RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO SALMON

Sulla fattorialità delle algebre graduate e degli anelli locali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 119-138

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__119_0>

SULLA FATTORIALITÀ DELLE ALGEBRE GRADUATE E DEGLI ANELLI LOCALI

PAOLO SALMON *)

Introduzione.

Una redazione provvisoria di questo lavoro era stata fatta stampare a Genova in poche copie nei primi giorni del luglio 1964 (cfr. [9]). Ho atteso molto tempo a presentare il lavoro per la pubblicazione su una rivista, nella speranza di aggiungere qualche complemento ai risultati ottenuti. Tuttavia ho ritenuto opportuno pubblicare a parte il più importante dei due nuovi risultati conseguiti (cfr. [10]), consistente in un controesempio a una congettura di Samuel sulla fattorialità degli anelli locali completi che riproduco solo parzialmente nel presente lavoro: cfr. l'esempio 1 del n^0 4; compare così, in questo lavoro, un unico risultato non incluso nella prima redazione: si tratta precisamente del teorema 3. Per il resto la presente redazione non differisce di molto dalla primitiva; ho tuttavia dovuto tener conto che un risultato relativo agli anelli locali della forma $k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + Y^m)$ (cfr. l'esempio 2 del n^0 4), che allora si presentava con carattere di novità, è ora assorbito dai risultati di Scheja, Brieskorn, ecc. (cfr. [3], [14], [15]).

Nella prima parte di questo lavoro (n^0 2) mi sono proposto di estendere agli anelli fattoriali A, che siano algebre graduate su un corpo oppure anelli locali, la seguente proprietà stabilita in [1] per l'algebra di polinomi $A = k[X_0, X_1, \dots, X_n]$ in $n + 1$ indeterminate:

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Comitato Nazionale per le Scienze Matematiche del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico -Via L. B. Alberti, 4 16132 Genova.

« condizione necessaria e sufficiente perchè una forma irriducibile omogenea di A sia contenuta in un ideale perfetto di altezza 2 non principale modulo f è che f possa scriversi come determinante omogeneo d'ordine $s \geq 2$ ».

La generalizzazione voluta è espressa dal teorema 1, in cui si è inoltre supposto che l'anello fattoriale A sia di Macaulay. Se, tuttavia, si prescinde da questa ipotesi, molte proprietà parziali restano valide, come è stabilito nelle varie proposizioni che precedono l'enunciato del suddetto teorema.

Nel n^0 3 viene indicata una applicazione geometrica del teorema 1, nel caso in cui A sia l'anello delle coordinate di una particolare varietà intersezione completa di uno spazio proiettivo P^n, con $n \geq 4$; in sostanza, si ottiene un'estensione alle varietà intersezione complete di una proprietà stabilita in [1] per le ipersuperficie (cfr. [1], n^0 10). In particolare si verifica che certe varietà intersezioni complete contenenti intersezioni non complete hanno un luogo singolare (di codimensione ≤ 3), come risulta da un noto teorema, stabilito da Lefstchetz sul corpo complesso e generalizzato da Grothendieck ad un corpo di caratteristica qualunque (cfr. [4], Exposés XI e XIII).

Come applicazione del teorema 1 agli anelli locali ho considerato, nel n^0 4, gli anelli del tipo $k[[X, Y, Z]]/(f)$ dove k è un corpo, X, Y, Z sono indeterminate su k e f è della forma $Z^2 + X^3 + F(Y)$ con $F(Y) \in Y k[[Y]]$. Questo tipo di applicazione, che ha permesso di ottenere il già citato controesempio alla fattorialità degli anelli $A[[T]]$, con A completo e fattoriale, può probabilmente essere ancora sfruttato; qui mi son limitato a ritrovare, come esempio, dei risultati stabiliti da Scheja in [14]. La possibilità di ottenere nuovi risultati per gli anelli del tipo suddetto sembra confermata dal teorema 3 del n^0 5 che dà una condizione sufficiente piuttosto significativa perchè un anello $A[[T]]$, con A completo, sia fattoriale.

Nel n^0 6, infine, ho approfondito alcune considerazioni relative ai legami tra fattorialità ed ideali perfetti, fatte da Samuel nella nota [9]. Le mie osservazioni confermano ulteriormente l'esistenza e l'importanza di quei legami, che sono però più riposti di quanto possa apparire a prima vista; in questa direzione restano aperti vari problemi che non appaiono di facile soluzione.

n. 1. Tutti gli anelli che consideriamo sono commutativi e dotati di elemento unità. Supporremo inoltre, per uniformità, che tutti gli anelli in questione siano noetheriani, anche se qualche risultato iniziale (per esempio la proposizione 1) è valido per anelli non noetheriani.

La terminologia concernente le nozioni che occorreranno nel seguito non è, purtroppo, ancora unificata, ed abbiamo perciò ritenuto opportuno richiamare qualche definizione di altri autori accanto a quelle da noi adottate nel presente lavoro.

Diremo che gli elementi $a_1, a_2, \dots, a_m$ di un anello A formano una *A-successione*, se a_i non è divisore delle 0 in $A/(a_1, \dots, a_{i-1})$, per ogni $i\,(1 \leq i \leq m)$.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A, chiameremo *grado* di e lo denoteremo $\mathrm{gr}(\mathfrak{a})$, il massimo numero di elementi di $\mathfrak{a}$ formanti una A-successione. Secondo altre notazioni, usate però in prevalenza per moduli su un anello locale, il grado di $\mathfrak{a}$ si indica con $\mathrm{prof}_{\mathfrak{a}}\, A$ ($\mathfrak{a}$-profondità di A) oppure con $\mathrm{codh}_{\mathfrak{a}}\, A$ ($\mathfrak{a}$-codimensione omologica di A).

Indichiamo con $h(\mathfrak{a})$ l'altezza (o rango) di un ideale $\mathfrak{a}$. Inoltre, se M è un A-modulo, indichiamo con $dh_A(M)$ la dimensione omologica di M su A.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A si ha sempre $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}) \leq dh_A(A/\mathfrak{a})$.

Diremo che l'ideale $\mathfrak{a}$ è *perfetto* se $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}) = dh_A(A/\mathfrak{a})$. Tale definizione posta da Rees in [8] generalizza la classica definizione di Macaulay.

Diremo che A è un anello di *Macaulay* (più propriamente dovremmo dire « localmente di Macaulay »), se sono soddisfatte le proprietà equivalenti :

(*a*) $h(\mathfrak{a}) = \mathrm{gr}(\mathfrak{a})$, per ogni ideale $\mathfrak{a}$ dell'anello A;

(*b*) ogni ideale generato da una A-successione è puro (cioè, i suoi ideali primi minimali hanno la stessa altezza).

Altri autori chiamano gli anelli di Macaulay (locali o meno) nei seguenti altri modi : anelli di Cohen-Macaulay, anelli semiregolari.

Vale questa nota proprietà : in un anello di Macaulay ogni ideale perfetto è puro (cfr. ad es., [8], Theorem 3.2).

Ricordiamo ancora che un anello noetheriano integro A è fattoriale se e solo se ogni ideale primo di altezza 1 di A è principale da ciò segue facilmente che A è fattoriale se e solo se ogni ideale puro di altezza 1 di A è principale.

n. 2. Ci proponiamo anzitutto di dimostrare la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Siano A un anello fattoriale, s un intero ≥ 2 $a_1, \dots, a_s$ elementi di A formanti un sistema minimale di generatori per l'ideale $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_s) A$. Sia $\varphi : A^s \longrightarrow A$ l'omomorfismo dato da: $(b_1, \dots, b_s) \longrightarrow \sum_{i=1}^{s} b_i a_i \, (b_i \in A, 1 \leq i \leq s)$, e supponiamo che $\operatorname{Ker} \varphi$ sia un A-modulo libero. Allora esiste una matrice ad $s - 1$ righe ed s colonne*

$$M = \begin{pmatrix} b_{11} & , \dots , & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s-1,1} & , \dots , & b_{s-1,s} \end{pmatrix}$$

formata da elementi non invertibili in A, tale che i minori d'ordine $s - 1$ di M, presi con segno alterno, sono rispettivamente eguali ad $a_1, \dots, a_s$. Più precisamente, indicato con D_i il minore ottenuto da M togliendo la i-esima colonna, si ha: $a_i = (-1)^i D_i$.

Osserviamo subito che possiamo limitarci a dimostrare la proposizione nel caso in cui gli elementi $a_1, \dots, a_s$ siano coprimi. Posto infatti $d = m.c.d. (a_1, \dots, a_s)$, gli elementi $d^{-1} a_1, \dots, d^{-1} a_s$ verificano le ipotesi della proposizione; onde, se per essi vale la tesi, questa è di conseguenza valida anche per $a_1, \dots, a_s$, come si verifica immediatamente.

Ciò premesso, consideriamo A immerso nel suo corpo dei quozienti K. Sia $\psi : K^s \longrightarrow K$ l'omomorfismo dato da $(c_1, \dots, c_s) \longrightarrow \sum_{i=1}^{s} c_i a_i$ $(c_i \in K, 1 \leq i \leq s)$. Si ha allora $A^s \subset K^s$ e $\operatorname{Ker} \varphi \subset \operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \varphi \otimes_A K$; si può quindi osservare che, se $b^{(1)}, \dots, b^{(t)}$ sono un numero finito di elementi di $\operatorname{Ker} \varphi$ linearmente indipendenti su A, essi sono linearmente indipendenti anche su K. Risulta intanto da ciò che il modulo libero $\operatorname{Ker} \varphi$ è di tipo finito e di dimensione $\leq s - 1$, in quanto $\operatorname{Ker} \psi$ è uno spazio vettoriale di dimensione $s - 1$. D'altra parte si riconosce subito che una base di $\operatorname{Ker} \varphi$ su A è anche una base di $\operatorname{Ker} \psi$ su K, e dunque $\operatorname{Ker} \varphi$ ha dimensione $s - 1$.

Indichiamo con
$b^{(1)} = (b_{11}, \dots, b_{1s}), \dots, b^{(s-1)} = (b_{s-1,1}, \dots, b_{s-1,s})$ una base di Ker φ. Osserviamo che i b_{ij} sono tutti elementi non invertibili di A, perchè si ha $\sum_{j=1}^{s} b_{ij} a_j = 0$ $(i = 1, \dots, s-1)$ ed $a_1, \dots, a_s$ sono un sistema minimale di generatori di $\mathfrak{a}$. La caratteristica della matrice

$$N = \begin{pmatrix} b_{11} & , \dots , & b_{1s} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{s-1,1} & , \dots , & b_{s-1,s} \end{pmatrix}$$

vale manifestamente $s - 1$. Gli elementi $a_1, \dots, a_s$ risultano allora proporzionali in K ai minori $B_i = (-1)^i N_i$, gli N_i essendo ottenuti da N per omissione della colonna i-esima, in quanto la s-upla $(a_1, \dots, a_s)$ è una soluzione non nulla del sistema lineare $\sum_{j=1}^{s} b_{ij} X_j = 0$. Si ha dunque in K $a_i = \varrho B_i$ $(\varrho \in K, 1 \leq i \leq s)$, e si può scrivere $\varrho = u/v$ con u, v appartenenti ad A e coprimi. Valgono allora le relazioni $va_i = uB_i$, da cui risulta subito che u è invertibile in A, in quanto abbiamo supposto che $a_1, \dots, a_s$ siano coprimi. Se mostriamo che anche v è invertibile in A, il nostro asserto sarà provato, prendendo per M la matrice che si ottiene da N moltiplicando gli elementi di una sua riga per uv^{-1}.

Supponiamo che v non sia invertibile e sia w un fattore irriducibile di v. Posto $\bar{A} = A/(w)$, sia τ l'omomorfismo canonico $A \longrightarrow \bar{A}$; se $a \in \bar{A}$, poniamo analogamente $\bar{a} = \tau(a)$. Si ha allora $\bar{v} = 0$ e quindi $\bar{B}_i = 0$ per ogni i. Immergiamo $\bar{A}$ nel suo corpo dei quozienti $\bar{K}$ e consideriamo l'omomorfismo $\sigma : \bar{K}^{s-1} \longrightarrow \bar{K}^s$, dato dalle relazioni:

$$(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{s-1}) \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{s-1} \bar{b}_{1i} \bar{g}_i, \dots, \sum_{i=1}^{s-1} \bar{b}_{si} \bar{g}_i \right).$$

Esiste allora, i minori $\bar{B}_i$ essendo nulli, una $s-1$-upla non nulla $(\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_{s-1}) \in \operatorname{Ker} \sigma$ e si può supporre: $\bar{g}_i \in \bar{A}$ per ogni i. Se allora $g_i \in A$ sono degli elementi che rilevano i $\bar{g}_i$, esistono degli elementi $c_i \in A$ per cui vale la seguente identità di prodotti matriciali:

$(g_1, \dots, g_{s-1}) N = w(c_1, \dots, c_s)$. Moltiplicando a destra per $(a_1, \dots, a_s)^{-1}$, si ottiene $\sum_{i=1}^{s} c_i a_i = 0$, onde $(c_1, \dots, c_s) \in \operatorname{Ker} \varphi$. Esistono allora degli elementi $d_1, \dots, d_{s-1}$ in A tali che $(c_1, \dots, c_s) = (d_1, \dots, d_{s-1}) N$, da cui risulta $(g_1 - wd_1, \dots, g_{s-1} - wd_{s-1}) N = 0$. Ma $\operatorname{Ker} \varphi$ è un A-modulo libero; ne segue $g_i - wd_i = 0 \; (1 \leq i \leq s)$ e quindi $\bar{g}_i = 0$: assurdo.

Ci interessano le applicazioni della proposizione 1 nel caso in cui l'anello A verifica una delle due seguenti condizioni:

1) A è un anello locale,
2) A è un'algebra graduata su un corpo, vale a dire $A = \sum_{n \geq 0} A_n$, dove la somma è diretta e A_0 è un corpo.

COROLLARIO. *Se A verifica la condizione 2) e se gli elementi $a_1, \dots, a_s$ sono omogenei, gli elementi b_{ij} della matrice M possono essere scelti omogenei, di grado positivo e tali da soddisfare altresì a queste condizioni di omogeneità: indicato con r_{ij} il grado di b_{ij} $(1 \leq \leq i \leq s-1, 1 \leq j \leq s)$ e fissate comunque due righe i, h e due colonne j, k di M, si ha: $r_{ij} + r_{hk} = r_{hj} + r_{ik}$.*

Il corollario segue da fatti ben noti concernente le algebre graduate $k[X_0, \dots, X_n]$ (X_i indeterminate) e dalla possibilità di estendere la loro validità al caso 2). Si può consultare, in proposito, [5], 151, p. 185 e [11], Ch. V.

DEFINIZIONE. Una matrice M si dice *omogenea* se i suoi elementi sono omogenei e soddisfano le condizioni di omogeneità poste sopra per i minori del secondo ordine (estendibili allora in modo ovvio ai minori di ordine qualunque).

OSSERVAZIONE. Facciamo adesso alcune considerazioni sull'ideale $\mathfrak{a} = (a_1, \dots, a_s)$ che compare nell'enunciato della proposizione 1. Dal fatto che $\operatorname{Ker} \varphi$ è un modulo libero si trae che $dh(A/\mathfrak{a}) = 2$.

Proviamo che se gli elementi $a_1, \dots, a_s$ sono coprimi si ha $gr(\mathfrak{a}) \geq 2$; ciò segue immediatamente dal

LEMMA 1. *Siano A un anello fattoriale, $\mathfrak{a}$ un ideale non contenuto in alcun ideale principale. Si ha allora $gr(\mathfrak{a}) \geq 2$.*

Le ipotesi ammesse per A ed $\mathfrak{a}$ implicano infatti che $h(\mathfrak{a}) \geq 2$. Se fosse $gr(\mathfrak{a}) = 1$, esisterebbe un ideale $\mathfrak{p}$ primo minimale di $\mathfrak{a}$ tale che $h(\mathfrak{p}) \geq 2$ e $gr(\mathfrak{p}) = 1$ (cfr. [7], th. 3. 4.); $\mathfrak{p}$ conterebbe a sua volta un ideale $\mathfrak{p}'$ primo e di altezza 1, dunque principale. Posto $\mathfrak{p}' = (a)$, sia b un elemento di $\mathfrak{p}$ non appartenente a $\mathfrak{p}'$; allora gli elementi a, b sono in $\mathfrak{p}$ e formano una A-successione, onde $gr(\mathfrak{p}) \geq 2$: assurdo.

COROLLARIO. *Se gli elementi* $a_1, \ldots, a_s$ *sono coprimi, l'ideale* $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ *soddisfacente alle ipotesi della proposizione* 1 *è perfetto di grado* 2.

Dall'osservazione precedente e dal lemma 1 si trae $dh(A/\mathfrak{a}) = 2 \leq gr(\mathfrak{a})$; quindi valendo sempre la diseguaglianza $gr(\mathfrak{a}) \leq dh(A/\mathfrak{a})$, si ha l'asserto.

D'altra parte vale anche il

LEMMA 2. *Sia* $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_s)$ *un ideale perfetto di grado* 2 *dell'anello* A; *sia* φ *l'omomorfismo definito nella prop. 1. Se* A *verifica la condizione* 1), *oppure se* A *verifica* 2) *ed* $a_1, \ldots, a_s$ *sono omogenei, si ha*: $a_1, \ldots, a_s$ *sono coprimi e* Ker φ *è libero.*

Se $gr(\mathfrak{a}) = 2$, $a_1, \ldots, a_s$ sono evidentemente coprimi. Se $\mathfrak{a}$ è perfetto si ha $dh(A/\mathfrak{a}) = 2$ e quindi Ker φ è un modulo proiettivo di tipo finito, che è graduato se A verifica 2) ed $a_1, \ldots, a_s$ sono omogenei. Allora Ker φ è libero perchè: un A-modulo di tipo finito su un anello locale è libero; un A-modulo graduato di tipo finito su un'algebra graduata su un corpo è libero (cfr. [11], Ch. V, théor. 3).

COROLLARIO 1. *Se gli elementi* $a_1, \ldots, a_s$ *sono coprimi e se* A *verifica* 1), *oppure* A *verifica* 2) *ed* $a_1, \ldots, a_s$ *sono omogenei, l'ipotesi* « Ker φ *è libero* » *della prop.* 1 *può sostituirsi con* « $\mathfrak{a}$ *è un ideale perfetto di grado* 2 ».

COROLLARIO 2. *Siano* A *un anello fattoriale verificante la condizione* 1) (*risp. la condizione* 2)), $\mathfrak{a}$ *un ideale* (*risp. un ideale omogeneo*) *perfetto di grado* 2 *ed* $a_1, \ldots, a_s$ *un sistema minimale di generatori* (*risp. generatori omogenei*) *di* $\mathfrak{a}$.

Allora esiste una matrice M *a elementi non invertibili* (*risp. una matrice* M *omogenea*) *di tipo* $(s-1, s)$ *tale che gli* a_i *sono eguali ai minori d'ordine massimo di* M *presi con segno alterno.*

DIM. Il corollario 1 è conseguenza del corollario al lemma 1 e del lemma 2. Il corollario 2 segue dal corollario 1, dalla proposizione 1 e dal suo corollario.

OSSERVAZIONE II. Se A è un anello di Macaulay si ha $h(\mathfrak{a}) = gr(\mathfrak{a})$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A; se inoltre A è *strettamente* di Macaulay (cioè, tutti gli ideali massimali di A hanno la stessa altezza) vale la relazione $h(\mathfrak{a}) + \dim(A/\mathfrak{a}) = \dim A$, dove la dimensione è intesa nel senso di Krull. Ritroviamo così, come caso particolare del corollario la ben nota proprietà: l'ideale di una varietà $(n-2)$-dimensionale perfetta dello spazio proiettivo P^n è generato dai minori di ordine $s-1$ di una matrice di tipo $(s-1, s)$ (cfr. [5], p. 155).

PROPOSIZIONE 2. *Siano A un anello fattoriale verificante la condizione* 1 (*risp. la condizione* 2)), $\mathfrak{a}$ *un ideale* (*risp. un ideale omogeneo perfetto di grado* 2). *Sia f un elemento non invertibile di A* (*risp. un elemento omogeneo di grado positivo*) *tale che $\mathfrak{a}$ non sia principale modulo f. Allora f è il determinante di una matrice quadrata ad elementi non invertibili* (*risp. matrice quadrata omogenea*) *di ordine $s \geq 2$.*

Nella dimostrazione ci riferiamo al caso 1), cioè A è locale; nel caso 2) la dimostrazione si adatta in modo ovvio.

DIM. Sia $a_1, \dots, a_s$ un sistema minimale di generatori dello ideale $\mathfrak{a}$.

Si può scrivere $f = \sum_{i=1}^{s} b_i a_i$, ove $b_i \in A$ $(1 \leq i \leq s)$. D'altra parte, in virtù del corollario 2 precedente, si ha anche $a_i = (-1)^i D_i$, i D_i essendo i minori d'ordine massimo di una matrice M di tipo $(s-1, s)$ ad elementi non invertibili. Posto allora: $b_{sj} = (-1)^s b_j$ $(1 \leq j \leq s)$, si può completare la matrice $M = (b_{ij})$ con una s-esima riga costituita dagli elementi b_{sj}, in modo che la matrice quadrata d'ordine s così ottenuta e che possiamo indicare ancora con (b_{ij}) sia tale che $f = \det(b_{ij})$. Nel caso in cui tutti gli elementi b_{sj} siano non invertibili la tesi è provata. Nel caso in cui almeno un elemento b_{sj} sia invertibile, si possono aggiungere alle prime $s-1$ righe della matrice

(b_{ij}) opportune combinazioni dell'ultima riga, in modo da esprimere f come determinante d'ordine $s-1$ a elementi non invertibili (si osservi infatti che nelle ipotesi supposte per A, combinazioni di elementi non invertibili dànno luogo a elementi non invertibili).

Basta allora provare che nell'ultimo caso si ha $s > 2$. Se infatti fosse $f = b_1 a_1 + b_2 a_2$ con, ad esempio, b_1 invertibile, si avrebbe $(a_1, a_2) = (f, a_2)$ e l'ideale $\mathfrak{a}$ risulterebbe principale modulo f, contro l'ipotesi.

La proposizione seguente ed i suoi corollari invertono in un certo senso, i risultati precedenti.

PROPOSIZIONE 3. *Siano A un anello fattoriale, M una matrice di tipo $(s-1, s)$ ad elementi in A. Supponiamo che i minori di ordine massimo $D_1, \ldots, D_s$ di M siano coprimi e generino un ideale proprio $\mathfrak{a}$. Allora $\mathfrak{a}$ è un ideale perfetto di grado 2.*

Sappiamo, in virtù di un classico teorema di Macaulay, generalizzato da Northcott e Eagon (cfr. [4], theorem 2), che si ha sempre $gr(\mathfrak{a}) \leq s - (s-1) + 1 = 2$ e che, se vale il segno d'eguaglianza, l'ideale $\mathfrak{a}$ è perfetto. Concludiamo allora che $\mathfrak{a}$ è un ideale perfetto di grado 2, in conseguenza del lemma 1 e dell'ipotesi che i generatori di $\mathfrak{a}$ siano coprimi.

COROLLARIO 1. *Siano A un anello fattoriale ed f un elemento irriducibile di A che possa scriversi come determinante d'ordine $s \geq 2$ ad elementi in A : $f = \mathrm{Det}\,(b_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq s)$ Supponiamo che esista. una riga (o colonna) della matrice (b_{ij}) i cui elementi appartengono al radicale di A e i cui minori complementari D_i generino un ideale proprio.*

Allora l'ideale $\mathfrak{a} = (D_1, \ldots, D_s)$ è perfetto di grado 2 e non è principale modulo f.

Sia, ad esempio, $b_{11}, \ldots, b_{1s}$ la riga della matrice (b_{ij}) soddisfaciente alle ipotesi del corollario; supponiamo inoltre che i minori complementari $D_1, \ldots, D_s$ siano presi già col proprio segno. Si ha allora $f = \sum_{j=1}^{s} b_{1j} D_j$. Ciò mostra che gli elementi $D_1, \ldots, D_s$ sono coprimi, altrimenti f sarebbe riducibile, i b_{1j} appartenendo al radicale di A. Segue allora dalla proposizione che $\mathfrak{a}$ è un ideale perfetto di grado 2.

Supponiamo ora che $\mathfrak{a}$ sia principale modulo f. Esiste allora un elemento $a \in A$ tale che $\mathfrak{a} = (f, a)$; vale quindi una relazione del tipo

$$f = f\left(\sum_{j=1}^{s} b_{1j}\, c_j\right) + ad \quad (c_j\,,\ d \in A).$$

Poichè f è irriducibile in A e tutti gli elementi di $1 + (b_{11}, \dots, b_{1s})A$ sono invertibili, se segue $a = f$ ed $\mathfrak{a}$ è principale: assurdo.

In modo del tutto analogo si dimostra anche il

COROLLARIO 2. *Sia A un anello fattoriale verificante la condizione* 2). *Sia f un elemento irriducibile omogeneo di grado positivo che possa scriversi come determinante omogeneo : $f = \mathrm{Det}\,(b_{ij})$ coi b_{ij} omogenei e di grado positivo. Allora i minori complementari di una qualunque riga o colonna di (b_{ij}) generano un ideale perfetto di grado* 2, *non principale modulo f.*

Siamo adesso in condizioni di enunciare il seguente teorema 1, che generalizza la proprietà stabilita in [1] e richiamata nel secondo capoverso dell'introduzione.

TEOREMA 1. *Siano A un anello fattoriale di Macaulay verificante la condizione* 1) (*risp. la condizione* 2)) *ed f un elemento non invertibile* (*risp. omogeneo di grado positivo*) *e irriducibile.*

Condizione necessaria e sufficiente perchè in $A/(f)$ esista un ideale (*risp. un ideale omogeneo*) *di altezza* 1 *non principale, la cui immagine inversa in A sia un ideale perfetto, è che f possa scriversi come determinante a elementi non invertibili* (*risp. omogeneo*) *d'ordine $s \geq 2$.*

DIM. Se infatti in $A/(f)$ esiste un ideale non principale di altezza 1 $\bar{\mathfrak{a}}$ tale che la sua immagine inversa $\mathfrak{a}$ in A sia un ideale perfetto, $\mathfrak{a}$ risulta un ideale di altezza 2, quindi di grado 2 (osservazione II) e non principale modulo f; allora f è un determinante del tipo voluto in virtù della proposizione 2. Viceversa se f è un determinante del tipo menzionato, f è contenuto in un ideale perfetto $\mathfrak{a}$ di grado 2 non principale mod f in virtù dei corollari alla proposizione 3; l'immagine di $\mathfrak{a}$ in $A/(f)$ è evidentemente non principale.

Osservazione. Un anello $A/(f)$ soddisfacente alle condizioni equivalenti espresse nella tesi del teorema 1 non è certamente fattoriale, in quanto contiene un ideale *puro* di altezza 1 non principale. Il teorema 1 caratterizza dunque certi anelli non fattoriale del tipo $A/(f)$.

n. 3. Ci proponiamo adesso di estendere a certe varietà intersezioni complete il procedimento seguito in [1], n^0 10 con cui si stabilisce l'esistenza di un luogo singolare per le ipersuperficie dello spazio proiettivo P^n $(n \geq 4)$ contenenti intersezioni non complete perfette.

Sia $A = k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ l'anello delle coordinate di uno spazio proiettivo P^n su un corpo k.

Consideriamo una varietà intersezione completa V_h di dimensione $h \geq 3$, definita da un ideale $(a_1, \ldots, a_{n-h})$ di A, e soddisfacente a queste condizioni:

(a) la varietà V_{h+1} definita dall'ideale $(a_1, \ldots, a_{n-h-1})$ contiene solo intersezioni complete (di V_{h+1} con una ipersuperficie);

(b) V_h contiene un'intersezione W non completa e W è perfetta relativamente a V_{h+1}; in altre parole l'anello $\bar{A}=A/(a_1,\ldots,a_{n-h-1})$ (anello delle coordinate di V_{h+1}) contiene un ideale perfetto di altezza 2 non principale modulo $\bar{a}_{n-h}$.

Si ha allora il

Teorema 2. *Sia V_h una varietà intersezione completa per cui valgano le condizioni (a) e (b). Esiste allora un sistema minimale di generatori dell'ideale di V_h contenente una forma che può scriversi come determinante omogeneo d'ordine $s \geq 2$. In particolare V_h ha un luogo singolare di codimensione* 3.

Si può, infatti, in virtù del teorema 1 e delle ipotesi (a), (b), scrivere $\bar{a}_{n-h}$ (immagine di a_{n-h} in $\bar{A}$) come determinante omogeneo a elementi in $\bar{A}$ d'ordine $s \geq 2$. Risalendo in A, si ha $a_{n-h} = f \bmod (a_1, \ldots, a_{n-h-1})$ dove f è un determinante omogeneo di A d'ordine $s \geq 2$. Ne segue

$$(a_1, \ldots, a_{n-h-1}, a_{n-h}) = (a_1, \ldots, a_{n-h-1}, f),$$

donde la prima asserzione del teorema.

Sappiamo che f ha un luogo singolare di dimensione $\geq n-4$ (cfr. [1], n^0 10); allora la varietà V_h, definita dall'ideale $(a_1, \ldots$ $\ldots, a_{n-h-1}, f)$, ha un luogo singolare di dimensione $\geq n-4-$ $-(n-h-1)=h-3$. Ciò termina la dimostrazione del teorema.

Abbiamo dunque verificato per le varietà V_h soddisfacenti alle condizioni (*a*) e (*b*) la validità del teorema di Lefschetz-Grothendieck che asserisce, più generalmente, l'esistenza di un luogo singolare di codimensione ≤ 3 per ogni intersezione completa V_h contenente intersezioni non complete.

Sarebbe auspicabile poter togliere le restrizioni (*a*) e (*b*) e dimostrare pienamente per tale via il suddetto teorema di Lefschetz-Grothendieck. Restano però da superare grosse difficoltà, forse dovute ad una insufficienza degli strumenti di teoria degli ideali nello studio di certi problemi geometrici.

n. 4. Vogliamo adesso applicare il teorema 1 al caso in cui A è un anello di serie formali $k[[X, Y, Z]]$ con k un corpo; come vedremo si può giungere a dei risultati di fattorialità per particolari anelli di dimensione 2 che sono stati studiati con altri metodi da vari autori. Poichè i metodi usati da Brieskorn (cfr. [3]) relativamente al corpo complesso (o ad un corpo algebricamente chiuso) si estendono a tutti gli anelli locali di dimensione 2 che sono quozienti di $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_n]]$ e giungono a risultati definitivi, il metodo da noi seguito può dare risultati apprezzabili solo nel caso di corpi non algebricamente chiusi.

Ed infatti il risultato più notevole (cfr. il successivo esempio 1: controesempio alla fattorialità di $A[[T]]$, con A completo) è stato ottenuto relativamente a un corpo base $k(U)$: corpo delle funzioni razionali in una indeterminata U su un corpo base qualsiasi k.

Premettiamo un lemma che estende agli anelli locali regolari una nota proprietà degli anelli di polinomi.

LEMMA 3. *In un anello locale regolare di dimensione n ogni ideale puro $\mathfrak{a}$ di altezza $n-1$ è perfetto.*

L'asserto è equivalente a questo: $A/\mathfrak{a}$ è un anello di Macaulay (cfr. [8], theorem 5.4). Ma $A/\mathfrak{a}$ è un anello locale di dimensione 1, in cui l'ideale nullo non ha componenti immerse, dunque è di Macaulay (cfr. [16], Appendix 6, exemples).

Dal lemma 3 e dal teorema 1 segue allora il

COROLLARIO. *Sia A un anello locale regolare di dimensione 3, f un elemento primo di A. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(*a*) *$A/(f)$ non è fattoriale,*

(*b*) *f si può scrivere come determinante d'ordine $s \geq 2$ a elementi non invertibili.*

Applicheremo l'ultimo risultato ottenuto allo studio degli anelli $A = k[[X, Y, Z]]/(f)$ dove k è un corpo e $f = Z^2 + X^3 + F(Y)$, avendo indicato con $F(Y)$ un elemento non invertibile dell'anello $k[[Y]]$.

Si ha in proposito la seguente

PROPOSIZIONE 4. *Sia k un corpo; sia f un elemento dell'anello $k[[X, Y, Z]]$ della forma $f = Z^2 + X^3 + F(Y)$ con $F(Y) \in Yk[[Y]]$. Allora l'anello $A = k[[X, Y, Z]]/(f)$ è fattoriale se e solo se l'equazione $z^2 + x^3 + F(Y) = 0$ non è risolubile con $z, x \in Y k[[Y]]$.*

Dal corollario al lemma 3 risulta che $A/(f)$ è fattoriale se e solo se f non può scriversi come determinante di ordine $s \geq 2$ ad elementi non invertibili.

Supponiamo che f sia un determinante di ordine s; si ha necessariamente $s = 2$ in quanto la forma iniziale di f è di secondo grado. Posto

$$(1) \qquad f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (a, b, c, d \in (X, Y, Z)\, k[[X, Y, Z]])$$

e considerando gli elementi a, b, c, d come serie in Z si vede subito che almeno una delle serie, sia a, ha ordine ridotto (rispetto a Z) eguale ad 1. La serie a è quindi associata per il teorema di preparazione di Weierstrass ad un polinomio di primo grado in Z, a coefficienti in $k[[X, Y]]$; conglobando un suo eventuale fattore invertibile nella serie d si può quindi supporre che sia $a = a_0 + Z$, con $a_0 \in (X, Y)\, k[[X, Y]]$. Inoltre, se la relazione $b = aq + r\,(r \in k[[X, Y]])$ esprime la divisione di b per a, possiamo aggiungere alla seconda colonna del determinante (1) la prima moltiplicata per $-q$ e supporre quindi che sia $b \in (X, Y)\, k[[X, Y]]$. Analogamente si può supporre $c \in (X, Y)\, k[[X, Y]]$.

Poniamo ora $d = d_0 + d_1 Z + d_2 Z^2 + \dots (d_i \in k[[X, Y]], i = 0, 1, 2, \dots)$. Il confronto dei due membri di (1), considerati come polinomi in Z conduce alle relazioni:

(2) $$a_0 d_1 + d_0 = 0, \; a_0 d_2 + d_1 = 1,$$

$$a_0 d_3 + d_2 = a_0 d_4 + d_3 = a_0 d_5 + d_4 = \dots = 0.$$

Si ha allora $d_2 = -a_0 d_3 = a_0^2 d_4 = -a_0^3 d_5 = \dots$ e quindi $d_2 \in \bigcap_{n=1} a_0^n$, onde $d_2 = 0$ per il teorema dell'intersezione di Krull. Analogamente si ha $d_n = 0$ per ogni $n \geq 3$. In definitiva, dalle (2) risulta: $d = -a_0 + Z$.

Dalla (1) si ottiene allora

$$Z^2 + X^3 + F(Y) = Z^2 - a_0^2 - bc,$$

da cui

(3) $$X^3 + F(Y) = \begin{vmatrix} b & a_0 \\ a_0 & -c \end{vmatrix} \quad \text{dove } a_0, b, c \in (X, Y)\, k[[X, Y]].$$

Adesso si può osservare che, considerando a_0, b, c come serie in X, risulta dalle 3 che uno dei due elementi b, c, supponiamo b, è una serie di ordine ridotto eguale ad 1. Ripetendo considerazioni analoghe a quelle svolte in precedenza possiamo supporre che sia: $b = b_0 + X, b_0 \in Yk[[Y]], a_0 \in Yk[[Y]]$. Posto allona $-c = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots$ con $c_i \in k[[Y]]\ (i = 0, 1, 2, \dots)$ si hanno le relazioni:

$$b_0 c_1 + c_0 = 0, \quad b_0 c_2 + c_1 = 0, \quad b_0 c_3 + c_2 = 1,$$

$$b_0 c_4 + c_3 = 0, \quad b_0 c_5 + c_4 = 0, \dots.$$

Si prova poi, come sopra: $c_3 = c_4 = \dots = c_n = \dots = 0$, da cui:

$$c_2 = 1, \quad c_1 = -b_0, \quad c_0 = b_0^2.$$

Dopo ciò si ha dalla (3):

$$X^3 + F(Y) = b_0^3 + X^3 - a_0^2$$

e quindi, ponendo $b_0 = -x$, $a_0 = z$

$$z^2 + x^3 + F(Y) = 0 \quad \text{con} \quad x, z \in Yk[[Y]]. \tag{4}$$

Viceversa, è facile vedere seguendo il procedimento inverso, che l'esistenza di x, z soddisfacienti alla (4) conduce a scrivere f nella forma (1). Ciò prova la proposizione 4.

Come applicazioni della proposizione 4 considereremo due esempi notevoli.

ESEMPIO 1. (*Esistenza di un anello locale completo fattoriale A tale che $A[[T]]$ non è fattoriale*).

Siano k un corpo, U un'indeterminata su k, $f = Z^2 + X^3 + UY^6$. In tal caso l'equazione (4) diventa $z^2 + x^3 + UY^6 = 0$; se questa è risolubile, può certo porsi $z = Y^3 v$, $x = Y^2 w$ ($v, w \in k(U)[[Y]]$) e quindi si deve avere $v^2 + w^3 = -U$ con $v, w \in k(U)$. Ma quest'ultima equazione non è risolubile (cfr. [10], dimostrazione della prop. 5); di conseguenza l'anello $A = k(U)[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + UY^6)$ verifica l'asserto ([10], loc. cit.).

L'esempio seguente dà un risultato sostanzialmente contenuto nel lavoro [14] di G. Scheja.

ESEMPIO 2. *Sia k un corpo. Sia f un elemento dell'anello $k[[X, Y, Z]]$ della forma $f = Z^2 + X^3 - Y^m$ (m intero ≥ 2). Sia $A = k[[X, Y, Z]]/(f)$. Allora:*

1) *A è fattoriale se $m = 5$.*

2) *A non è fattoriale se $m \neq 5$.*

Alla dimostrazione dell'asserto conviene permettere il

LEMMA 4. *Siano k un corpo, $A = k[[X]]$, a un elemento appartenente all'ideale massimale (X) di A. Si ha allora:*

(*a*) *se la caratteristica di k è diversa da 2, esiste in A una radice quadrata di $1 + a$*

(*b*) *se la caratteristica di k è diversa da 3, esiste in A una radice cubica di $1 + a$.*

Si vede facilmente che possiamo limitarci a dimostrare il lemma nel caso in cui $a = X$.

Posto, nel caso (*a*), $1 + X = (1 + \sum_{i \geq 1} a_i X^i)^2$, si determinano gli elementi incogniti a_i, risolvendo, per ricorrenza, delle equazioni del tipo $2^h a_i = c$ dove h è un intero positivo e $c \in k$.

Analogamente, nel caso (*b*), posto $1 + X = (1 + \sum_{i \geq 1} a_i X^i)^3$, si determinano gli a_i mediante equazioni del tipo $3^h a_i = c$.

Il lemma è così dimostrato.

Dimostriamo ora il nostro asserto (ovvio, per $m = 2, 3, 4$). Si tratta di vedere, a norma della proposizione 4, se l'equazione

$$z^2 + x^3 - Y^m \quad z, x \in Yk[[Y]] \tag{5}$$

è oppure non è risolubile.

Sia $m > 6$. Se allora k è un corpo di caratteristica diversa da 2, si risolve la (5) ponendo $x = -Y^2$ e determinando di conseguenza z, a norma del lemma 4, (*a*). Se, invece, k è un corpo di caratteristica 2, si risolve la (5) ponendo $z = Y^3$ e determinando quindi x, a norma del lemma 4, (*b*).

Se, infine, $m = 5$, è facile convincersi che l'equazione (5) non è risolubile.

n. 5. Il risultato che proveremo in questo numero (teorema 3) è strettamente legato all'esempio 1 del numero precedente, ma viene conseguito in modo del tutto indipendente dalle premesse poste nel n^0 2 del presente lavoro. Si tratta di una proprietà relativa alla fattorialità degli anelli locali completi a cui si perviene servendoci di proprietà che mettono in relazione gli anelli noetheriani coi loro complementi $\mathfrak{m}$-adici.

TEOREMA 3. *Siano A un anello locale completo e fattoriale, $\mathfrak{m}$ l'ideale massimale di A, T una indeterminata su A, S l'insieme moltiplicativamente chiuso delle potenze di T. Se il completamento dell'anello $A[[T]]_S$ per la topologia $\mathfrak{m} A[[T]]_S$-adica è fattoriale, l'anello $A[[T]]$ è fattoriale.*

DIM. Basta dimostrare che l'insieme $1 + \mathfrak{m}A[[T]]_S$ è generato da elementi primi. Infatti l'anello $A[[T]]_S$ risulterà allora fattoriale in virtù di un teorema di Mori-Nagata (cfr. [13], Ch. IV, theor. 10), Ma l'insieme moltiplicativo S è generato da T che è primo in $A[[T]]$;

allora la fattorialità di $A[[T]]_S$ implicherà quella di $A[[T]]$ per un noto teorema di Nagata (cfr. ad es. [13], Ch. III, théor. 5).

Si può osservare che ogni elemento non invertibile di $1 + \mathfrak{m}A[[T]]_S$ è, a meno di un fattore invertibile, una serie dell'anello $A[[T]]$ di ordine ridotto non nullo; tale serie è dunque associata, in virtù del teorema di preparazione (cfr. [2], § 3, n⁰ 8), ad un polinomio «privilegiato» (con privilegiato si intende che l'unico monomio avente coefficiente invertibile è quello di grado massimo; in francese: « distingué »). Basta perciò provare che ogni polinomio privilegiato è prodotto di fattori primi. Ora, quest'ultimo fatto è conseguenza di un ragiouamento standard fondato sulla fattorialità dell'anello $A[T]$ e sul teorema di preparazione (si può vedere ad esempio il modo con cui si conclude la dimostrazione della prop. 8 in [2], §, 3, n⁰ 9).

Corollario. *Siano k un anello, $X_1, \dots, X_n, T$ indeterminate su k e sia $k[[x_1, \dots, z_n]]$ il quoziente di $k[[X_1, \dots, X_n]]$ per un suo ideale. Si ha allora: se $k((T))[[x_1, \dots, x_n]]$* [1]) *è fattoriale, anche $k[[x_1, \dots, x_n]][[T]]$ è fattoriale.*

Dim. Basta osservare che se S è il sistema moltiplicativo generato da T, il completamento dell'anello $(k[[x_1, \dots, x_n]][[T]])_S$ rispetto alla topologia $(x_1, \dots, x_n)$-adica è l'anello

$$(k[[T]])_S[[x_1, \dots, x_n]] = k((T))[[x_1, \dots, y_n]];$$

dal teorema si ottiene allora subito il corollario.

Osservazione I. Il corollario precedente mostra che l'esempio 1⁰ del n⁰ 4 sarebbe caduto in difetto nel caso dell'anello $A = k(U)((T))[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + UY^6)$. Questo fatto si può controllare direttamente; cioè, l'equazione $v^2 + w^2 = -U$, non risolubile con $v, w \in k(U)$, può invece risolversi nell'estensione $k(U)((T))$.

Cogliamo l'occassione per notare che l'equazione suddetta si risolve anche nel corpo $k((U))$ dunque il corpo base ha un'impor-

---

[1]) Con $k((T))$ si intende il corpo delle frazioni di $k[[T]]$ ovvero il corpo delle serie formali di Laurent (troncate a sinistra).

tanza decisiva per la validità dei controesempi alla implicazione $\hat{A}$ fattoriale $\Longrightarrow \hat{A}[[T]]$ fattoriale.

OSSERVAZIONE II. Il corollario precedente assieme all'esempio 2 del n^0 4 mostra che se $A = k[[X, Y, Z]]/(Z^2 + X^3 + Y^5)$ l'anello $A[[T]]$ è fattoriale: è un caso particolare di un risultato stabilito da Scheja in [15], Satz 4.

n. 6. Terminiamo il lavoro con una osservazione sugli ideali perfetti in relazione alla fattorialità. P. Samuel pone in [12], n^0 6 la seguente questione: se A è un anello locale integro di Macaulay in cui ogni ideale primo perfetto di altezza 1 è principale, A è fattoriale?

Si dimostra qui mediante la proposizione 5, che non si può rispondere alla questione in modo affermativo. Anzi, per dare la risposta negativa, basta un esempio di anello locale regolare B di dimensione 3 e di un elemento $f \in B$ tale che: B/f è fattoriale, $(B/f)[[T]]$ non è fattoriale. Ora, l'esistenza di esempi siffatti, confermata anche dall'esempio 1 del n^0 4, è stata stabilita proprio da Samuel nel 1959 (« On unique factorisation domains » Illinois Journal Math. 1961).

PROPOSIZIONE 5. *Siano B un anello locale regolare di dimensione* 3, *f un elemento di B tali che $B/(f)$ è fattoriale mentre $A =$ $= B[[T]]/(f)$ non è fattoriale. Allora ogni ideale primo perfetto di altezza* 1 *di A è principale.*

DIM. Mostriamo anzitutto che ogni ideale primo perfetto di altezza 2 di $B[[T]]$ contenente f, è principale modulo f. Infatti, se così non fosse, si potrebbe, per il teorema 1, scrivere f come determinante ad elementi non invertibili in $B[[T]]$. Ma, allora, passando al quoziente modulo (T) si potrebbe anche scrivere f come determinante in B e $B/(f)$ non sarebbe fattoriale. Assurdo.

Sia ora $\bar{\mathfrak{p}}$ un ideale primo perfetto di altezza 1 di A. Allora l'anello $A/\bar{\mathfrak{p}}$ è di Macaulay (cfr. [8], lemma 5.3). D'altra parte è evidente che tale anello è isomorfo a $B[[T]]/\mathfrak{p}$ se $\mathfrak{p}$ è l'immagine inversa di $\bar{\mathfrak{p}}$ in $B[[T]]$. Allora $\mathfrak{p}$ è un ideale perfetto, in quanto $B[[T]]$ è un anello locale regolare (cfr. [8], theor. 5.4). Ne segue, per l'osservazione fatta in precedenza, che $\mathfrak{p}$ è principale modulo f e quindi $\bar{\mathfrak{p}}$ è principale in A, c.v.d.

OSSERVAZIONE. La proposizione 5, si fonda, come si è visto, sugli esempi che smentiscono la conservazione della fattorialità per estensione alle serie formali. Tali esempi non hanno però alcun corrispondente nelle algebre polinomiali (eventualmente graduate), dove l'aggiunta di indeterminate preserva la fattorialità.

Si potrebbe allora porre la questione :
« Se in un'algebra (graduata) integra $A = k[X_0, X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{p}$, ogni ideale primo minimale perfetto di altezza 1 è principale, A è fattoriale ? ».

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A. e SALMON P., *Anelli con unica decomponibililà in fattori primi ed un problema di intersezioni complete.* Monatshefte for Mathematik, t. 61, 1957, pp. 97-142.

[2] BOURBAKI N., *Algebre Commutative.* Ch. 7 Diviseurs. Hermann Paris 1965.

[3] BRIESKORN E., *Rationale Singularitäten komplexer Flächen* - Inventiones math. 4, 1968, pp. 336-358.

[4] EAGON J. A. and NORTHCOTT D. G., *Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them.* Proc. Roy. Soc., Ser. A, 269, (1962), pp. 188-204.

[5] GROBNER W. — *Moderne algebraishe Geometrie,* Wien, 1949.

[6] GROTHENDIECK A., *Séminaire de Géométrie Algébrique.* Notes prises par un groupe des auditeurs. Exposés I à XIII. Paris I. H. E. S., 1962.

[7] REES D., *A theorem of homological algebra.* Proc. Camb. Phil. Soc. 52 (1956), pp. 605-610.

[8] REES D., *The grade of an ideal or module.* Proc. Camb. Phil. Soc., 53, 1957, pp. 28-42.

[9] SALMON P., *Sulla fattorialità delle algebre graduate e degli anelli locali·* Edizioni Scientifiche Genova, 1964.

[10] SALMON P., *Su un problema posto da P. Samuel.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei,Classe di Scienze, Serie VIII, vol. XL, fasc. 5, Maggio 1966.

[11] SAMUEL P., *Progrés récents d'algébre locale.* Notas de Matematica n. 19, Rio de Janeiro, 1958.

[12] SAMUEL P., *Sur les anneaux factoriels.* Bull. Soc. Math. Fr., t. 89, 1961, pp. 155-173.

[13] SAMUEL P., *Anneaux factoriels* (redaction par A. Micali), Pubbl. Soc. Mat. de Sao Paulo, 1963.

[14] SCHEJA G., *Uber Primfactorzerlegung in zweidimensionalen lokalen Ringen* Mat Annalen 159, pp. 252-258 (1965).

[15] SCHEJA G., *Einige Beispiele faktorieller lokalen Ringe.* Math. Annalen 172, pp. 124-134 (1967)

[16] ZARISKI O. and SAMUEL P., *Commutative Algebra,* Vol. 2^0, Princeton, Van Nostrand, 1958-60.

Manoscritto pervenuto in redazione il 29-2-68.