CLAUDIO MARGAGLIO

Sulla torsione in un prodotto tensoriale di moduli senza torsione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 325-346

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__325_0>

SULLA TORSIONE IN UN PRODOTTO TENSORIALE DI MODULI SENZA TORSIONE

di CLAUDIO MARGAGLIO *)

INDICE

i. Introduzione.

Nel presente lavoro espongo alcuni risultati ottenuti in funzione dei seguenti obiettivi:

a) rappresentare convenientemente il sottomodulo di torsione $t(M \otimes N)$ di un prodotto tensoriale (su un dominio d'integrità R) $M \otimes N$ di due R-moduli di tipo finito e senza torsione;

b) verificare quando tale sottomodulo sia o non sia nullo;

c) verificare quando tale sottomodulo sia o non sia sommando diretto di $M \otimes N$.

---

*) Indirizzo dell'A: Departamento de Matemàticas. Esc. de Cienciàs. Universidad de Oriente. Cumaná. Venezuela.

Mi si sono presentate alcune situazioni non eccessivamente particolari nelle quali è possibile rispondere in modo soddisfacente alle domande poste.

Per esempio, se I è un ideale proprio di R, generato da una R-successione, allora risulta che $I \otimes I$ è isomorfo con la somma diretta $t(I \otimes I) \oplus I_2$, ove $t(I \otimes I)$ è a sua volta isomorfo con una somma diretta di moduli isomorfi con R/I.

ii. Simboli e definizioni.

1.	R	dominio d'integrità, cioè anello commutativo con unità senza divisori propri dello zero.
2.	R/R	corpo dei quozienti di R.
3.	$\approx$, $<\!\!-\!\!-\!\!>$	isomorfismo (R-lineare).
4.	$\longrightarrow$	omomorfismo (R-lineare).
5.	R^p	R-modulo libero ottenuto per somma diretta di p « copie » di R.
6.	u_i	i-esimo elemento della base canonica di R^p : $u_1 = (1, 0, \ldots$ $\ldots, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_p = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.
7.	M^p	modulo ottenuto per somma diretta di p « copie » di M.
8.	$t(M)$	sottomodulo di torsione di M.
9.	$rg(M)$	rango di M (= massimo numero di elementi linearmente indipendenti su R).
10.	M^*	duale di M, ossia $Hom_R(M, R)$.
11.	$M \otimes N$	prodotto tensoriale su R (degli R-moduli M, N).
12.	MN	immagine di $M \otimes N$ in R^{pq}, essendo $p = rg(M)$, $q = rg(N)$, ottenuta con il prodotto tensoriale di due iniezioni di M, N in R^p, R^q.
13.	M_2	MN nel caso che $M = N$.
14.	$T.F.$	« di tipo finito » ossia finitamente generato (secondo il tipo di struttura).
15.	$n(M)$	numero minimo di generatori per M.
16.	$S^{-1}(M)$	modulo di frazioni di M con denominatori nella parte moltiplicativa S.
17.	M_x	localizzazione $S^{-1}(M)$ di M rispetto all'ideale primo x di R, ($S =$ complemento di x in R).

18. $h(I)$ altezza dell'ideale I.
19. $dh(M)$ dimensione omologica di M (cfr. [18] pag. 134).
20. *Ann.* (M) annullatore di M.
21. *anello normale*: anello integralmente chiuso nel suo corpo dei quozienti.
22. *R-successione*: si dice che s elementi $r_1, r_2, \dots, r_s$ di R formano (nell'ordine scritto) una R-successione, se r_1 non è divisore dello zero e se per ogni $i = 2, \dots, s$ si ha $(r_1, \dots, r_{i-1}) : r_i = (r_1, \dots, r_{i-1})$.
23. *R-successione incondizionata*: rimane R-successione anche permutando i suoi elementi.
24. *elemento ammissibile su R* o semplicemente *elemento R-ammissibile*: è un elemento ω di $\bar{R}/R$ tale che l'ideale $I_\omega = R : \omega$ abbia altezza maggiore di uno (con la convenzione che R stesso abbia altezza maggiore di qualunque fissato numero naturale).
25. $R \in P.E.$ « R soddisfa alla proprietà di estensione » se ogni elemento R-ammissibile appartiene ad R. In [11] si dimostrò che particolari anelli che soddisfano alla proprietà di estensione sono i domini d'integrità:
    a) di Macaulay;
    b) noetheriani e normali;
    c) localmente $U.F.D.$ ovvero localmente a unica fattorizzione).
26. *elemento ammissibile sopra un R-modulo M* (senza torsione), o *elemento M-ammissibile*: ogni elemento ω di qualche sopra-R-modulo senza torsione N di M, tale che $h(I_\omega) = h(M : \omega) > 1$.
27. $M \in P.E.$ « M soddisfa alla proprietà di estensione » se ogni elemento M-ammissibile appartiene ad M.

n. 1. Premesse.

1.1 Per ogni R-modulo M di $T.F.$ esiste una sequenza esatta del tipo:

$$0 \to t(M) \to M \to R^p$$

ove $p = rg(M)$.
(cfr. [4] pag. 130 prop. 2.1, prop. 2.4).

1.2 *Definizione* : $t_2(M)$

per ogni R-modulo M indicheremo con $t_2(M)$ il sottomodulo di M costituito con quegli elementi il cui annullatore abbia altezza > 1, e lo chiameremo *sottomodulo di torsione ammissibile.*

1.3 Se $R \in P.\,E.$ e se anche l'R-modulo M soddisfa alla proprietà di estensione, allora nella sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} F \longrightarrow 0$$

risulta: $N \in P.\,E.$ *se e solo se* $t_2(F) = 0$.

Infatti ogni elemento $m \in M$ che sia $\alpha(N)$-ammissibile ha immagine $\alpha(m) \in t_2(F)$, giacchè l'ideale $I_{N,\,m} = N : m$ coincide con l'annullatore di $\beta(m)$.

1.4 Osservazione. *Se M è R-modulo di $T.\,F.$, esistono ideali primi $x \subset R$ tali che le localizzazioni M_x siano R_x-isomorfe con R_x-moduli liberi R_x^p.*

Una dimostrazione di ciò si può ottenere con il metodo che si segue in [5] per la dimostrazione della proposizione 8, a pag. 211, ricordando (cfr. [20]) la classica corrispondenza funtoriale tra R-moduli e fasci di $\mathbf{R}$-moduli.

1.5 Ricordiamo che *nel caso particolare nel quale R sia isomorfo con l'anello delle coordinate di una varietà algebrica irriducibile, affine normale sopra un certo corpo K commutativo e algebricamente chiuso*, la proprietà 1.4 si può rafforzare, giacchè allora: *ogni R-modulo di tipo finito e senza torsione ha localizzazioni R_x-libere per tutti gli ideali primi di R che non contengano un certo ideale $I(M)$ di altezza > 1.* (cfr. [1], [2]).

Sostituendo la ipotesi su R con un'altra equivalente (cfr. [20] pag. 240), si ottiene anche:

ogni R-modulo di $T.\,F.$ e senza torsione, su un dominio d'integrità R che sia dotato di una naturale struttura di K-algebra di $T.\,F.$ e integralmente chiusa nel suo corpo dei quozienti, ha localizzazioni R_x-libere per tutti gli ideali primi di R che non contengano un certo ideale $I(M)$ di altezza > 1.

Nota. Per varietà non normali (ovvero anelli R non integralmente chiusi nel loro corpo dei quozienti) la proprietà non resta più necessariamente valida. Per esempio, considerando l'anello quoziente $K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$, l'ideale I in esso generato dagli elementi $[X]$, $[Y]$ ha localizzazione non R_x-libera sull'ideale primo $x = I$ la cui altezza è uno; in questo caso non esistono ideali propri di altezza > 1 e pertanto se restasse valida la tesi della proprietà più sopra enunciata, ogni localizzazione dovrebbe risultare libera.

1.6 Nelle stesse ipotesi di 1.5 risulta:
$t_2(M \otimes N) = t(M \otimes N)$ per ogni coppia di R-moduli M, N senza torsione e di $T. F.$ giacchè il prodotto tensoriale $M_x \otimes N_x$ di due R_x-moduli liberi non ha torsione.

Nota. Con riferimento alla nota del n. 1.5, si ha:

$$t(I \otimes I) \neq 0, \quad t_2(I \otimes I) = 0, \quad (\text{cfr. } 3.3).$$

1.7 Una conseguenza di 1.3, 1.5 è la seguente:
Se R è un dominio d'integrità dotato di una naturale struttura di K-algebra di tipo finito e normale, allora, dati tre R-moduli senza torsione H, M, N di $T. F.$ tali che:

a) sia esatta la sequenza $0 \to N \to R^p \to M \to 0$;

b) $t(N \otimes H) = 0$;

risulta:

$$N \otimes H \in P. E. \text{ se e solo se } t(M \otimes H) = 0.$$

1.8 Osservazione. *Se F, M sono R-moduli e $t(M) = 0$ e se l'omomorfismo $F \xrightarrow{\varphi} M$ possiede per lo meno una localizzazione φ_x iniettiva, allora:*

$$Nc(\varphi) = t(F).$$

Infatti:
sempre, se $t(M) = 0$, si ha che $\varphi(t(F)) = 0$, giacchè $\varphi(r \cdot f) = r \cdot \varphi(f) = o$, con $r \neq o$ implica $\varphi(f) = o$;
viceversa, se $\varphi(f) = o$ e se φ_x è iniettivo, si ha:
$\varphi_x(f_x) = o$ implica $f_x = f_x/1 = o$ ossia $s \cdot f = o$ per qualche $s \in S = R \dot{-} x$ e pertanto $f \in t(F)$.

1.9 *Data una iniezione di R-moduli senza torsione $M \xrightarrow{\varphi} F$ ed un R modulo N di $T. F.$ tale che:*

$$t(N) = 0, \quad t(F \otimes N) = 0,$$

allora è esatta la sequenza:

$$0 \longrightarrow t(M \otimes N) \xrightarrow{j} M \otimes N \xrightarrow{\varphi \otimes N} F \otimes N$$

e risulta pertanto:

$$t(M \otimes N) \approx Nc\,(\varphi \otimes N).$$

Infatti:
esiste un ideale primo x di R (cfr. 1.4) tale che $N_x \approx R_x^p$ e di conseguenza a partire dal seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} (M \otimes N)_x & \xrightarrow{(\varphi \otimes N)_x} & (F \otimes N)_x \\ \Big\updownarrow & & \Big\updownarrow \\ M_x \otimes R_x^p & \xrightarrow{(\varphi_x \otimes R_x^p)} & F_x \otimes R_x^p \end{array}$$

si deduce che $(\varphi \otimes N)_x$ è iniettivo, giacchè tale è $\varphi_x \otimes R_x^p$.

Pertanto risulta (cfr. 1.8), $Nc\,(\varphi \otimes N) = t(M \otimes N)$.

1.10 Ricordiamo un'altra importante proprietà (cfr. [10]):

Se P, P' sono R-moduli proiettivi e se si hanno due sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow P' \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

ove $t(M) = t(M') = 0$, *allora*:

$$t(M \otimes N') \approx t(M' \otimes N).$$

NB. *La ipotesi che M, M' siano privi di torsione è essenziale* (cfr. per esempio 5.6).

Una verifica elementare della proprietà in questione si può ottenere facilmente applicando il cosidetto « teorema del diagramma del serpente » al diagramma commutitivo ed esatto

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & \dfrac{N \otimes N'}{t(N \otimes N')} & \longrightarrow & P \otimes N' & \longrightarrow & M \otimes N' & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_2} & & \downarrow{\scriptstyle g_3} & \\
0 \longrightarrow & N \otimes P' & \longrightarrow & P \otimes P' & \longrightarrow & M \otimes P' & \longrightarrow 0
\end{array}$$

ottenendone la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow Nc\,(g_1) \longrightarrow Nc\,(g_2) \longrightarrow Nc\,(g_3) \longrightarrow Cnc\,(g_1) \longrightarrow Cnc\,(g_2) \longrightarrow Cnc\,(g_3) \longrightarrow 0$$

che nel nostro caso si particolarizza in:

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow t\,(M \otimes N') \longrightarrow (N \otimes M') \xrightarrow{\psi} (P \otimes M') \longrightarrow (M \otimes M') \longrightarrow 0$$

e mostra che $t(M \otimes N') \approx Nc\,(\psi) \approx t\,(N \otimes M')$, giacchè $t\,(P \otimes M') = 0$.

1.11 Siano F, G due R-moduli di $T.\ F.$, senza torsione, con rango p, q, rispettivamente; siano $\varphi_F \colon F \longrightarrow R^p$, $\varphi_G \colon G \longrightarrow R^q$ due iniezioni (cfr. 1.1):
indicheremo allora con FG la immagine di $\varphi_F \otimes \varphi_G$ in $R^{pq} \approx R^p \otimes R^q$.
Per quanto visto in 1.8, 1.9 si ha allora la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow t\,(F \otimes G) \longrightarrow F \otimes G \longrightarrow FG \longrightarrow 0.$$

Nota. Se F è un ideale di R allora FG risulta isomorfo con la immagine in R^q dell'omomorfismo:

$$F \otimes G \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow R^q,$$

essendo φ definito con $\varphi\,(f \otimes g) = f.\,g$.
Se $F = G$ scriveremo F_2 invece che FG;

Analogamente, se $F = G$ e $n > 1$, indicheremo con F_n il modulo $F_{n-1}\,G$.

1.12 *Dato un omomorfismo suriettivo $R^s \xrightarrow{\varphi} M$ e considerato un ideale primo x in R, si ha che:*

$(Nc\,(\varphi))_x \subseteq x R_x^s$ se e solo se le immagini degli elementi u_i della base canonica di R^s formano un sistema minimale di generatori per M_x.

Infatti :
sia $m_i = \varphi(u_i)$ e sia $m_i/1$ l'elemento che corrisponde ad m_i in M_x ; Se $\{m_1/1, \dots, m_s/1\}$ non è un sistema minimale di generatori per M_x ; allora per esempio sarà $m_1/1 = - ({}_2^s\Sigma_i \xi_i(m_i/1)$, con $\xi_i \in R_x$ ed ovviamente $(1, \xi_2, \dots, \xi_s)$ è un elemento di $(Nc(\varphi))_x$ che non appartiene ad xR_x^s, giacchè la sua prima coordinata è 1 ;

Viceversa :
se $(\xi_1, \dots, \xi_s) \in (Nc(\varphi))_x$ e per esempio $\xi_1 \notin xR_x$, allora $\xi_1 = r_1/s_1$, con $r_1, s_1 \notin x$ ed allora $m_1/1 = -(s_1/r_1)({}_2^s\Sigma_i \xi_i(m_i/1)$.

1.13 Osservazione. *Se per gli omomorfismi suriettivi* $\varphi : R^s \longrightarrow M$, $\psi : R^t \longrightarrow N$ *risulta*

$$(Nc(\varphi))_x \subseteq xR_x^s, \ (Nc(\psi))_x \subseteq xR_x^t ,$$

allora di conseguenza :

$$(Nc(\varphi \otimes \psi))_x \subseteq xR_x^{st} .$$

Dunque (cfr. ii def. 15) sussiste la relazione :

$$n((M \otimes N)_x) = n(M_x) \cdot n(N_x).$$

Infatti :
$Nc(\varphi \otimes \psi)$ si può generare per mezzo delle immagini degli omomorfismi :

$$Nc(\psi) \otimes R^s \longrightarrow R^t \otimes R^s, \ R^t \otimes Nc(\varphi) \longrightarrow R^t \otimes R^s,$$

(cfr. [18] pag. 41, teor. 4) ;
perciò, giacchè la ipotesi su $(Nc(\varphi))_x$, $(Nc(\psi))_x$ implica :

$$(Nc\,\psi \otimes R^s)_x \subseteq (xR_x^t) \otimes R_x^s = x(R_x^t \otimes R_x^s),$$

$$(R^t \otimes Nc\,\varphi)_x \subseteq (R_x^t) \otimes (xR_x^s) = x(R_x^t \otimes R_x^s)$$

segue anche :

$$(Nc\,\psi \otimes R^s)_x + (R^t \otimes Nc\,\varphi)_x \subseteq x(R^{st})_x .$$

n. 2. Rappresentazioni di $t(M \otimes N)$ come quoziente di un modulo senza torsione.

2.1 Sia N un R-modulo di $T.\ F.$, senza torsione, sia J un ideale di R e si consideri una sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{j} R^p \xrightarrow{k} N \longrightarrow 0.$$

Moltiplicando tensorialmente per J e considerando la restrizione $\bar{k}$ di k a JR^p si può costruire il seguente diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & J \otimes S \arrow[r, "J \otimes j"] \arrow[d] & J \otimes R^p \arrow[r, "J \otimes k"] \arrow[d, leftrightarrow] & J \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Nc(\bar{k}) \arrow[r] \arrow[d] & JR^p \arrow[r, "\bar{k}"] & JN \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & T' \arrow[d] & & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

dove

$$Nc(\bar{k}) = Nc(k) \cap JR^p = (S \cap JR^p) \subset R^p, \ T \approx T' \approx t(J \otimes N).$$

Si può così ottenere finalmente per $t(J \otimes N)$ una sequenza esatta

$$(*), \qquad 0 \longrightarrow JS \longrightarrow S \cap JR^p \longrightarrow t(J \otimes N) \longrightarrow 0,$$

nella quale $S \cap JR^p$ è l'intersezione del sottomodulo S di R^p con il sottomodulo di R^p immagine dell'omomorfismo canonico $J \otimes R^p \longrightarrow R^p$, e l'omomorfismo $JS \longrightarrow S \cap JR^p$ è quello naturale.

2.2 Caso particolare: $S \subseteq JR^p$.

In questo caso la sequenza esatta si semplifica in:

$$(**), \qquad 0 \longrightarrow JS \longrightarrow S \longrightarrow t(J \otimes N) \longrightarrow 0.$$

Ciò accade per esempio nel caso seguente:

2.3 Se J è un ideale proprio generato da una R-successione $r_1, \dots, r_s$ e se $S = S_1, S_2, \dots, S_{t-1}, S_t = R^q$ sono i vari moduli di sizigie (cfr. [6]) dell'ideale J costruiti con riferimento a sistemi minimali di generatori, e se infine indichiamo, per uniformità di notazione, $J = S_0$, allora si ottengono le sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow JS_{i+1} \longrightarrow S_{i+1} \longrightarrow t\,(J \otimes S_i) \longrightarrow 0, \quad i = o, 1, \dots, t-1;$$

In particolare per $i = o$ si ottiene:

$$0 \longrightarrow JS \longrightarrow S \longrightarrow t\,(J \otimes J) \longrightarrow 0.$$

Si constata inoltre immediatamente, osservando che la controimmagine di JS_{i+1} nell'omomorfismo suriettivo $R^{p(i)} \longrightarrow S_{i+1}$, $\left(p\,(i) = \binom{s}{i+2}\right)$, risulta essere $JR^{p(i)}$, che *tutti i moduli* $t\,(J \otimes S_i)$ *sono isomorfi con somme dirette di moduli « copie » di* R/J *ed esattamente risulta:*

$$t\,(J \otimes S_i) \approx \bigoplus_{p(i)} R/J\,;\; p\,(i) = \binom{s}{i+2};\; i = o, 1, \dots, t-1\,;\, S_0 = J.$$

2 4 Se J è un ideale che abbia per lo meno una localizzazione J_x non R_x-libera. e se $S_1, \dots, S_t$ sono i vari modoli di sizigie costruiti con sistemi minimali di generatori e se S_t è il primo d'essi che risulti libero, allora si hanno le sequenze esatte:

$$0 \longrightarrow xS_{i+1} \longrightarrow S_{i+1} \longrightarrow t\,(x \otimes S_i) \longrightarrow 0\,; \quad i = 1, \dots, t-1.$$

Anche in questo caso si constata, considerando gli omomorfismi suriettivi $R^{p(i)} \longrightarrow S_{i+1}$, che i moduli $(t\,(x \otimes S_i)$ sono isomorfi con somme dirette di moduli « copie » di R/x. Ovviamente nel presente caso non è detto che per i numeri $p\,(i)$ valga la formula del n. 2.3.

2.5 Altro caso particolare.

Sia J un « *ideale sizigetico* » (cfr. [13]), ossia un ideale che possieda un sistema di generatori tale che per il corrispondente primo modulo di sizigie risulti: $S_T = S \cap JR^p$, ove con S_T si indica quel sottomodulo di S costituite con le cosidette « sizigie triviali » del tipo $(0, 0, \dots, r_j, 0, \dots, -r_i, 0, \dots, 0)$, essendo r_i, r_j rispettivamente i-esimo e j-esimo generatore di J ed i posti occupati nella p-pla l'i-esimo per r_j e il j-esimo per $-r_i$. Si ottiene allora la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow JS \longrightarrow S_T \longrightarrow t(J \otimes J) \longrightarrow 0.$$

Osservazione. Caso particolare di ideale sizigetico è ogni ideale generato con una R-successione.

2.6 Considerazioni sulla rappresentazione di $t(M \otimes N)$ nel caso generale.

Ci siamo limitati, nei precedenti commi, al caso che per lo meno uno dei due moduli M, N abbia rango uno.

Se $rg(M) > 1, rg(N) > 1$ il metodo descritto al n. 2.1 non porta a risultati soddisfacenti, visto che in tal caso $Nc(\bar{k})$ non ha una rappresentazione molto semplice in MR^p e in R^{pq}.

Se l'anello R soddisfa alla $P.E.$ e se almeno uno dei due moduli M, N è isomorfo con il nucleo di un omomorfismo $R^s \longrightarrow R^t$, una possibilità di ridurre la questione ad un'altra più semplice può in certi casi essere offerta da quanto ricordato in 1.10 (cfr. n. 5.1).

Se l'anello R è isomorfo con l'anello delle coordinate di una varietà algebrica affine irriducibile ed a fattorizzazione unica (su un corpo K commutativo ed algebricamente chiuso) e se almeno uno dei due M, N, per esempio M soddisfa alla $P.E.$, allora è possibile ridurre la questione al caso considerato in 2.1, giacchè (cfr. [12]) esiste in tal caso una sequenza esatta: $0 \longrightarrow M \longrightarrow R^{p+1} \xrightarrow{\varphi} R$ e dunque, se N soddisfa ad una sequenza esatta: $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow R^s \longrightarrow N \longrightarrow 0$ si ha: $t(M \otimes N) \approx t(N_1 \otimes J)$, ove $J = Im(\varphi)$, (cfr. per esempio n. 5.4).

Nel caso che nè M nè N soddisfi alla $P.E.$ non mi si è presentata nessuna soluzione soddisfacente per una buona rappresentazione di $t(M \otimes N)$; alcune considerazioni che possono risultare utili per verificare per lo meno se $t(M \otimes N)$ è o non è nullo, sono esposte nel paragrafo 3.

3. Alcuni criteri per verificare se $t(M \otimes N) = 0$ oppure $t(M \otimes N) \neq 0$.

3.1 Nel caso che $rg(N) = 1$, si possono direttamente utilizzare le sequenze esatte $(*)$, $(**)$ (cfr. 2.1, 2.2).

Mentre che nel caso della $(*)$ occorre verificare direttamente se i sottomoduli JS_1, $S_1 \cap JR^p$ sono eguali e differenti, nel caso della sequenza $(**)$ risulta necessariamente $t(J \otimes M) \neq 0$.

Infatti ciò si può vedere applicando una nota proprietà che, per comodità del lettore riportiamo:
([16] pag. 10 n. 3.11) « *sia M un R-modulo di tipo finito tale che $JM = M$ per un certo ideale J di R. Se nessun elemento a di R tale che $(a - 1) \in J$, appartiene ad $Ann(M)$, allora $M = 0$* ».

Pertanto nel nostro caso, se $S_1 \neq 0$ ed R è dominio d'integrità, sempre risulta $JS_1 \neq S_1$.

3.2 Se $rg(M), rg(N) \geq 1$, si possono fare le seguenti considerazioni di carattere generale:
indicando con $n(M)$ il numero minimo di generatori per M, si ha, per ogni ideale primo x di R:

$$n((M \otimes N)_x) = n(M_x) \cdot n(N_x), \qquad \text{(cfr. 1.13)};$$

ed indicando con n_{tx} il numero $n(t(M \otimes N)_x)$, si ottiene pure:

$$\text{(i)} \qquad n_{tx} + n((NM)_x) \geq n(M_x) \cdot n(N_x);$$

$$\text{(ii)} \qquad n((NM)_x) \leq n(M_x) \cdot n(N_x).$$

La prima diseguaglianza si verifica completando un sistema di generatori di $t(M \otimes N)_x$ ad un sistema di generatori di $(M \otimes N)_x$; la seconda si verifica osservando che $(NM)_x$ è un quoziente di $(M \otimes N)_x$. Otteniamo allora la seguente condizione:

$$n((NM)_x) < n(M_x) \cdot n(N_x) \ \textit{implica} \ t(M \otimes N)_x \neq 0$$

giacchè la diseguaglianza implica $n_{tx} > 0$.

La condizione enunciata risulta una condizione sufficiente, ma non necessaria per il non annullarsi di $t(M \otimes N)$, (cfr. 5.8).

3.3 Un caso particolare.

Se I è un ideale non proiettivo allora $t(I \otimes I) \neq 0$.

Infatti, se I non è proiettivo, ha per lo meno una localizzazione I_x non R_x-libera e se si considera allora un sistema minimale di generatori $r_1, \dots, r_s$ per I_x, allora, (cfr. 1.13) risulta $n((I \otimes I)_x) = s^2 > 1$ mentre $n(I_2) \leq s(s+1)/2$, giacchè gli elementi $a_i \otimes a_j$, $a_j \otimes a_i$ hanno la stessa immagine in I_2.

3.4 Se $R \in P.E.$ ed F è un R-modulo senza torsione, di rango > 1, non soddisfacente alla $P.E.$, allora esistono elementi ω, (di qualche sopra-R-modulo di F), non appartenenti ad F e tali che lo ideale $(F:\omega)$ abbia altezza > 1; per ogni coppia di elementi r, s di tale ideale risulta allora che l'elemento $(r\cdot\omega \otimes s\cdot\omega) - (s\cdot\omega \otimes r\cdot\omega)$ ha immagine nulla nell'omomorfismo canonico $F \otimes F \longrightarrow F_2$.

Questo si può verificare osservando che l'elemento $r.\omega.s.\omega$ di F_2 si può rappresentare per mezzo di una matrice quadrata:

$$\left\| \begin{matrix} r\cdot f_1\cdot s\cdot f_1 & r\cdot f_1\cdot s\cdot f_2 \,.\,.\, r\cdot f_1\cdot s\cdot f_p \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r\cdot f_p\cdot s\cdot f_1 & r\cdot f_p\cdot s\cdot f_2 \dots r\cdot f_p\cdot s\cdot f_p \end{matrix} \right\|$$

essendo $\omega = (f_1, \dots, f_p) \in R^p$ e pensando pure F_2 immerso in R^{p^2}; questa matrice è simmetrica e coincide pertanto con la sua trasposta, che rappresenta l'elemento $s\cdot\omega\cdot r\cdot\omega$.

Orbene, se è possibile completare $r\cdot\omega, s\cdot\omega$ ad un sistema minimale di generatore per F_x, allora risulta che il corrispondente sistema minimale di generatori per $(F \otimes F)_x$ possiede un numero di elementi distinti, maggiore che la sua immagine in F_2 e pertanto ne segue $t(F \otimes F) \neq 0$.

3.5. Se invece $r\cdot\omega, s\cdot\omega$ non si possono completare ad un sistema minimale di generatori per F_x, può ciononostante accadere che l'elemento $(r\cdot\omega \otimes s\cdot\omega) - (s\cdot\omega \otimes r\cdot\omega)$ lo stesso non si annulli in $(F \otimes F)$; un esempio di questa situazione è esposto in 5.3.

3.6 Si osservi pure, infine, che un elemento di torsione, non nullo di $R \otimes F$ non è necessariamente del tipo $\sigma \otimes \omega - \omega \otimes \sigma$.

Per esempio, considerando il nucleo G dell'omomorfismo $R^4 \xrightarrow{\varphi} R$, ove R è l'anello dei polinomi in quattro indeterminate X, Y, Z, T su un corpo K e l'omomorfismo φ è definito con: $\varphi(a, b, c, d) = a \cdot X + b \cdot Y + c \cdot Z + d \cdot T$, risulta che $t(G \otimes G)$ è $\neq 0$ e si genera con l'elemento $\sum_{i+k=7} (\sigma_i \otimes \sigma_k)$ con $\sigma_i = \psi(u_i)$, essendo: $0 \rightarrow R \rightarrow R^4 \xrightarrow{\varphi} R^6 \rightarrow R^4 \rightarrow (\{X, Y, Z, T\}) \rightarrow 0$ la sequenza esatta canonica di sizigie per l'ideale $Im(\varphi)$.

NOTA. Che sia $t(G \otimes G) \neq 0$ risulta immediatamente, per esempio con il metodo che si applica in 5.1; l'elemento generatore si può determinare considerando le relazioni fra le immagini degli elementi $\sigma_i \otimes \sigma_k$ in G_2.

3.7. Si ricordi in ultimo la possibilità, che sempre resta, nel caso che uno dei due moduli M, N per lo meno, soddisfi alla $P.E.$ (supposta che R vi soddisfi), di utilizzare la proprietà 1.10. (cfr. gli esempi in 5.1, 5.2, 5.4).

4. Alcuni casi nei quali $t(M \otimes N)$ è sommando diretto di $M \otimes N$ (ed una condizione affinchè non lo sia).

4.1 TEOREMA. *Per ogni ideale di altezza* > 1, *generabile per mezzo di una R-successione incondizionata* (cfr. (ii) def. 23) $r_1, \dots, r_s$ *risulta*:

$$I \otimes I \approx I_2 \oplus t(I \otimes I), \; t(I \otimes I) \approx \bigoplus_{n(s)} (R/I), \; n(s) = s(s-1)/2.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la sequenza esatta canonica:

$$0 \rightarrow S \rightarrow R^s \xrightarrow{\varphi} I \rightarrow 0, \quad \varphi(u_i) = r_i.$$

È noto (cfr. per esempio [6]) che il sottomodulo S di R^s è generato dagli $s(s-1)/2$ elementi ω_{ik}, $(i < k)$, le cui coordinate sono: $-r_k$ la i-esima, r_i la k-esima, 0 le rimanenti.

Per quanto visto in 2.3 il modulo $t(I \otimes I)$ è isomorfo con $\bigoplus_{n(s)} (R/I)$ e soddisfa alla sequenza esatta:

$$0 \rightarrow IS \rightarrow S \rightarrow t(I \otimes I) \rightarrow 0.$$

Si consideri ora il sottomodulo G di R^s generato dagli elementi della famiglia $\{\sigma_{ik}\}$, con $1 \leq k \leq i \leq s$, ove σ_{ik} ha nulle tutte le sue coordinate meno la i-esima che vale r_k.

Risulta allora evidentemente $S + G = IR^s$; inoltre verificheremo ora che $S \cap G \subseteq IS$.

Infatti, sia $\omega \in S \cap G$ ovvero $\omega = \sum_{ik} \lambda_{ik}\, \omega_{ik} = \sum_{ik} \mu_{ik}\, \sigma_{ik}$; egua-gliando le s coordinate, si ottengono s condizioni del tipo:

$$\Sigma_{ik}\, \lambda_{ik}\, \omega_{ik}^{j} = \Sigma_{ik}\, \mu_{ik}\, \sigma_{ik}^{j},$$

ove ω_{ik}^{j}, σ_{ik}^{j} indicano la j-esima coordinata di ω_{jk}, σ_{ik} rispettivamente.

Nella prima equazione, $(j = 1)$, a secondo membro campare solo il termine $\mu_{11}\, r_1$, e ciò permette di dedurre che gli $s - 1$ coefficienti $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \ldots, \lambda_{1s}$ che compaiono a primo membro (moltiplicato ciascuno per un certo differente r_i, $i > 1$) appartengono all'ideale I (ricordando che gli el. r_i formano R-successione incondizionata).

La seconda equazione, $(j = 2)$, a secondo membro ha: $\mu_{21}\, r_1 + \mu_{22}\, r_2$ e ciò permette di dedurre l'appartenenza ad I degli $s - 2$ coefficienti $\lambda_{23}, \lambda_{24}, \ldots, \lambda_{2s}$ (nessuno dei quali compare moltiplicato per r_1 e r_2); così si giunge successivamente alla $(s - 1)$-esima equazione, che permette di dedurre che $\lambda_{s-1,s}$ appartiene ad I.

Orbene, con riferimento al diagramma esatto:

$$\begin{array}{ccccccc} I \otimes S & \xrightarrow{I \otimes j} & I \otimes R^s & \xrightarrow{I \otimes \varphi} & I \otimes I & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \psi} & & & & \\ & & IR^s & & & & \end{array}$$

le relazioni: $S + G = IR^s$, $S \cap G \subseteq IS$ implicano che le immagini $\overline{S}$, $\overline{G}$ di S, G per mezzo dell'omomorfismo $(I \otimes \varphi)\, \psi$ sono due sotto-moduli di $I \otimes I$ dei quali $I \otimes I$ risulta somma diretta; infine $\overline{S}$ coincide palesemente con $t\,(I \otimes I)$ mentre $\overline{G}$ è isomorfo con il co-nucleo della inclusione di $t\,(I \otimes I)$ in $(I \otimes I)$, conucleo che d'altra parte è isomorfo pure con I_2 (cfr. 1.11).

4.2. Corollario. *Se R è un dominio d'integrità di Macaulay, allara per ogni ideale proprio I della classe principale (cioè genera-bile con un numero di elementi pari alla sua altezza) di altezza > 1*

si ha :

$$I \otimes I \approx (\bigoplus_{n(s)} R/I) \oplus I_2.$$

Infatti : in un anello di Macaulay ogni ideale delllla classe principale si può generare per mezzo di una R-successione incondizionata (cfr. [14] teor. 2 oppure [7] e [15]).

4.3 Osservazione. Le condizioni del teorema 4.1 *non sono necessarie*, come si può constatare per esempio considerando gli ideali :

$I = (\{XY, YZ, ZX\})$ nell'anello dei polinomi a tre indeterminate su un corpo K oppure :

$J = (\{X, Y\})$ nell'anello quoziente $K[X, Y]/(Y^2 - X^3)$.

4.4 Osservazione. D'altro canto, si osservi che *non sempre* $t(I \otimes I)$ risulta sommando diretto in $I \otimes I$.

Per esempio : si consideri $I = (\{X, Y\})$ nell'anello quoziente $K[X, Y]/(X^3 - Y^4)$. Risulta in questo caso $t(I \otimes I) \neq 0$ senza che $t(I \otimes I)$ sia sommando diretto in $I \otimes I$, giacchè $n(I_2) = 3$, $n(I \otimes I) = 4$, $n_t = 2$ (cfr. 4.7).

Considerata la sequenza esatta : $0 \to H \to R^2 \to I \to 0$ nella quale l'R-modulo H è isomorfo con l'ideale generato con X, Y^3 si verifica facilmente che ogni relazione fra i tre generatori X^2, XY, Y^2 di I ha i suoi coefficienti nell'ideale $x = (\{X, Y\})$ e pertanto effettivamente $n(I_2) = 3$. Se poi fosse $n_t = 1$, ciò implicherebbe, giacchè $t(I \otimes I) \approx H/IH$, che si potrebbe generare l'ideale $(\{X, Y^3\})$, (isomorfo con H), con gli elementi X^2, XY, XY^3, Y^4 ed un altro, P, in più. Invece si verifica, (considerando i gradi dei polinomi in questione e del polinomio $X^3 - Y^4$), che, localizzando in x dovrebbe risultare $P_x = \lambda X_x$ e ciò implicherebbe, sempre localizzando in x ed inoltre annullando X, che l'ideale $(Y^3)_x$ sarebbe generabile per mezzo dell'elemento Y^4_x, cosa che risulta impossibile (considerando i gradi).

4.5 Teorema. *Se F è un R-modulo senza torsione soddisfacente ad una sequenza esatta :*

$$0 \to R \xrightarrow{\varphi} R^s \to F \to 0$$

e se inoltre le coordinate $r_1, \dots, r_s$ *di* $\varphi(1)$ *in* R^s *sono tali che per lo meno per un indice j risultati:*

$$(\{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s\}) : r_j = (\{r_1, \dots, r_{j-1}, r_{j+1}, \dots, r_s\}),$$

allora, chiamato J l'ideale generato dagli elementi r_i risulta:

$$t(J \otimes F) \approx R/J; \quad J \otimes F \approx (R/J) \oplus JF.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che sia $(\{r_1, \dots, r_{s-1}\}) : r_s = (\{r_1, \dots, r_{s-1}\})$.

Con riferimento al diagramma del n. 21, si osservi che $J \otimes F$ è generato dalle immagini (per mezzo di $J \otimes k$) degli elementi $r_i \otimes u_j$ ai quali corrispondono in JR^s gli elementi u'_{ij} che hanno la i-esima coordinata uguale ad r_j e le rimanenti nulle.

Se G è il sottomodulo di JR^s generato da tutti gli elementi u'_{ij} meno l'ultimo $u'_{ss} = (0, 0, \dots, 0, r_s)$ e se S' è il sottomodulo di JR^s generato dall'elemento $(r_1, r_2, \dots, r_s)$, risulta:

$$S' + G = JR^s, \quad S' \cap G \subseteq JS'$$

giacchè se $\omega = r(r_1, \dots, r_s) = \sum_{i+k<2s} \lambda_{ik} u'_{ik}$, allora, eguagliando la s-esima coordinata risulta: $r \cdot r_s = \sum_1^{s-1} \Sigma_i \lambda_{is} u'_{is} \in (\{r_1, \dots, r_{r-1}\})$ ossia: $r \in (\{r_1, \dots, r_{s-1}\}) \subseteq J$ e pertanto $\omega \in JS'$.

Il risultante che si deve dimostrare segue allora con lo stesso procedimento del n. 4.1, osservando nel presente caso che $S' \approx R$.

4.6 OSSERVAZIONE. Se non si compie la ipotesi fatta per gli elementi r_i in 5.5, non è detto che $t(J \otimes F)$ risulti sommando diretto in $J \otimes F$.

Per esempio: il conucleo F dell'omomorfismo $R \xrightarrow{\varphi} R^3$ definite con $\varphi(1) = (X_2 X_3, X_3 X_1, X_1 X_2)$ (R essendo l'anello dei polinomi in tre indeterminate su un corpo K), moltiplicato tensorialmente per l'ideale J generato dalle tre coordinate di $\varphi(1)$ in R^3, dà: $t(J \otimes F) \approx R/J$ non sommando diretto in $J \otimes F$.

Infatti, con un poco di calcoli del solito tipo si trova:

$$n(JF) = n(J \otimes F), \quad n(t(J \otimes F)) = 1, \qquad \text{(cfr. 4.7)}.$$

4.7 CONDIZIONI AFFINCHÈ $t(M \otimes N)$ NON SIA SOMMANDO DIRETTO IN $M \otimes N$. Con riferimento al n. 3.2 e ricordando che (cfr. [16] pag. 14, 5.3) in un modulo di tipo finito su un anello locale, due sistemi minimali di generatori sempre hanno lo stesso numero cardinale, segue che:

(*) *Se* $n_t + n(MN)_x > n((M \otimes N)_x)$ *per qualche ideale primo* x, *allora* $t(M \otimes N)$ *non è sommando diretto in* $M \otimes N$.

(**) *Se* $t(M \otimes N) \neq 0$ *e se* $n((MN)_x) = n(M_x) \cdot n(N_x)$, *allora* $t(M \otimes N)$ *non è sommando diretto in* $M \otimes N$.

OSSERVAZIONE. Queste condizioni sono in essenza coincidenti con la condizione studiata in [8], se si tiene presente la proprietà considerata in 1.12.

5. Ulteriori esempi ed applicazioni.

5.1, 5.4	: calcolo di $t(M \otimes N)$;
5.3, 5.5, 5.7	: verifica che $t(M \otimes N) \neq 0$;
5.8	: applicazione del teorema 4.5;
5.9	: applicazione del criterio 4.7;
5.6	: un esempio a proposito dei limiti di validità per la proprietà 1.10;
5.2	: calcolo della dimensione omologica di un modulo.

5.1 Siano $S_0 = I, S_1, \ldots, S_4 = R$ i successivi moduli di sizigie canonici per l'ideale $I(\{X, Y, Z, T, U\})$ in un anello di polinomi con per lo meno 5 indeterminate. Applicando allora il teorema 2.3 e quanto esposto nei nn. 1.10, 4.1, 4.5 si ottiene che tutti i vari sottomoduli di torsione $t(S_i \otimes S_k)$ sono somme dirette di copie di R/J, $n(i, k)$ volte, con

$$n(i, k) = \binom{5}{i + k + 2};$$

Inoltre $t(I \otimes I)$, $t(I \otimes S_3)$ sono sommandi diretti.

5.2 Calcolo della dimensione omologica di un modulo.

Si considerino le sequenze esatte:

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow R^3 \xrightarrow{\varphi} I \longrightarrow 0$$

$$(**) \qquad 0 \longrightarrow R \longrightarrow R^3 \xrightarrow{\psi} M \longrightarrow 0$$

ove

$$\varphi(a, b, c) = a(Y - X^3) + b(X^2 + Y^2 - 2X) + c(Y + Z):$$

e ψ è un qualunque omomorfismo suriettivo (che in questo caso certamente esiste, formando gli elementi $\varphi(u_i)$, R-successione). Si consideri pure la sequenza esatta che si ottiene per mezzo dell'omomorfismo $\psi \otimes \psi$ (cfr. [18] pag. 41, teor. 4):

$$(R \otimes R^3) \oplus (R^3 \otimes R) \longrightarrow R^3 \otimes R^3 \longrightarrow M \otimes M \longrightarrow 0$$

e, osservando che $rg(Nc(\psi \otimes \psi)) = 5$, la sequenza esatta:

$$(***) \qquad 0 \longrightarrow R \longrightarrow R^6 \longrightarrow R^9 \longrightarrow M \otimes M \longrightarrow 0$$

o equivalentemente le due:

$$\text{(i)} \qquad 0 \longrightarrow R \longrightarrow R^6 \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

$$\text{(ii)} \qquad 0 \longrightarrow F \longrightarrow R^9 \longrightarrow M \otimes M \longrightarrow 0, \quad \text{con } F = Nc(\psi \otimes \psi).$$

È noto (cfr. 1.10) che $t(M \otimes M) = 0$;

Dimostreremo ora che:

1) $t(M \otimes M \otimes M) \neq 0$;

2) $dh(M \oplus M) = 2$ (cfr. ii def. 19);

3) $dh(M \otimes M \otimes M) = 3$.

Infatti:

1) $t(M \otimes M \otimes M) \approx t(I \otimes F)$, (cfr. 1.10, (*), (ii);

$$t(I \otimes F) \approx R/I \neq 0 \quad \text{(cfr. 2.2)}.$$

2) della $(***)$ risulta $dh(M \otimes M) \leq 2$; se fosse $dh(M \otimes M) \leq 1$ si avrebbe, per lo meno localmente, una sequenza esatta del tipo:

$$0 \longrightarrow R^5 \longrightarrow R^9 \longrightarrow M \otimes M \longrightarrow 0$$

ed allora risulterebbe: (cfr. 1.10),

$$t(M \otimes M \otimes M) \approx t(I \otimes R^5) = 0$$

che invece non è.

3) Considerata la sequenza esatta:

$$0 \longrightarrow R/I \longrightarrow M \otimes M \otimes M \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0 \quad \text{(cfr. ii) def. 13)},$$

ed osservando che $dh(R/I) = 3$, $dh(M_3) \leq 2$ (essendo M_3 senza torsione) segue $dh(M \otimes M \otimes M) = 3$, ricordando anche che dev'essere:

$$dh(R/I) \leq \max\{dh(M \otimes M \otimes M),\ dh(M_3)\} \quad \text{(cfr. [19] pag. 243)}.$$

5.3 Verifica del non annullarsi di $t(F \otimes F)$. Sia E il sottomodulo di R^2-generato dai tre elementi:

$$\sigma_1 = (X, 0),\ \sigma_2 = (0, Y),\ \sigma_3 = (Y, X)$$

essendo R anello di polinomi in per lo meno tre indeterminate X, Y, Z.

Verificheremo che non è nullo l'elemento di torsione:

$$\omega = (0, X^2) \otimes (0, Y) - (0, Y) \otimes (0, X^2) \in F \otimes F.$$

Si verifica che ω è l'immagine dell'elemento $\sigma = (0, -Y, 0, Y, 0, -X, 0, X, 0)$ di $R^3 \otimes R^3$ $(= R^9)$ nell'omomosfismo $\psi \otimes \psi$, ove $\psi(a, b, c) = a \cdot \sigma_1 + b \cdot \sigma_2 + c \cdot \sigma_3$, $\psi: R^3 \longrightarrow F$.

Siccome $Nc(\psi \otimes \psi) \subseteq x^2 R^9$, (come si può verificare calcolando il nucleo di $\psi \otimes \psi$, applicando il teorema di [18] citato in 1.13), mentre σ non appartiene a $r^2 R^9$, segue che $\omega \neq 0$ $(x = (\{X, Y\}))$

5.4 Applicazioni ripetute del criterio enunciato in 1.10. Sia R anello di polinomi in almeno quattro indeterminate X, Y, Z, T, ed M il sottomodulo di R^2 generato dagli elementi:

$$\omega_1 = (Z, T),\ \omega_2 = (Y, 0),\ \omega_3 = (0, Y),\ \omega_4 = (X, 0),\ \omega_5 = (0, X).$$

Si ottiene allora una sequenza esatta $0 \to F \to R^5 \to M \to 0$, nella quale F risulta isomorfo con il secondo modulo di sizige dell'ideale $I = (\{X, Y, Z, T\})$.

Pertanto, *se N è un qualunque R-modulo, soddisfacente alla P.E.* e se si vuole calcolare $t(M \otimes N)$ si trova, applicando ripetute volte la proprietà 1.10 alle sequenze esatte seguenti:

1) $0 \to R \to R^4 \to F \to 0$; 4) $0 \to N \to R^q \to G \to 0$,

2) $0 \to F \to R^6 \to S_1 \to 0$; 5) $0 \to S \to R^p \to N \to 0$,

3) $0 \to S_1 \to R^4 \to I \to 0$ 6) $0 \to S' \to R^s \to S \to 0$,

che:

$t(M \otimes N) \approx t(F \otimes G) \approx t(S_1 \otimes N) \approx t(I \otimes S) =$ (cfr. 2.1), $(S' \cap IR^s)/IS'$.

Se poi risulta $S' \subseteq IR^s$ ne segue addirittura che $t(M \otimes N)$ è isomorfo con una somma diretta di copie di R/I.

Nota. L'esistenza di una sequenza esatta come la 4) è assicurata da quanto esposto in [9].

5.5 Applicazione del criterio enunciato in 3.4. Sia M l'R-modulo considerato in 5.4; giacchè $(Y, 0)$, $(X, 0)$ fanno parte di um sistema minimale di generatori per M risulta, applicando il criterio 3.4, che $t(M \otimes M) \neq 0$.

5.6. A proposito di limite di validità del criterio 1.10. Considerate le due sequenze esatte, (ove I è un ideale proprio), $0 \to I \to R \to T \to 0$, $0 \to R \to R^2 \to R \to 0$, si constata immediatamente, essendo $t(I \otimes R) = 0 \neq t(R \otimes T) = T$, che il criterio enunciato in 1.10 non rimane valido se alcuni dei moduli in questione presentano torsione.

5.7. Applicazione del criterio 3.3. Per l'ideale $I = (\{X^4 - Y^3, Y^7 X, 3X^3 Y^2\})$ in $K[X, Y]$ si ha $t(I \otimes I) \neq 0$.

5.8 In $R = K[X, Y, Z]$ siano $I = (\{X, Y, Z\})$, $J = (\{X^2, Y^2, Z^2\})$; risulta allora: $n(IJ) = n(I)\, n(J) = n(I \otimes J)$; $t(I \otimes J) \approx (R/\iota)^3 \neq 0$.

Pertanto (cfr. 4.7) *$t(I \otimes J)$ non è sommando diretto* in $I \otimes J$.

5.9 In $R = K[X, Y, Z, T]$ si consideri $\varphi: R \to R^5$ definito con $\varphi(1) = (XY, Z, TX, YT, YT, X)$. Risulta allora, giacchè $(\{XY, TX, YT, X\}) : Z = (XY, TX, YT, X\})$, che $t(J \otimes F) \approx R/J \neq 0$, $J \otimes F \approx (R/J) \oplus JF$ con $J = (\{X, Z, YT\})$ (cfr. 4.5).

BIBLIOGRAFIA

[1] BALDASSARRI. M : *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica. Torino. 1961. (edit. Rattero).

[2] BALDASSARRI-GHEZZO, S. ; MARGAGLIO, C. ; MILLEVOI, T. : *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M. Baldassarri a Torino nel 1961 : « Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci ».* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1965.

[3] BOURBAKI, N. : *Algebre commutative* « Chap. 1, 2. Hermann, Paris 1961.

[4] CARTAN, H. ; EILENBERG, S. : *Homological Algebra.* Princeton Univ. Press. 1956.

[5] CARTIER P. : *Rationalitè des diviseurs.* Bull. Soc. Math. France 86, 1958, pp. 177-251.

[6] GRÖBNER, W. : *Moderne Algebraische Geometrie.* Springer Verlag 1949.

[7] KAPLANSKI, I. : *Some aspects of rings theory.* Corso C.I.M.E. in Varenna estate 1965.

[8] MARGAGLIO, C. : *Una condizione affinchè il sottofascio di torsione di un fascio algebrico coerente sia sommando diretto.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol-XXXI 1961.

[9] MARGAGLIO, C. : *Una caratterizzazione di certi fasci algebrici coerenti ed una ulteriore applicaziane della proprietà di estensione.* Rend. Sen. Mat. Univ. Padova Vol. XXXIV 1964.

[10] MARGAGLIO C. : *Sul prodotto tensoriale di fasci algebrici coerenti e lisci.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. XXXIV 1964.

[11] MARGAGLIO, C. : *Anelli che soddisfano alla proprietà di estensione.* In corso di stampa.

[12] MARGAGLIO C. : *Sopra un problema di immersione per certi fasci algebrici coerenti su una varietà affine.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. Vol. XXXIX 1967.

[13] MICALI, A : *Algebres integres et sans torsion.* Bull. Soc. Math. France. Tome 94, 1966.

[14] MILLEVOI, T. : *Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1965.

[15] MIYATA, T : *A remark en M-sequences.* Sugaku 15 ('63/'64) pp. 215-216.

[16] NAGATA, M. : *Local rings.* Interscience Tracts n. 13.

[17] NORTHCOTT, D. G. : *Ideal Theory.* Cambridge Tracts n. 42. 1960.

[18] NORTHCOTT, D. G. : *An introduction to homological algebra.* Cambridge. Univ. Press.

[19] SAMUEL, P. ; ZARISKI, O. : *Commutative algebra.* Vol. II. Van Nostrand.

[20] SERRE, J. P. : *Faisceaux algebriques coherents.* Ann. of Math. 61 pp. 197-278,

Manoscritto pervenuto in redazione il 14-12-1967