RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LETIZIA DAL SOGLIO

Gruppi di allacciamento : una generalizzazione funtoriale dell'invariante di Hopf

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 362-379

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__362_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GRUPPI DI ALLACCIAMENTO: UNA GENERALIZZAZIONE FUNTORIALE DELL' INVARIANTE DI HOPF

LETIZIA DAL SOGLIO *)

È noto che la teoria dell'omologia e della coomologia non hanno carattere « risolvente » nella classificazione omotopica di mappe tra spazi topologici. Ad esempio, mentre la classe di omotopia di una mappa $f: S^n \longrightarrow S^n$ è perfettamente determinata, se le sfere sono di uguale dimensione, dall'omomorfismo indotto in omologia (coomologia) da f, la classificazione delle mappe di S^{2n-1} in S^n richiede l'introduzione di un nuovo invariante di omotopia (l'invariante di Hopf).

I gruppi di allacciamento $\mathcal{L}^{p,q}$ definiti nel presente lavoro per spazi di Hausdorff si presentano come funtori, invarianti di omotopia, dalla categoria degli spazi di Hausdorff e mappe proprie generalizzate, a quella dei gruppi abeliani. È sperabile che nel problema di classificazione di mappe in classi di omotopia il funtore allacciamento presenti un « potere risolvente » nel senso anzidetto, in certi casi in cui l'omologia o la coomologia non sono sufficienti.

1. È opportuno introdurre brevemente la categoria $\mathcal{C}$, sulla quale si lavorerà nel seguito in quanto tale categoria non viene di solito presa esplicitamente in considerazione.

Gli oggetti di $\mathcal{C}$ sono gli spazi di Hausdorff, le mappe o elementi di Hom (X, Y), X, Y essendo oggetti di $\mathcal{C}$, sono le applicazioni

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del CNR.

Indirizzo dell'A: Istituto Matematico, Università, Genova.

continue proprie (cioè tali che l'immagine inversa di un compatto sia compatta), non necessariamente definite in tutto X, bensì in sottoinsiemi aperti di X.

Una mappa $f \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ va assegnata allora come grafo, assieme cioè al proprio dominio X ed al proprio codominio Y, tra gli elementi di $\mathrm{Hom}(X, Y)$ vi è anche la mappa nulla definita sul sottoinsieme vuoto di X.

La composizione $g \circ f$ di mappe consecutive: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ risulta ancora definita in un sottoinsieme aperto di X continua e propria. È chiaro che la composizione di mappe è associativa e che per ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$ esiste un elemento unità: la mappa identica $i_A : A \longrightarrow A$, definita in tutto A.

Oss. I. Sia A un aperto di X, allora resta individuata una mappa di $\mathcal{C}$, detta mappa di restrizione (ad A), definita in A e ivi coincidente con la mappa identica.

Ogni mappa $f: X \longrightarrow Y$ della categoria $\mathcal{C}$, si fattorizza in un sol modo in una restrizione seguita da una mappa ovunque definita.

La categoria $\mathcal{C}$ contiene la sottocategoria piena, $\mathcal{C}'$, degli spazi localmente compatti. Tale sottocategoria è equivalente, nel senso di Grothendieck [3], alla categoria $\mathcal{D}$ degli spazi compatti con punto base e applicazioni continue conservanti il punto base [1]).

È possibile definire l'omotopia tra mappe di $\mathcal{C}$, restando sempre nella categoria $\mathcal{C}$. Infatti se X è un elemento di $\mathcal{C}$, I l'intervallo chiuso $\underset{0}{\vert}\!\!-\!\!-\!\!\underset{1}{\vert}$, $X \times I$ è ancora uno spazio di Hausdorff, inoltre le inclusioni $m_t : X \longrightarrow X \times I, m_t(x) = x \times t, \ 0 \leq t \leq 1$ sono applicazioni continue proprie.

Def. I. Date due mappe $f: X \longrightarrow Y$, $g: X \longrightarrow Y$, diremo che f è omotopa a g, $f \backsim g$, se esiste una mappa $h: X \times I \longrightarrow Y$, $h \in \mathcal{C}$,

---

[1]) Consideriamo il funtore $F: \mathcal{C}' \to \mathcal{D}$ che sugli oggetti opera come la compattificazione mediante un punto, assunto come punto base e sulle mappe $f: X \to Y$ in modo tale che $F(f)$ coincida con f dove f è definita e muti ogni altro punto di $F(X)$ nel punto base di $F(Y)$ F ammette un aggiunto (a destra e a sinistra) G, ed F, G costituiscono un'equivalenza tra le dette categorie (Cfr. [3] pag. 125).

tale che il diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "m_1"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \times I \arrow[r, "h"] & Y \\ X \arrow[u, "m_0"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

sia commutativo [2]).

Se con $H^p(X)$ si indica il p-mo gruppo di coomologia di Alexander Spanier (a valori in $\mathbb{Z}$) a supporti compatti, di X, H^p risulta essere un funtore controvariante della categoria $\mathcal{C}$ nella categoria dei gruppi abeliani. Infatti dato un aperto U di X, si ha un morfismo canonico $r_U^*: H^p(U) \longrightarrow H^p(X)$ che si deduce dalla sequenza esatta di coomologia associata al sottospazio chiuso $A = X - U$. Tale sequenza esatta si può d'altronde pensare associata alla sequenza « standard » $A \overset{\text{incl}}{\longrightarrow} X \overset{r_U}{\longrightarrow} U$ (cfr. [2] pag. 189 e seg.). Il morfismo r_U^* è quello indotto dalla restrizione r_U e in virtù dell'Oss. 1 è ovvio il significato di morfismo indotto da una mappa di $\mathcal{C}$.

Sia X uno spazio di Hausdorff $\mathcal{M}_X$ l'insieme delle coppie di aperti disgiunti (U, V), $U \subset X$, $V \subset X$, parzialmente ordinato dalla relazione d'ordine: $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2)$ se e solo se $U_1 \subset U_2$ e $V_1 \subset V_2$.

Si consideri per ogni coppia di aperti disgiunti (U, V) di X $H^p(U) \otimes H^q(V)$ (p, q interi fissati). Date due coppie di aperti disgiunti $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2)$ la restrizione di U_2 ad U_1 e quella di V_2 a V_1 inducono un omomorfismo $H^p(U_1) \otimes H^q(V_1) \longrightarrow H^p(U_2) \otimes \otimes H^q(V_2)$. I gruppi $H^p(U) \otimes H^q(V)$ costituiscono pertanto un sistema diretto di gruppi sopra $\mathcal{M}_X$ [3]), che chiameremo $\mathcal{S}^{p,q}(X)$. Per ogni coppia di interi p, q definiamo il gruppo di allacciamento $\mathcal{L}^{p,q}(X)$ ponendo

$$\mathcal{L}^{p,q}(X) = \varinjlim \mathcal{S}^{p,q}(X)$$

---

[2]) Identificando le due categorie $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}$ questa definizione di omotopia in $\mathcal{C}'$, corrisponde a quella comunemente assunta preservante il punto base.

[3]) $\mathcal{M}_X$ non è un sistema filtrante se X non è vuoto.

TEOREMA 1. *$\mathcal{L}^{p,q}$ è un funtore controvariante dalla categoria $\mathcal{C}$ alla categoria dei gruppi.*

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua propria tra gli spazi di Hausdorff X ed Y. Se U, V sono aperti disgiunti di Y, $U' = f^{-1}(U)$ e $V' = f^{-1}(V)$ sono aperti disgiunti di X, non solo ma un elemento $[\zeta^p] \otimes [\eta^q]$ di $H^p(U) \otimes H^q(V)$ è trasformato dalla applicazione indotta in coomologia in $f^*[\zeta^p] \otimes f^*[\eta^q]$ vale a dire un elemento di $H^p(U') \otimes H^q(V')$ [4].

Inoltre se $(U_1, V_1) \leq (U_2, V_2)$ sono due coppie di $\mathcal{M}_Y$ il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} H^p(U_1) \otimes H^p(V_1) \arrow[r] \arrow[d, "f^{*p} \otimes f^{*q}"'] & H^p(U_2) \otimes H^q(V_2) \arrow[d, "f^{*p} \otimes f^{*q}"] \\ H^p(U_1') \otimes H^q(V_1') \arrow[r] & H^p(U_2') \otimes H^q(V_2') \end{tikzcd}$$

dove le mappe orizzontali sono quelle indotte in coomologia dalle restrizioni $U_2 \to U_1$, $V_2 \to V_1$, etc. è commutativo. Potremo dire pertanto che la mappa $f: X \to Y$ induce un morfismo tra i limiti diretti $f^{\#}: \mathcal{L}^{p,q}(Y) \to \mathcal{L}^{p,q}(X)$. È chiaro che se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ sono due mappe consecutive della categoria $\mathcal{C}$ allora $(g \circ f)^{\#} = f^{\#} \circ g^{\#}$ e che, per ogni oggetto X di $\mathcal{C}$, l'identità i_X induce l'omomorfismo identico in $\mathcal{L}^{p,q}(X)$. Il carattere funtoriale dei gruppi di allacciamento resta così provato.

TEOREMA II. *Il funtore $\mathcal{L}^{p,q}$ soddisfa all'assioma di omotopia, vale a dire se m_0, $m_1: X \to X \times I$ sono definite da $m_0(x) = (x, 0)$, $m_1(x) = (x, 1)$, allora $m_0^{\#} = m_1^{\#}$.*

Di qui segue ovviamente il seguente

COROLLARIO: *Se $f, g: X \to Y$ sono omotope allora*

$$f^{\#} = g^{\#}$$

---

[4]) I supporti di $f^*[\zeta^p]$ ed $f^*[\eta^q]$ sono compatti in quanto f è propria, inoltre sono contenuti rispettivamente in U' e V'.

Per la dimostrazione del teorema II ci serviremo del seguente lemma di carattere topologico:

LEMMA I: *Sia X uno spazio di Hausdorff, $X \times I$ il prisma sopra X, K e K' due compatti disgiunti di $X \times I$. Esiste una suddivisione di $I = \underset{0}{|}\!\!-\!\!\underset{1}{|}$; $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$, tale che, detto I_i l'intervallo $\underset{t_{i-1}}{|}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\underset{t_i}{|}$, i compatti $K \cap X \times I_i$ e $K' \cap X \times I_i$ siano contenuti in aperti prismatici (del tipo cioè $A \times I$ con A aperto di X) disgiunti.*

Per la compattezza di I basterà provare che, per ogni $x_0 \in I$, è possibile trovare un intervallo chiuso I_{x_0}, contenente x_0 come punto interno (nella topologia di I), e tale che $K \cap X \times I_{x_0}$ e $K' \cap X \times I_{x_0}$ siano contenuti in aperti prismatici disgiunti.

Si consideri la successione di intervalli $\Delta_n = \left\{ x \in I \,\middle|\, |x - x_0| \leq \frac{1}{n} \right\}$ e le due successioni decrescenti di compatti:

$$K_n = \pi (K \cap X \times \Delta_n)$$

$$K'_n = \pi (K' \cap X \times \Delta_n)$$

dove π è la proiezione di $X \times I$ sulla base X.

La successione decrescente (in n) di compatti $K_n \cap K'_n$ ha intersezione vuota in quanto

$$\bigcap_n (K_n \cap K'_n) = \pi [(K \cap X \times x_0) \cap (K' \cap X \times x_0)] = \varnothing ,$$

quindi, per n abbastanza grande

$$K_n \cap K'_n = \varnothing .$$

In tal caso l'intervallo Δ_n soddisfa ai requisiti voluti per I_{x_0}. Infatti K_n e K'_n, come compatti disgiunti di uno spazio di Hausdorff, possono essere separati da due aperti disgiunti U e V, $U \supset K_n$ e $V \supset K'_n$, di X, e gli aperti prismatici $U \times I$ e $V \times I$ contengono rispettivamente $K \cap X \times \Delta_n$ e $K' \cap X \times \Delta_n$.

OSS. II. Sia (ζ^p, η^q) una coppia di cocicli di X a supporti compatti K e K' disgiunti. Considero dne aperti U, V, $U \supset K$ e $V \supset K'$, disgiunti; la classe di coomologia di ζ^p in U e quella di η^q in V individuano un elemento del limite $\mathcal{L}^{p,q}(X)$. Tale elemento non dipende dalla scelta della coppia di aperti U, V. Potremo affermare in questo senso che le coppie di cocicli (ζ^p, η^q) a supporti compatti disgiunti generano $\mathcal{L}^{p,q}(X)$. Indichiamo con $Z^{p,q}(X)$ il sottogruppo di $Z^p(X) \otimes Z^q(X)$ ($Z^p(X)$, $Z^q(X)$ cocicli a supporti compatti dello spazio X) generato dai prodotti $\zeta^p \otimes \eta^q$, con ζ^p ed η^q cocicli a supporti disgiunti. Si ha un epimorfismo $\Phi_X : Z^{p,q}(X) \to \mathcal{L}^{p,q}(X)$. Si noti che $Z^{p,q}$ è un funtore controvariante in $\mathcal{C}$ e Φ è una trasformazione naturale di funtori in quanto è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} Z^{p,q}(Y) & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z^{p,q}(X) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_Y} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_X} \\ \mathcal{L}^{p,q}(Y) & \xrightarrow{f^\#} & \mathcal{L}^{p,q}(X) \end{array}$$

essendo f una mappa di X in Y ed $\tilde{f} = Z^{p,q}(f)$.

Per dimostrare il teorema II basterà provare che $\Phi_X \circ \tilde{m}_0 = \Phi_X \circ \tilde{m}_1$. Dati due cocicli ζ^p, η^q di $X \times I$ a supporti compatti disgiunti, si consideri la suddivisione di I, $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_n = 1$, di cui al lemma I relativa ai compatti K e K', e siano $U_i \times I$ e $V_i \times I$ gli aperti prismatici disgiunti contenenti rispettivamente $K \cap X \times I_i$ e $K' \cap X \times I_i$

$$\Phi_X(\tilde{m}_{i-1}\zeta^p \otimes \tilde{m}_{i-1}\eta^q) = \Phi_X(\tilde{m}_i \zeta^p \otimes \tilde{m}_i \eta^q),$$

in quanto $\tilde{m}_{i-1}\zeta^p$ è omologo in U_i a $\tilde{m}_i\zeta^p$, e $\tilde{m}_{i-1}\eta^q$ è omologo in V_i a $\tilde{m}_i\eta^q$.

Da ciò discende in maniera ovvia la conclusione voluta.

2. $\mathbb{R}^n$ indichi lo spazio numerico n-dimensionale. Si prova il seguente :

TEOREMA III. *Se* $n > 1$ *allora*:

$$\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z} \quad \text{per} \quad p + q = n + 1 \qquad p > 0,\ q > 0$$

oppure

$$\text{per} \quad p = q = n$$

$$\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = 0 \quad \text{per} \quad p + q > n + 1 \quad (p, q) \neq (n, n)$$ [5].

Alcune premesse. Indicheremo con $K(X)$ il complesso delle cocatene di Alexander-Spanier dello spazio X, a supporti compatti e a coefficienti nell'anello $\mathbb{Z}$ [6].

Sia $\mathbb{R}$ la retta reale $\alpha \in \mathbb{R}$, φ^0_α la 0-cocatena funzione caratteristica della semiretta $\underset{-\infty \quad \alpha}{\longmapsto\!\!|}$, $\delta\varphi^0_\alpha$ è un 1-cociclo φ^1_α, a supporto compatto α, che si può pensare associato al punto α di $\mathbb{R}$. Ad un intervallo $\underset{\alpha \quad \beta}{|\!\!-\!\!-\!\!|}$ si associ la 0-cocatena, a supporto $\underset{\alpha \quad \beta}{|\!\!-\!\!-\!\!|}$, $\varphi^0_\beta - \varphi^0_\alpha$ che indichiamo con $\varphi^0_{\underset{\alpha \quad \beta}{|\!\!-\!\!-\!\!|}}$.

Dato il numero reale positivo, ε, siano Δ_ε, Δ'_ε le suddivisioni di $\mathbb{R}$ ottenute rispettivamente mediante i punti della forma $2k\varepsilon$ e $(2k + 1)\varepsilon$ $(k \in \mathbb{Z})$. Chiamiamo cocatene di classe pari (relative al numero ε) quelle del tipo $\varphi^0_{\underset{2k\varepsilon \quad (2k+2)\varepsilon}{|\!\!-\!\!-\!\!|}}$, $\varphi^1_{2k\varepsilon}$, cocatene di classe dispari quelle di tipo $\varphi^0_{\underset{(2k+1)\varepsilon \quad (2k+3)\varepsilon}{|\!\!-\!\!-\!\!|}}$, $\varphi^1_{(2k+1)\varepsilon}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Indichiamo con $K_\varepsilon(\mathbb{R})$, $K'_\varepsilon(\mathbb{R})$, i sottocomplessi di $K(\mathbb{R})$ generati rispettivamente dalle cocatene di classe pari e di classe dispari. Se U è un aperto di $\mathbb{R}^n$, $K_\varepsilon(U)$, $(K'_\varepsilon(U))$, sia il sottocomplesso di $K(\mathbb{R}^n)$ generato da prodotti cartesiani di n cocatene di $K_\varepsilon(\mathbb{R})$, (di $K'_\varepsilon(\mathbb{R})$), aventi supporto in U.

OSS. III. I supporti dei generatori di $K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$, $(K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n))$, sono prodotti di punti per intervalli di Δ_ε (Δ'_ε).

---

[5]) E' presumibile che $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sia nullo in tutti i casi non contemplati ma il problema rimane aperto.

[6]) Quanto segue resta valido se, in luogo di $\mathbb{Z}$, si prende come anello dei coefficienti un anello principale A.

Oss. IV. Siano $c^p \in K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ e $c'^q \in K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ due cocatene di rispettive dimensioni p e q, se $p + q \geq n + 1$ i supporti di c^p e c'^q sono disgiunti.

Oss. V. Si noti che $K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$ si può pensare come il prodotto tensoriale :

$$\underbrace{K_\varepsilon(\mathbb{R}) \otimes K_\varepsilon(\mathbb{R}) \otimes \dots \otimes K_\varepsilon(\mathbb{R})}_{n \text{ volte}}$$

Pertanto da $H^1(K_\varepsilon(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}$, $H^0(K_\varepsilon(\mathbb{R}) = 0$, e della formula di Künneth si deduce che:

$$H^q(K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)) = 0 \quad \text{per} \quad q \neq n, \quad H^n(K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z} .$$

Analogamente :

$$H^q(K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n)) = 0 \quad \text{per} \ q \neq n, \quad H^n(K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n)) = \mathbb{Z} .$$

Def. II. Chiameremo *elementari* le cocatene di $K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$, $(K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n))$ a supporti intervalli della suddivisione indotta in $\mathbb{R}^n$ da Δ_ε, (Δ'_ε). *Cocicli elementari* saranno detti i bordi di cocatene *elementari* o le n-cocatene elementari (che sono cocicli in $\mathbb{R}^n$).

L'Osservazione V comporta in particolare che ogni cociclo p-dimensionale, $0 < p \leq n$, $\zeta^p \in K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$, $(K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n))$, è una combinazione lineare $\sum_i \lambda_i \sigma_i^p$ di *cocicli elementari.*

Def. III. Chiamiamo aperti di classe pari in $\mathbb{R}^n$ (di classe dispari) quelli ottenuti prendendo l'interno della chiusura dell'unione di intervalli della reticolazione indotta in $\mathbb{R}^n$ da $\Delta_\varepsilon(\Delta'_\varepsilon)$.

Dato un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, indicheremo con U_ε, (U'_ε), il massimo aperto di classe pari (di classe dispari) contenuto in U.

LEMMA II [7]. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$. Si ha allora che:

$$H^q(K_\varepsilon(U'_\varepsilon)) = H^q(K(U'_\varepsilon)) = H^q(U'_\varepsilon)$$

$$H^q(K'_\varepsilon(U_\varepsilon)) = H^q(K(U_\varepsilon)) = H^q(U_\varepsilon).$$

Dimostrazione del teorema III.

Siano ζ^p, η^q, $p > 0$ e $q > 0$, due cocicli a supporti compatti, Σ e Σ_1, contenuti rispettivamente negli aperti disgiunti di $\mathbb{R}^n$, U, V, e si scelga il numero positivo ε in modo che: $U \supset U'_\varepsilon \supset \Sigma$ e $V \supset V_\varepsilon \supset \Sigma_1$.

Poichè $H^p(U'_\varepsilon) = H^p K_\varepsilon(U'_\varepsilon)$, ζ^p risulta omologo in U'_ε ad un cociclo di $K_\varepsilon(U'_\varepsilon)$, pertanto, per l'osservazione V:

$$\zeta^p \backsim \sum_i \lambda_i \sigma_i^p$$

dove i σ_i^p sono *cocicli elementari* di $K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$.

Analogamente η^q è omologo in V_ε ad un cociclo di $K'_\varepsilon(V_\varepsilon)$ e, sempre per l'osservazione V:

$$\eta^q \backsim \sum_j \mu_j \sigma_j'^q$$

dove i $\sigma_j'^q$ sono cocicli elementari di $K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$.

---

[7] Il lemma si può dedurre da noti teoremi di approssimazione simpliciale. Ne riassumerò tuttavia in brevi cenni una dimostrazione abbastanza semplice. Si consideri la seguente filtrazione di U'_ε

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_i \subset \dots \subset X_n = U'_\varepsilon$$

dove X_i è l'intersezione con U'_ε dell'i-mo scheletro della suddivisione di $\mathbb{R}^n$ indotta dalla suddivisione Δ_ε di $\mathbb{R}$. Il termine $E_1^{p,q}$ della sequenza spettrale relativa alla filtrazione considerata è uguale ad $H^{p+q}(X_p - X_{p-1})$, pertanto $E_1^{p,q} = 0$ se $q \neq 0$ $E_1^{p,0} = H^p(X_p - X_{p-1}) = (K_\varepsilon^p(U'_\varepsilon))$. Si tratta dunque di una sequenza spettrale degenere in cui il termine E_2 eguaglia il limite, cioè $E_2^{p,0} = H^p(K(U'_\varepsilon))$, d'altra parte $E_2^{p,0} = H^p(K_\varepsilon(U'_\varepsilon))$ c.v.d.

Se $p+q \geq n+1$ le coppie di cocicli $(\sigma_i^p, \sigma_j'^q)$ sono tutte a supporti disgiunti (Oss. IV) pertanto

$$\zeta^p \otimes \eta^q \quad \text{e} \quad \sum_i \lambda_i \sigma_i^p \otimes \sum_j \mu_j \sigma_j'^q = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \sigma_i^p \otimes \sigma_j'^q$$

sono portati dall'omomorfismo $\Phi_{\mathbb{R}^n}$ nello stesso elemento di $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. (Cfr. Oss. II).

Se ne deduce che per $p+q \geq n+1$, p e q diversi da 0, $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}_n)$ è generato dagli elementi della forma $\Phi_{\mathbb{R}^n}(\sigma^p \otimes \sigma'^q)$ con $\sigma^p \in K_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$, $\sigma'^q \in K'_\varepsilon(\mathbb{R}^n)$.

Esaminiamo il caso $p=q=n$. Due coppie di *cocicli elementari*, a supporti disgiunti, individuano, a meno del segno, lo stesso elemento del limite che risulta pertanto un gruppo ad un generatore. D'altronde l'omomorfismo

$$\mu_{\mathbb{R}^n}^{n,n} : \mathcal{L}^{n,n}(\mathbb{R}^n) \to H^n(\mathbb{R}^n) \otimes H^n(\mathbb{R}^n)$$

definito da

$$\mu_{\mathbb{R}^n}^{n,n}(\Phi_{\mathbb{R}^n}(\sigma^n \otimes \sigma'^n)) = [\sigma^n] \otimes [\sigma'^n]$$

dove $[\sigma^n]$ e $[\sigma'^n]$ sono le classi di coomologia in $\mathbb{R}^n$ di σ^n e σ'^n rispettivamente, manda un generatore di $\mathcal{L}^{n,n}(\mathbb{R}^n)$ in un generatore di $H^n(\mathbb{R}^n) \otimes H^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$ e pertanto

$$\mathcal{L}^{n,n}(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n) \otimes H^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}\,.$$

Esaminiamo ora il caso $p+q > n+1$, $(p, q) \neq (n, n)$. Le coppie di *cocicli elementari* (σ^p, σ'^q) che « generano » $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sono tali che il supporto dell'uno non interseca la cocatena di cui l'altro è bordo, pertanto individuano tutte l'elemento nullo ed $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = 0$.

Per $p+q = n+1$, $p > 0$ e $q > 0$, uno dei due indici p, q è diverso da n; potremo supporre $p \neq n$ [8]). Le coppie (σ^p, σ'^q) si di-

[8]) Il gruppo di allacciamento $\mathcal{L}^{p,q}(X)$ di uno spazio di Hausdorff X, è isomorfo al gruppo $\mathcal{L}^{q,p}(X)$.

stribuiscono in due classi: quelle per cui il supporto di σ'^q non interseca il supporto della $p-1$-cocatena elementare di cui σ^p è bordo e che al limite si annullano, e quelle per cui il supporto di σ'^q interseca il supporto della $p-1$-cocatena elementare di cui σ^p è bordo e che individuano, a meno del segno, lo stesso elemento del limite. Pertanto $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ è, nel caso $p+q=n+1$, $0<p<n$, un gruppo ad un generatore. D'altronde si definisce un omomorfismo

$$\nu^{p,q}_{\mathbb{R}^n}: \mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n)$$

ponendo

$$\nu^{p,q}_{\mathbb{R}^n}(\Phi_{\mathbb{R}^n}(\sigma^p \otimes \sigma'^q)) = [c^{p-1} \cup \sigma'^q]$$

dove c^{p-1} è la cocatena *elementare* di cui σ^p è bordo e $[c^{p-1} \cup \sigma'^q]$ la classe di coomologia di $c^{p-1} \cup \sigma'^q$.

Ora se il supporto di σ'^q interseca il supporto di c^{p-1}, $c^{p-1} \cup \sigma'^q$ è un n-cociclo a supporto puntiforme che individua un generatore di $H^n(\mathbb{R}^n)$. Pertanto $\nu^{p,q}_{\mathbb{R}^n}$ è un isomorfismo: $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) = H^n(\mathbb{R}^n) = \mathbb{Z}$.

Infine i gruppi $\mathcal{L}^{p,0}(\mathbb{R}^n)$ ed $\mathcal{L}^{0,q}(\mathbb{R}^n)$ sono nulli perchè $H^0(U)=0$ per ogni aperto U di $\mathbb{R}^n$.

Il teorema III resta così provato.

3. Se X è uno spazio di Hausdorff, per ogni coppia di indici p, q si ha un omomorfismo

$$\mu^{p,q}_X : \mathcal{L}^{p,q}(X) \longrightarrow H^p(X) \otimes H^q(X)$$

definito da:

$$\mu^{p,q}_X(\Phi_X(\zeta^p \otimes \eta^q)) = [\zeta^p] \otimes [\eta^q]$$

dove $[\zeta^p], [\eta^q]$ sono le classi di coomologia di X individuate dai cocicli ζ^p, η^q.

È chiaro che se $f: X \longrightarrow Y$ è una mappa della categoria $\mathcal{C}$ il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{p,q}(Y) \arrow[r, "f^{\#}"] \arrow[d, "\mu^{p,q}_Y"'] & \mathcal{L}^{p,q}(X) \arrow[d, "\mu^{p,q}_X"] \\
H^p(Y) \otimes H^q(Y) \arrow[r, "f^* \otimes f^*"] & H^p(X) \otimes H^q(X)
\end{tikzcd}$$

è commutativo, vale a dire $\mu^{p,q}$ è una trasformazione naturale di funtori nella categoria $\mathcal{C}$.

Oss. VI. Dai risultati del n.^{0} 2 si deduce che

$$\mu^{p,q}_{\mathbb{R}^n} : \mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^p(\mathbb{R}^n) \otimes H^q(\mathbb{R}^n)$$

è isomorfismo per $p = q = n$, è l'omomorfismo nullo in ogni altro caso.

Indicheremo con $\mathcal{C}_{p,q}$ la sottocategoria piena di $\mathcal{C}$ costituita da spazi $p, p-1$ e $q, q-1$ aciclici, aventi cioè coomologia nulla nelle dimensioni $p, p-1, q, q-1$. Definiamo in $\mathcal{C}_{p,q}$ una trasformazione naturale di funtori $\nu^{p,q} : \mathcal{L}^{p,q} \longrightarrow H^{p+q-1}$. Sia X un elemento di $\mathcal{C}_{p,q}$, U un aperto di X, la sequenza esatta di coomologia della coppia $(X, X-U)$ (Cfr. [2] pag. 189 e seg.) fornisce due isomorfismi:

$$\sigma_U : H^p(U) = H^{p-1}(X-U)$$
$$\tau_U : H^q(U) = H^{q-1}(X-U).$$

Se U, V è una coppia di aperti disgiunti di X il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
H^p(U)\otimes H^q(V) \arrow[r, "\sigma_U\otimes id"] \arrow[dd, "(-1)^{pq}\varkappa"] & H^{p-1}(X-U)\otimes H^q(V) \arrow[r, "\smile"] & H^{p+q-1}(V) \arrow[dr] & \\
& & & H^{p+q-1}(X) \\
H^q(V)\otimes H^p(U) \arrow[r, "\tau_V\otimes id"] & H^{q-1}(X-V)\otimes H^p(U) \arrow[r, "\smile"] & H^{p+q-1}(U) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$\varkappa$ essendo l'isomorfismo di scambio dei fattori nel prodotto tensoriale, è commutativo.

Passando al limite diretto si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{p,q}(X) \arrow[dr, "\nu^{p,q}"] \arrow[dd, "(-1)^{pq}\varkappa"'] & \\
& H^{p+q-1}(X) \\
\mathcal{L}^{q,p}(X) \arrow[ur, "\bar{\nu}^{p,q}"'] &
\end{tikzcd}$$

formato da morfismi naturali nella categoria $\mathcal{C}_{p,q}$.

Oss. VIII. In base ai risultati del n^0 2 possiamo affermare che $\nu^{p,q}_{\mathbb{R}^n}$ è isomorfismo se p e q sono entrambi positivi e $p+q=n+1$, ed è nullo in ogni altro caso in cui sia definito.

4. Calcolo dei gruppi di allacciamento di varietà orientabili.

W sia una varietà connessa orientabile di dimensione n.

Fissata un'orientazione su W, per ogni aperto $U \subset W$, resta determinato l'isomorfismo di dualità di Poincaré associato a detta orientazione, $H^p(U) = H_{n-p}(U)$, dove l'omologia è quella singolare.

Inoltre se U_1, U_2 sono due aperti di W ed $U_1 \subset U_2$, è commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} H^p(U_1) \arrow[r] \arrow[d, "\parallel"] & H^p(U_2) \arrow[d, "\parallel"] \\ H_{n-p}(U_1) \arrow[r] & H_{n-p}(U_2) \end{tikzcd}$$

in cui le frecce verticali sono isomorfismi di dualità e le orizzontali omomorfismi indotti in omologia e coomologia dalle mappe di inclusione e restrizione rispettivamente.

$\mathcal{L}^{p,q}(W)$ si presenta anche come limite diretto del sistema di gruppi su $\mathcal{M}_W$ (insieme parzialmente ordinato delle coppie di aperti disgiunti di W) $H_{n-p}(U) \otimes H_{n-q}(V)$, $(U, V) \in \mathcal{M}_W$ e potremo concludere, in analogia a quanto affermato nella Osservazione II del n^0 1 che:

Oss. IX. $\mathcal{L}^{p,q}(W)$ è generato dalle immagini di coppie di cicli singolari $(\zeta_{n-p}, \eta_{n-q})$ a supporti disgiunti.

Indicato con $Z_{n-p,\,n-q}(W)$ il sottogruppo di $Z_{n-p}(W) \otimes Z_{n-q}(W)$ ($Z_{n-p}(W)$, $Z_{n-q}(W)$ cicli singolari di W) generato dai prodotti $\zeta_{n-p} \otimes \eta_{n-q}$, con ζ_{n-p} ed η_{n-q} cicli a supporti disgiunti, si ha un morfismo suriettivo $\psi_W : Z_{n-p,\,n-q}(W) \to \mathcal{L}^{p,q}(W)$.

Inoltre se $U \subset W$ è un aperto di W, è commutativo il diagramma :

$$\begin{tikzcd} Z_{n-p,\, n-q}(U) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\psi_U"'] & Z_{n-p,\, n-q}(W) \arrow[d, "\psi_W"] \\ \mathcal{L}^{p,\,q}(U) \arrow[r, "r^{\#}"'] & \mathcal{L}^{p,\,q}(W) \end{tikzcd}$$

essendo i l'omomorfismo indotto dall'inclusione $i : U \longrightarrow W$ ed $r^{\#}$ l'omomorfismo indotto dalla restrizione $r : W \longrightarrow U$.

Def. IV. Se W è una varietà n-dimensionale, chiameremo *aperto euclideo* un aperto $U \subset W$ omeomorfo ad $\mathbb{R}^n$; *carta locale* una mappa di W in $\mathbb{R}^n$ composta dalla restrizione di W ad un aperto euclideo U e da un omeomorfismo di U in $\mathbb{R}^n$.

Lemma III. *Le carte locali di W si distribuiscono in due classi di omotopia. Più precisamente due carte locali φ, ψ sono omotope se e solo se $\varphi^* = \psi^*$ $(\varphi^*, \psi^* : H^n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^n(W))$.*

Siano $\varphi, \psi : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ due carte locali, allora può porsi $\varphi = r_U \circ h$, $\psi = r_V \circ k$ dove r_U ed r_V sono le restrizioni agli aperti euclidei U e V, h e k omeomorfismi.

Nel caso in cui $U \supset V$ resta individuato il diagramma commutativo :

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varrho"] & \mathbb{R}^n \arrow[d, "k \circ \varrho \circ h^{-1}"] \\ W \arrow[ur, "r_U"] \arrow[dr, "r_V"'] & & \\ & V \arrow[r, "k"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

in cui ϱ è la restrizione e $k \circ \varrho \circ h^{-1}$ è una mappa di $\mathbb{R}^n$, in sè definita nell'aperto euclideo $k(V)$. $k \circ \varrho \circ h^{-1}$ è una mappa di grado ± 1 (9).

(9) Ciò in virtù dell'equivalenza conservante l'omotopia delle categorie $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}$ e dal teorema di classificazione di Hopf.

Si ha la seguente catena di equivalenze immediate:

$$\varphi \sim \psi <==> (k \circ \varrho \circ h^{-1}) \sim \text{identità in } \mathbb{R}^n <==>$$

$$<==> (k \circ \varrho \circ h^{-1})^* : H^n(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^n(\mathbb{R}^n) \text{ isomorfismo identico}$$

$$<==> \varrho^* \circ k^* = h^* <==> r_U^* \circ \varrho^* \circ k^* = r_U^* \circ h^* \text{ cioè } \psi^* = \varphi^*.$$

Se U e V non sono in relazione di inclusione, essendo V connessa, basterà scegliere una catena di carte $\varphi = \varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_n = \psi$ tali che due consecutive siano definite in aperti euclidei che si trovano nella relazione di inclusione. Con ciò si perviene facilmente all'asserto.

LEMMA IV. *Se W è una varietà connessa, compatta, triangolabile, orientabile, di dimensione n, se inoltre si ha $H^p(W) = 0 = H^q(W)$ e $p + q \geq n + 1$, allora l'omomorfismo $\varphi^\# : \mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{L}^{p,q}(W)$ indotto da una carta locale, $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è suriettivo.*

È noto che da una triangolazione della varietà W si possono ottenere due decomposizioni in celle di W, *duali* nel senso di Seifert (cfr. [3] pag. 301 e seg.). Ricordiamo che, se a^h e b^k sono due celle di dimensioni h e k, e appartenenti rispettivamente a suddivisioni duali la loro intersezione o è vuota o è una cella di dimensione $h + k - n$. Supporremo W triangolata in modo tale che, per le suddivisioni duali, Δ e Δ', che se ne deducono valga la seguente proprietà: due celle a^h e b^k di Δ e Δ' rispettivamente, a intersezione non vuota, appartengono ad un medesimo aperto euclideo di W.

Sia $\alpha \in \mathcal{L}^{p,q}(W)$, $\alpha = \psi_W(\zeta_{n-p} \otimes \eta_{n-q})$ dove ζ_{n-p}, η_{n-q} sono cicli singolari a supporti i compatti disgiunti K e K'. Se la triangolazione di W è abbastanza fine potremo separare K e K' mediante due aperti $U_{\Delta'} \supset K$ e $V_\Delta \supset K'$ $U_{\Delta'} \cap V_\Delta = \emptyset$, $U_{\Delta'}, (V_\Delta)$, essendo l'interno della chiusura di un'unione finita di celle di $\Delta', (\Delta)$. Si prova con argomenti analoghi a quelli usati nel n° 2 che:

$$\zeta_{n-p} \sim \sum_i \lambda_i \sigma^i_{n-p} \text{ in } U_{\Delta'}$$

(σ^i_{n-p} cicli *elementari* di Δ, bordi cioè di celle di dimensione $n-p+1$ di Δ, ciò in virtù dell'ipotesi $H_{n-p}(W)=0$) e che

$$\eta_{n-q} = \sum_j \mu_j \sigma'^j_{n-q} \qquad \text{in } V_\Delta$$

(σ'^j_{n-q} cicli *elementari* di Δ').

Essendo per ipotesi $p+q \geq n+1$, le coppie di cocicli (σ^i_{n-p}, σ'^j_{n-q}) sono a supporti disgiunti e

$$\alpha = \psi_W(\zeta_{n-p} \otimes \eta_{n-q}) = \psi_W(\sum_{ij} \lambda_i \mu_j \sigma^i_{n-p} \otimes \sigma'^j_{n-q}) =$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \psi_W(\sigma^i_{n-p} \otimes \sigma'^j_{n-q}).$$

Ora $\psi_W(\sigma_{n-p} \otimes \sigma'_{n-q})$ è un elemento non nullo di $\mathcal{L}^{p,q}(W)$ soltanto se σ'_{n-q} interseca la cella di cui σ_{n-p} è bordo, quindi soltanto se i supporti di σ_{n-p} e σ'_{n-q} sono contenuti in un medesimo aperto euclideo U di W.

Pertanto un sistema di generatori di $\mathcal{L}^{p,q}(W)$ è dato dalle immagini di coppie di cicli $(\sigma_{n-p}, \sigma'_{n-q})$ con σ_{n-p}, σ'_{n-q} cicli elementari (di suddivisioni cellulari duali Δ e Δ') aventi i supporti contenuti in un medesimo aperto euclideo.

In base al diagramma dell'Osservazione IX si conclude che $\mathcal{L}^{p,q}(W)$ è generato dalle immagini di $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ mediante carte locali. È sufficiente anzi considerare le immagini di $\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ mediante carte locali appartenenti ad una stessa classe di omotopia, per ottenere un sistema di generatori di $\mathcal{L}^{p,q}(W)$. Di qui e dalla invarianza omotopica del funtore $\mathcal{L}^{p,q}$ si trae la conclusione voluta.

Siamo ora in grado di provare il seguente

Teorema IV. *Se W è una varietà connessa, compatta, triangolabile ed orientabile di* $\dim n\,(n>1)$ [10]) *allora:*

i) $\mathcal{L}^{p,q}(W) = 0$ *per ogni coppia di indici p, q per cui $H^p(W)=0=H^q(W)$, e tali che $p+q>n+1$*

---

10) Nel caso $n=1$ la varietà W si riduce ad una circonferenza. Si può dimostrare direttamente che $\mathcal{L}^{1,1}(S^1) = \mathbb{Z}$ mentre $\mathcal{L}^{1,1}(\mathbb{R}^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

ii) $\mathcal{L}^{p,0}(W) = 0$ *per ogni* p.

iii) $\mathcal{L}^{n,n}(W) = \mathbf{Z}$.

Infine se W *è* p *e* $p-1$ *aciclica e* q *e* $q-1$ *aciclica e* $p+q = n+1$.

iiii) $\mathcal{L}^{p,q}(W) = \mathbf{Z}$

i) è corollario immediato del lemma IV e dei risultati del n⁰ 2.

ii) segue dal fatto che $H^p(U) = 0$ per ogni aperto U di W

iii) si prova osservando che due coppie di 0-cicli a indice di Kronecker 1 e a supporti puntiformi disgiunti generano lo stesso elemento del limite e che l'omomorfismo:

$$\mu_W^{n,n} : \mathcal{L}^{n,n}(W) \longrightarrow H^n(W) \otimes H^n(W)$$

è un isomorfismo.

Quanto a iiii) basta considerare il diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^{p,q}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "h^\#"] \arrow[d, "\nu_{\mathbb{R}^n}^{p,q}"'] & \mathcal{L}^{p,q}(W) \arrow[d, "\nu_W^{p,q}"] \\
H^{p+q-1}(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "h^*"] & H^{p+q-1}(W)
\end{tikzcd}$$

dove $h : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è una carta locale e in cui $\nu_{\mathbb{R}^n}^{p,q}$ ed h^* sono isomorfismi ed $h^\#$ è suriettivo per dedurre che $h^\#$ e $\nu_W^{p,q}$ sono isomorfismi.

5. L'invariante di Hopf come omomorfismo $\mathcal{L}^{n,n}(S^n) \longrightarrow \mathcal{L}^{n,n}(S^{2n-1})$.

Sia $f : S^{2n-1} \longrightarrow S^n$ un'applicazione continua della sfera S^{2n-1} nella sfera S^n.

L'invariante di Hopf (cfr. [4] pag. 379) si può interpretare come il morfismo $\varphi : H^n(S^n) \otimes H^n(S^n) \longrightarrow H^{2n-1}(S^{2n-1})$, individuato dalla seguente costruzione: si prendono due n-cocicli a, b a supporti disgiunti (è possibile supporli puntiformi) in S^n e si considerano i cocicli trasformati $\tilde{f}(a), \tilde{f}(b)$, questi essendo bordi saranno della forma:

$$\tilde{f}(a) = \delta a' , \tilde{f}(b) = \delta b'$$

(a' e b') cocatene $n-1$ dimensionali di $K(S^{2n-1})$.

Il cociclo $a' \cup \tilde{f}(b)$ è omologo a $\tilde{f}(a) \cup b'$, e si pone allora:

$$\varphi([a] \otimes [b]) = [a' \cup \tilde{f}(b)] = [\tilde{f}(a) \cup b']$$

(le parentesi [ ] significano classe di coomologia).

Poichè φ è un morfismo tra gruppi liberi resta individuato l'invariante di Hopf numerico, qualora si fissi un'orientazione su S^{2n-1} e su S^n e l'invariante non dipende da quest'ultima. In questo senso si può dire che l'invariante di Hopf resta individuato anche dal morfismo:

$$f^{\#} : \mathcal{L}^{n,n}(S^n) \longrightarrow \mathcal{L}^{n,n}(S^{2n-1})$$

in quanto φ non è altro che la composizione dei morfismi

$$H^n(S^n) \otimes H^n(S^n) \xrightarrow[=]{\left(\mu_{S^n}^{n,n}\right)^{-1}} \mathcal{L}^{n,n}(S^n) \longrightarrow \mathcal{L}^{n,n}(S^{2n-1}) \xrightarrow[=]{\nu_{S^{2n-1}}^{n,n}} H^{2n-1}(S^{2n-1}).$$

Le note proprietà dell'invariante dl Hopf discendono in maniera del tutto naturale dalle proprietà dei funtori $\mathcal{L}^{p,q}$ che si prestano pertanto ad una generalizzazione della teoria a spazi di Hausdorff qualunque.

BIBLIOGRAFIA

1 HILTON e WYLIE - *Homology Theory* - Cambridge University Press 1960.

2 GODEMENT - *Théorie des Faisceaux* - Hermann 1958.

3 GROTHENDIECK - *Sur quelques point d'Algebre Homologiques* - Tohoku Math. Journ. 9.

4 SEIFERT e THRELFALL - *Lecciones de Topologia* - Madrid 1951.

Manoscritto pervenuto in redazione il 20 maggio 1967