0^\infty \lambda^{\nu n}\, k^n\, d\,(T^{n-1}(x),\, T^{n-1}(y)).$$

Basta allora prendere λ tale che: $1 < \lambda^n < \frac{1}{k}$, perchè la serie converga qualunque siano i punti x, y in X.

Esempio di applicazione al problema di Cauchy

Da quanto visto si può dedurre l'esistenza e unicità della soluzione del problema di Cauchy in grande per equazioni differenziali del primo ordine, in forma normale, su un intervallo limitato e chiuso.

Sia X lo spazio delle funzioni continue su un intervallo limitato e chiuso $[a, b]$ di $\mathbf{R}$, a valori reali; X, con la metrica lagrangiana:

$$d\,(f, g) = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

è uno spazio completo.

Sia $T : X \to X$ tale che, per ogni y in X, $T(y) = w$, dove:

$$w(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

essendo f continua nella striscia: $a \leq t \leq b, y \in \mathbf{R}$ e lipschitziana rispetto a y (con costante L).

Dimostriamo che T soddisfa le ipotesi del teorema 3.

Sia τ in $[a, b]$, poniamo:

$$d_\tau(y, z) = \sup_{a \leq x \leq \tau} | y(x) - z(x) |$$

e proviamo la seguente disuguaglianza:

$$d_\tau(T^n(y), T^n(z)) \leq L^n d_\tau(y, z) \frac{(b-a)^n}{n!}. \tag{1}$$

Per $n = 0$ è ovvia; supponiamola dunque vera per un intero $n \geq 0$:

$$d_\tau(T^{n+1}(y), T^{n+1}(z)) = \sup_{a \leq x \leq \tau} \left| \int_{x_0}^{x} f(t, (T^n(y))(t)\, dt + \right.$$

$$\left. - \int_{x_0}^{x} f(t, (T^n(z))(t)\, dt \right| \leq \int_{a}^{\tau} L\, d_\tau(T^n(y), T^n(z))\, dt \leq$$

$$\leq \frac{L^{n+1}}{n!} d_\tau(y, z) \int_{a}^{\tau} (t-a)^n\, dt = L^{n+1} d_\tau(y, z) \frac{(\tau - a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

E quindi induttivamente vale la (1) per ogni n.

Ponendo $\tau = b$ in (1), si ha:

$$d(T^n(y), T^n(z)) \leq L^n d(y, z) \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Da quest'ultima relazione segue che una certa iterata di T è una contrazione; inoltre T è ovviamente continua rispetto a d. Applicando allora i teoremi 2 e 1 si ha che T ha uno e un solo punto fisso.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6-11-1967