

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELO TOTARO

Il problema delle precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 41 (1968), p. 181-197

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__181_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

IL PROBLEMA DELLE PRECESSIONI GENERALIZZATE REGOLARI ELLITTICHE PER UN SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

CARMELO TOTARO *)

In una memoria ¹⁾ del 1963, G. Grioli ha introdotto il concetto di *precessione generalizzata*.

Si può allora porre il problema della ricerca di precessioni generalizzate, dinamicamente possibili, per un *solido pesante asimmetrico* \mathcal{C} .

Nel presente lavoro, sviluppo un metodo che conduce alla caratterizzazione dinamica di una speciale classe di precessioni generalizzate che ho chiamato *precessioni generalizzate regolari ellittiche*, o brevemente, *moti* \mathcal{P}_e .

Determino così un nuovo insieme di moti \mathcal{P}_e e ritrovo altri movimenti, dello stesso tipo, già segnalati e studiati in una mia precedente nota ²⁾.

1. Seguendo G. Grioli ¹⁾, si indichi con $\varepsilon = \|\varepsilon_{rs}\|$ ($r, s = 1, 2, 3$) una matrice di ordine tre ad elementi indipendenti dal tempo.

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 7.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico della Università di Messina.

¹⁾ G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (1963).

²⁾ C. TOTARO, *Precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico*, « Rend. del Sem. Mat. dell'Università di Padova », vol. XL (1968).

Si dicono moti di *precessione generalizzata* tutti e solo quelli per i quali

$$(1) \quad \varepsilon\omega = \nu\mathbf{c} + \mu\mathbf{k},$$

ove ω è la velocità angolare di un corpo \mathcal{C} nel suo moto intorno ad un punto O di un riferimento \mathcal{S} , ν e μ due quantità scalari dipendenti, eventualmente, dal tempo, \mathbf{c} un versore solidale con \mathcal{S} e \mathbf{k} un versore solidale con \mathcal{C} .

Se, in particolare, ν e μ sono indipendenti dal tempo si parlerà di *precessioni generalizzate regolari*.

In quest'ultimo caso la (1) può sostituirsi con la

$$(2) \quad \varepsilon\omega = \mathbf{c} + \mathbf{K},$$

ove \mathbf{K} è un vettore, in generale non unitario, solidale con \mathcal{C} .

Basta, a tale scopo, dividere la (1) per ν e mutare $(1/\nu)\varepsilon$ in ε e $(\mu/\nu)\mathbf{k}$ in \mathbf{K} .

Nella ricerca di tutte le precessioni generalizzate regolari per un corpo asimmetrico pesante si è condotti a considerare il sottoinsieme di moti che si ottengono da (2) imponendo ad ω questa altra condizione

$$(3) \quad \omega = \omega^* + \mathbf{a} \cos \chi + \mathbf{b} \sin \chi,$$

ove ω^* , \mathbf{a} , \mathbf{b} sono vettori arbitrari solidali con \mathcal{C} e χ è un parametro dipendente dal tempo.

Si vede subito che l'estremo P di O , ω descrive, rispetto a \mathcal{C} , una ellisse ed O , ω^* ne individua il centro; \mathbf{a} e \mathbf{b} , vettori non paralleli, costituiscono una possibile coppia di *semidiametri coniugati*. In particolare, se si verifica la condizione $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, i detti vettori costituiscono una coppia di *semiassi*.

Con la trasformazione $\cos \chi = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2)$, $\sin \chi = 2\tau/(1 + \tau^2)$ si può pure scrivere

$$(3') \quad \omega = \frac{\mathbf{A}_2 \tau^2 + \mathbf{A}_1 \tau + \mathbf{A}_0}{\tau^2 + 1},$$

ove

$$(4) \quad \mathbf{A}_2 = \omega^* - \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_0 = \omega^* + \mathbf{a}$$

e con τ funzione del tempo.

Dirò *precessioni generalizzate regolari ellittiche* o brevemente *moti* \mathcal{P}_e tutti i movimenti di un solido \mathcal{C} che soddisfano simultaneamente alla (2) e alla (3).

2. Le equazioni fondamentali per la determinazione dei movimenti, intorno ad 0 , di un solido pesante \mathcal{C} sono

$$(5) \quad \begin{cases} \sigma \dot{\omega} + \omega \wedge \sigma \omega = OG^* \wedge c \\ \dot{c} + \omega \wedge c = 0, \end{cases}$$

per le quali valgono questi due integrali primi

$$(6) \quad \begin{cases} \sigma \omega \times c = k_z \\ \sigma \omega \times \omega - 2c \times OG^* = 2E. \end{cases}$$

In (5) ed in tutto il seguito, c ha ormai il significato di *versore della verticale discendente*; σ è l'omografia d'inerzia; OG^* il prodotto del modulo del peso per la coordinata vettoriale OG del baricentro G di \mathcal{C} ; k_z la componente costante del momento delle quantità di moto secondo c ; E la costante dell'energia.

Con lo scopo di determinare movimenti \mathcal{P}_e per il solido pesante \mathcal{C} si cominci col sostituire la (2) in (5) e (6):

$$(5') \quad \begin{cases} \sigma \dot{\omega} + \omega \wedge \sigma \omega = OG^* \wedge (\varepsilon \omega - \mathbf{K}) \\ \varepsilon \dot{\omega} + \omega \wedge (\varepsilon \omega - \mathbf{K}) = 0 \end{cases}$$

$$(6') \quad \begin{cases} \sigma \omega \times (\varepsilon \omega - \mathbf{K}) = k_z \\ \sigma \omega \times \omega - 2(\varepsilon \omega - \mathbf{K}) \times OG^* = 2E. \end{cases}$$

Dalle (5'), con la sostituzione di (3') e la moltiplicazione per due vettori arbitrari u e v diversi da zero, si ottiene

$$(7) \quad \begin{aligned} \dot{\tau} &= \frac{\mathcal{P}_4 \tau^4 + \mathcal{P}_3 \tau^3 + \mathcal{P}_2 \tau^2 + \mathcal{P}_1 \tau + \mathcal{P}_0}{\mathcal{Q}_2 \tau^2 + \mathcal{Q}_1 \tau + \mathcal{Q}_0} = \\ &= \frac{\mathcal{R}_4 \tau^4 + \mathcal{R}_3 \tau^3 + \mathcal{R}_2 \tau^2 + \mathcal{R}_1 \tau + \mathcal{R}_0}{\mathcal{S}_2 \tau^2 + \mathcal{S}_1 \tau + \mathcal{S}_0}, \end{aligned}$$

avendo posto

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_4 = \sigma \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_2 + OG^* \wedge (\varepsilon \mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \\ \mathbf{M}_3 = \sigma \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_1 + \sigma \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 + OG^* \wedge \varepsilon \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_2 = \sigma \mathbf{A}_2 \wedge \mathbf{A}_0 + \sigma \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_1 + \sigma \mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{A}_2 + OG^* \wedge [\varepsilon (\mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_0) - 2\mathbf{K}] \\ \mathbf{M}_1 = \sigma \mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{A}_1 + \sigma \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_0 + OG^* \wedge \varepsilon \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_0 = \sigma \mathbf{A}_0 \wedge \mathbf{A}_0 + OG^* \wedge (\varepsilon \mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_4 = (\varepsilon \mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{M}_3 = (\varepsilon \mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_1 + \varepsilon \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{M}_2 = (\varepsilon \mathbf{A}_2 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_0 + (\varepsilon \mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_2 + \varepsilon \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{M}_1 = (\varepsilon \mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_1 + \varepsilon \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{M}_0 = (\varepsilon \mathbf{A}_0 - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{A}_0 \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_2 = -\sigma \mathbf{A}_1 = -2\sigma \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_1 = 2\sigma (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_0) = -4\sigma \mathbf{a} \\ \mathbf{N}_0 = \sigma \mathbf{A}_1 = 2\sigma \mathbf{b} \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}_2 = -\varepsilon \mathbf{A}_1 = -2\varepsilon \mathbf{b} \\ \mathbf{N}_1 = 2\varepsilon (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_0) = -4\varepsilon \mathbf{a} \\ \mathbf{N}_0 = \varepsilon \mathbf{A}_1 = 2\varepsilon \mathbf{b} \end{array} \right.$$

e successivamente

$$(12) \quad \mathbf{u} \times \mathbf{M}_i = \mathcal{P}_i, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{N}_J = \mathcal{Q}_J, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{M}_i = \mathcal{R}_i, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{N}_J = \mathcal{S}_J$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (J = 0, 1, 2).$$

Da (7) e da (6'), per l'arbitrarietà di τ , segue

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_4 \mathcal{S}_2 - \mathcal{R}_4 \mathcal{Q}_2 = 0 \\ \mathcal{P}_4 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_3 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_4 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_3 \mathcal{Q}_2) = 0 \\ \mathcal{P}_4 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_3 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_2 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_4 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_3 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_2 \mathcal{Q}_2) = 0 \\ \mathcal{P}_3 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_2 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_1 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_3 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_2 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_2) = 0 \\ \mathcal{P}_2 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_1 \mathcal{S}_1 + \mathcal{P}_0 \mathcal{S}_2 - (\mathcal{R}_2 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_1 + \mathcal{R}_0 \mathcal{Q}_2) = 0 \\ \mathcal{P}_1 \mathcal{S}_0 + \mathcal{P}_0 \mathcal{S}_1 - (\mathcal{R}_1 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{R}_0 \mathcal{Q}_1) = 0 \\ \mathcal{P}_0 \mathcal{S}_0 - \mathcal{R}_0 \mathcal{Q}_0 = 0 \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \omega^* \times (\varepsilon \omega^* - \mathbf{K}) + \sigma \mathbf{a} \times \varepsilon \mathbf{a} = k_z \\ \sigma \mathbf{a} \times (\varepsilon \omega^* - \mathbf{K}) + \sigma \omega^* \times \varepsilon \mathbf{a} = 0 \\ \sigma \mathbf{b} \times (\varepsilon \omega^* - \mathbf{K}) + \sigma \omega^* \times \varepsilon \mathbf{b} = 0 \\ \sigma \mathbf{b} \times \varepsilon \mathbf{a} + \sigma \mathbf{a} \times \varepsilon \mathbf{b} = 0 \\ \sigma \mathbf{a} \times \varepsilon \mathbf{a} = \sigma \mathbf{b} \times \varepsilon \mathbf{b} \end{array} \right.$$

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma \omega^* \times \omega^* + \sigma \mathbf{a} \times \mathbf{a} - 2(\varepsilon \omega^* - \mathbf{K}) \times OG^* = 2E \\ \sigma \omega^* \times \mathbf{a} - \varepsilon \mathbf{a} \times OG^* = 0 \\ \sigma \omega^* \times \mathbf{b} - \varepsilon \mathbf{b} \times OG^* = 0 \\ \sigma \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \sigma \mathbf{b} \times \mathbf{b} \\ \sigma \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0. \end{array} \right.$$

Approfitando dell'arbitrarietà di \mathbf{u} e \mathbf{v} , conviene trasformare le (13) per sostituirle con più semplici condizioni di compatibilità.

La (13₁) si può scrivere in questi due modi

$$(16) \quad \begin{cases} \mathbf{v} \times [(\mathbf{u} \times \mathbf{N}_0) \mathbf{M}_4 - (\mathbf{u} \times \mathbf{M}_4) \mathbf{N}_0] = 0 \\ \mathbf{u} \times [(\mathbf{v} \times \mathbf{N}_0) \mathbf{M}_4 - (\mathbf{v} \times \mathbf{M}_4) \mathbf{N}_0] = 0, \end{cases}$$

da cui segue

$$(17) \quad \begin{cases} (\mathbf{u} \times \mathbf{N}_0) \mathbf{M}_4 - (\mathbf{u} \times \mathbf{M}_4) \mathbf{N}_0 = 0 \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{N}_0) \mathbf{M}_4 - (\mathbf{v} \times \mathbf{M}_4) \mathbf{N}_0 = 0. \end{cases}$$

Poichè è sempre $\mathbf{N}_0 \equiv 2\sigma\mathbf{b} \neq 0$, da (17₁) si ha

$$(18) \quad \mathbf{M}_4 = m \mathbf{N}_0,$$

ove m è un coefficiente di proporzionalità.

Dopo ciò, da (17₂) si ottiene

$$(19) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{N}_0 (\mathbf{M}_4 - m \mathbf{N}_0) = 0.$$

Supposto $\mathbf{N}_0 \equiv 2\epsilon\mathbf{b} \neq 0$, si ha

$$(20) \quad \mathbf{M}_4 = m \mathbf{N}_0.$$

Procedendo analogamente da (13₇) si ottiene

$$(21) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_0 = m' \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 = m' \mathbf{N}_0, \end{cases}$$

ove m' è un coefficiente di proporzionalità.

Da (13₂), mettendo in evidenza prima \mathbf{u} e poi \mathbf{v} , si ottengono queste due equazioni

$$(22) \quad \begin{cases} \mathbf{v} \times \mathbf{N}_0 (\mathbf{M}_3 + m \mathbf{N}_1) - \mathbf{v} \times (\mathbf{M}_3 + m \mathbf{N}_1) \mathbf{N}_0 = 0 \\ \mathbf{u} \times \mathbf{N}_0 (\mathbf{M}_3 + m \mathbf{N}_1) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_3 + m \mathbf{N}_1) \mathbf{N}_0 = 0. \end{cases}$$

Da (22₁), supposte non nulle le parentesi rotonde, si ha

$$(23) \quad \mathbf{M}_3 = m'' \mathbf{N}_0 - m \mathbf{N}_1,$$

ove m'' è un terzo coefficiente di proporzionalità.

Sostituendo in (22₂), si ottiene ³⁾

$$(24) \quad \mathbf{M}_3 = m'' N_0 - m N_1.$$

Da (13₆), con procedimento analogo, si ha

$$(25) \quad \begin{cases} \mathbf{v} \times N_0 (\mathbf{M}_1 - m' N_1) - \mathbf{v} \times (\mathbf{M}_1 - m' N_1) N_0 = 0 \\ \mathbf{u} \times N_0 (\mathbf{M}_1 - m' N_1) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_1 - m' N_1) N_0 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima, supposte non nulle le parentesi rotonde, segue

$$(26) \quad \mathbf{M}_1 = m''' N_0 + m' N_1,$$

con m''' coefficiente di proporzionalità.

Sostituendo in (25₂), si ha

$$(27) \quad \mathbf{M}_1 = m''' N_0 + m' N_1.$$

Da (13₃), segue

$$(28) \quad \begin{cases} \mathbf{v} \times N_0 (\mathbf{M}_2 + m'' N_1) - \mathbf{v} \times (\mathbf{M}_2 + m'' N_1) N_0 = 0 \\ \mathbf{u} \times N_0 (\mathbf{M}_2 + m'' N_1) - \mathbf{u} \times (\mathbf{M}_2 + m'' N_1) N_0 = 0. \end{cases}$$

Come prima, si trova

$$(29) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_2 = m^{iv} N_0 - m'' N_1 \\ \mathbf{M}_2 = m^{iv} N_0 - m'' N_1. \end{cases}$$

Da (13₅), segue

$$(30) \quad (m''' + m'') \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times N_1 \cdot N_0 - \mathbf{v} \times N_0 \cdot N_1) = 0.$$

Poichè non può essere $N_0 \parallel N_1$ segue

$$(31) \quad m''' = -m''.$$

³⁾ È quasi superfluo osservare che il caso escluso delle parentesi rotonde uguali a zero risulta compreso in (23) e (24) e si ottiene per $m'' = 0$. Analoga osservazione si può fare nel seguito.

Da (13₄) segue

$$(32) \quad (m^{iv} + m' + m) \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times N_1 \cdot N_0 - \mathbf{v} \times N_0 \cdot N_1) = 0$$

e quindi

$$(33) \quad m^{iv} = -(m + m').$$

Riassumendo, si hanno le seguenti condizioni di compatibilità

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{M}_4 = m N_0 & \mathbf{M}_4 = m N_0 \\ \mathbf{M}_3 = m'' N_0 - m N_1 & \mathbf{M}_3 = m'' N_0 - m N_1 \\ \mathbf{M}_2 = -(m + m') N_0 - m'' N_1 & \mathbf{M}_2 = -(m + m') N_0 - m'' N_1 \\ \mathbf{M}_1 = -m'' N_0 + m' N_1 & \mathbf{M}_1 = -m'' N_0 + m' N_1 \\ \mathbf{M}_0 = m' N_0 & \mathbf{M}_0 = m' N_0. \end{array} \right.$$

Per mezzo di queste condizioni, da (7), segue

$$(35) \quad \dot{\tau} = -m\tau^2 - m''\tau + m'.$$

Conviene sostituire le condizioni di compatibilità (34) con le seguenti del tutto equivalenti

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{M}_2 = -(m + m') N_0 - m'' N_1 & \mathbf{M}_2 = -(m + m') N_0 - m'' N_1 \\ \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_0 = (m + m') N_0 & \mathbf{M}_4 + \mathbf{M}_0 = (m + m') N_0 \\ \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_0 = (m - m') N_0 & \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_0 = (m - m') N_0 \\ \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1 = -(m - m') N_1 & \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1 = -(m - m') N_1 \\ \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1 = 2m'' N_0 - (m + m') N_1 & \mathbf{M}_3 - \mathbf{M}_1 = 2m'' N_0 - (m + m') N_1. \end{array} \right.$$

Per brevità si ponga

$$(37) \quad m + m' = s_1 \quad m - m' = s_2.$$

Tenendo conto di (4), (8), (9), (10), (11) e (37) le (36) possono scriversi più esplicitamente:

$$(36') \left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon\omega^* - \mathbf{K}) \wedge \omega^* - \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + 2\varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = -s_1 \varepsilon\mathbf{b} + 2m'' \varepsilon\mathbf{a} \\ (\varepsilon\omega^* - \mathbf{K}) \wedge \omega^* + \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = s_1 \varepsilon\mathbf{b} \\ (\varepsilon\omega^* - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{a} + \varepsilon\mathbf{a} \wedge \omega^* = -s_2 \varepsilon\mathbf{b} \\ (\varepsilon\omega^* - \mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{b} \wedge \omega^* = s_2 \varepsilon\mathbf{a} \\ \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -m'' \varepsilon\mathbf{b} - s_1 \varepsilon\mathbf{a} \\ \sigma\omega^* \wedge \omega^* - \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + 2\sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} + OG^* \wedge (\varepsilon\omega^* - \mathbf{K}) = -s_1 \sigma\mathbf{b} + 2m'' \sigma\mathbf{a} \\ \sigma\omega^* \wedge \omega^* + \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} + OG^* \wedge (\varepsilon\omega^* - \mathbf{K}) = s_1 \sigma\mathbf{b} \\ \sigma\omega^* \wedge \mathbf{a} + \sigma\mathbf{a} \wedge \omega^* + OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{a} = -s_2 \sigma\mathbf{b} \\ \sigma\omega^* \wedge \mathbf{b} + \sigma\mathbf{b} \wedge \omega^* + OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{b} = s_2 \sigma\mathbf{a} \\ \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -m'' \sigma\mathbf{b} - s_1 \sigma\mathbf{a} . \end{array} \right.$$

3. Nel caso $\omega^* = 0$ le (36'), le (14) e le (15) divengono

$$(38) \left\{ \begin{array}{ll} \varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} = m'' \varepsilon\mathbf{a} & \sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{b} - OG^* \wedge \mathbf{K} = m'' \sigma\mathbf{a} \\ \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = s_1 \varepsilon\mathbf{b} & \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} - OG^* \wedge \mathbf{K} = s_1 \sigma\mathbf{b} \\ s_2 \varepsilon\mathbf{b} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} & s_2 \sigma\mathbf{b} = -OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{a} \\ s_2 \varepsilon\mathbf{a} = -\mathbf{K} \wedge \mathbf{b} & s_2 \sigma\mathbf{a} = OG^* \wedge \varepsilon\mathbf{b} \\ \varepsilon\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \varepsilon\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -m'' \varepsilon\mathbf{b} - s_1 \varepsilon\mathbf{a}, \sigma\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} + \sigma\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} = -m'' \sigma\mathbf{b} - s_1 \sigma\mathbf{a} \end{array} \right.$$

$$(39) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{a} = k_z \\ \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{K} = 0 \\ \sigma\mathbf{b} \times \mathbf{K} = 0 \\ \sigma\mathbf{b} \times \varepsilon\mathbf{a} + \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{b} = 0 \\ \sigma\mathbf{a} \times \varepsilon\mathbf{a} = \sigma\mathbf{b} \times \varepsilon\mathbf{b} \end{array} \right. \quad (40) \left\{ \begin{array}{l} \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 2\mathbf{K} \times OG^* = 2E \\ \varepsilon\mathbf{a} \times OG^* = 0 \\ \varepsilon\mathbf{b} \times OG^* = 0 \\ \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \sigma\mathbf{b} \times \mathbf{b} \\ \sigma\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0. \end{array} \right.$$

Evidentemente se, con una conveniente scelta dei parametri disponibili, si riesce a soddisfare le (38) e conseguentemente pure le (39) e (40), si ottengono movimenti \mathcal{P}_e di \mathcal{C} la cui legge temporale segue da (35). I calcoli successivi esprimono una possibile maniera di soddisfare le condizioni dette.

Sostituendo le (38_{3,4}) in (38_{1,2,5}) si ha

$$(41) \quad \begin{cases} (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} = 0, & (\mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}) \wedge \mathbf{a} = 0 \\ (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) \wedge \mathbf{a} - (\mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}) \wedge \mathbf{b} = 0. \end{cases}$$

Dalle prime due segue $\varrho \mathbf{b} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}$, $\varrho' \mathbf{a} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}$, ove ϱ e ϱ' sono due coefficienti di proporzionalità.

Sostituendo in (41₃), si trova $\varrho' = -\varrho$ e pertanto bisogna scrivere più semplicemente

$$(42) \quad \begin{cases} \varrho \mathbf{b} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K} \\ -\varrho \mathbf{a} = \mathbf{K} \wedge \mathbf{b} + s_1 \mathbf{K}. \end{cases}$$

Eliminando da queste due il vettore \mathbf{b} , si ottiene

$$(43) \quad (\varrho^2 - K^2) \mathbf{a} + (\mathbf{K} \times \mathbf{a} + \varrho s_1) \mathbf{K} = 0.$$

Poichè \mathbf{a} e \mathbf{K} sono da ritenere non paralleli, perchè altrimenti si ricadrebbe nel caso escluso $\varepsilon \mathbf{b} = 0$, segue

$$(44) \quad \varrho^2 = K^2, \quad \mathbf{K} \times \mathbf{a} = -\varrho s_1 \mathbf{K}.$$

Da (40_{2,3}) si ha che OG^* è parallelo al prodotto $\varepsilon \mathbf{a} \wedge \varepsilon \mathbf{b}$ e quindi, tenendo presenti le (38_{3,4}), (42₂) e (44), si ottiene

$$(45) \quad OG^* = \frac{\varrho_1 \varrho a^2 \sin^2 \widehat{\mathbf{aK}}}{s_2^2} \mathbf{K},$$

ove ϱ_1 è un nuovo coefficiente di proporzionalità. Posto

$$(46) \quad \varrho^* = \frac{\varrho_1 \varrho a^2 \sin^2 \widehat{\mathbf{aK}}}{s_2^2},$$

si può scrivere più concisamente

$$(45') \quad OG^* = \varrho^* \mathbf{K}.$$

Da (38_{9,8}), per mezzo di (45'), (38_{3,4}), (44) e (42₁) si ha

$$(47) \quad \begin{cases} s_2^2 \sigma \mathbf{a} = -\varrho^* \varrho (s_1 \mathbf{K} + \varrho \mathbf{a}) \\ s_2^2 \sigma \mathbf{b} = -\varrho^* \varrho \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}. \end{cases}$$

Eliminando \mathbf{b} con la (42₁), si ha pure

$$(48) \quad \begin{cases} \chi \mathbf{a} = -\varrho^* \varrho s_1 \mathbf{K} \\ \chi (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}) = -m'' s_2^2 \sigma \mathbf{K}, \end{cases}$$

ove si è posto

$$(49) \quad \chi = s_2^2 \sigma + \varrho^* \varrho^2.$$

Per passare alla rappresentazione cartesiana si introduca la terna $\mathcal{C} \equiv 0\xi\eta\zeta$ costituita con gli assi principali d'inerzia di \mathcal{C} relativi ad $\mathbf{0}$ e siano A, B, C ($A < B < C$) i rispettivi momenti principali d'inerzia. Con riferimento a \mathcal{C} , si indichino le terne delle componenti cartesiane dei vari vettori apponendo, ai simboli che li rappresentano, gli indici 1, 2 e 3 ordinatamente. Si osservi pure che

$$(49') \quad \chi = \begin{vmatrix} \chi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_2^2 A + \varrho^* \varrho^2 & 0 & 0 \\ 0 & s_2^2 B + \varrho^* \varrho^2 & 0 \\ 0 & 0 & s_2^2 C + \varrho^* \varrho^2 \end{vmatrix}.$$

Da (48₁) segue

$$(50) \quad a_1 = -\varrho^* \varrho s_1 \frac{K_1}{\chi_1}, \quad a_2 = -\varrho^* \varrho s_1 \frac{K_2}{\chi_2}, \quad a_3 = -\varrho^* \varrho s_1 \frac{K_3}{\chi_3}.$$

Sostituendo nella (48₂) si ha

$$(51) \quad \begin{cases} (C - B) \chi_1 K_2 K_3 = -\mu_0 A \chi_2 \chi_3 K_1 \\ (C - A) \chi_2 K_3 K_1 = \mu_0 B \chi_3 \chi_1 K_2 \\ (B - A) \chi_3 K_1 K_2 = -\mu_0 C \chi_1 \chi_2 K_3 \end{cases}$$

da cui segue

$$K_1^2 = -\frac{BC\mu_0^2 \chi_1^2}{(C-A)(B-A)}, \quad K_2^2 = \frac{CA\mu_0^2 \chi_2^2}{(B-A)(C-B)},$$

$$K_3^2 = -\frac{AB\mu_0^2 \chi_3^2}{(C-B)(C-A)},$$

ove $\mu_0 = m''/\varrho^* \varrho s_1$.

Tali valori delle K_i^2 sono manifestamente inaccettabili.

Tuttavia è possibile soddisfare le (51) scegliendo, ad esempio ⁴⁾

$$(52) \quad K_2 = 0 \quad \chi_2 \equiv s_2^2 B + \varrho^* \varrho^2 = 0.$$

Dopo ciò, dalle (50) si ha

$$(53) \quad K_1 = -\frac{\varrho(B-A)a_1}{Bs_1}, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \frac{\varrho(C-B)a_3}{Bs_1}.$$

Sostituendo in (44) si ottiene

$$(54) \quad \begin{cases} (B-A)^2 a_1^2 + (C-B)^2 a_3^2 = B^2 s_1^2 \\ (B-A) a_1^2 - (C-B) a_3^2 = Bs_1^2, \end{cases}$$

da cui

$$(55) \quad a_1 = R_0 R_1 s_1, \quad a_3 = R_0 R_3 s_1.$$

Sostituendo successivamente in (53), segue

$$(56) \quad K_1 = -\varrho \mathcal{R}_1, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \varrho \mathcal{R}_3,$$

⁴⁾ Si osservi, incidentalmente, che la (52₂), tenuto conto di (44₁) e (45'), permette il calcolo del modulo di \mathbf{K} : $\varrho^2 = B^2 s_2^4 / |OG^*|^2$.

ove per brevità si è posto

$$(57) \quad \begin{cases} R_0 = \sqrt{\frac{B}{C-A}}, & R_1 = \pm \sqrt{\frac{C}{B-A}}, & R_3 = \pm \sqrt{\frac{A}{C-B}} \\ \mathcal{R}_1 = \pm \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}, & \mathcal{R}_3 = \pm \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}. \end{cases}$$

Da (42₁), per mezzo di (55) e (56), si ha

$$(58) \quad \begin{cases} b_1 = -(\mathcal{R}_3 a_2 + \mathcal{R}_1 m'') \\ b_2 = R_1 R_3 s_1 \\ b_3 = -(\mathcal{R}_1 a_2 - \mathcal{R}_3 m''). \end{cases}$$

Tenendo conto di (52₂), le (47) divengono

$$(59) \quad \begin{cases} \sigma \mathbf{a} = \frac{B}{\varrho} (s_1 \mathbf{K} + \varrho \mathbf{a}) \\ \sigma \mathbf{b} = \frac{B}{\varrho} \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}. \end{cases}$$

Ricordando poi le (55), (56) e (58) si può verificare che la prima di queste relazioni è identicamente soddisfatta mentre dalla seconda si ha

$$(55') \quad a_2 = R_1 R_3 m''.$$

Dopo ciò le (58) divengono

$$(60) \quad b_1 = -R_0 R_1 m'', \quad b_2 = R_1 R_3 s_1, \quad b_3 = -R_0 R_3 m''.$$

Da (45'), eliminando ϱ^* con (52₂), segue

$$(61) \quad OG_1^* = \frac{s_2^2}{\varrho} B \mathcal{R}_1, \quad OG_2^* = 0, \quad OG_3^* = -\frac{s_2^2}{\varrho} B \mathcal{R}_3.$$

Queste ultime esprimono sostanzialmente le condizioni strutturali che devono verificarsi nel caso di integralità parziale di Hess.

Per mezzo di (42₁), (44), (45') e (47) si può verificare che le equazioni (38_{6,7,10}) sono identicamente soddisfatte.

Le equazioni (38_{3,4}) possono invece soddisfarsi approfittando dell'arbitrarietà di ε ; anzi, in generale, è possibile determinare sei delle nove ε_{rs} .

Restano infine le equazioni (39) e (40). Da (39₁) e (40₁) si ha

$$(62) \quad k_z = -\frac{\varrho^* \varrho^3 a^2 \sin^2 \mathbf{a} \widehat{\mathbf{K}}}{s_2^3}, \quad 2E = \varrho^* \varrho^2 \frac{2s_2^2 - a^2 \sin^2 \mathbf{a} \widehat{\mathbf{K}}}{s_2^2},$$

mentre le rimanenti equazioni (39) e (40) sono identicamente soddisfatte.

È ormai facile, sostituendo in (3) e (2) le (42) e le (38_{3,4}), scrivere le *formule fondamentali* che caratterizzano una classe di movimenti \mathcal{P}_ε , dinamicamente possibili, per il solito pesante \mathcal{C} :

$$(63) \quad \begin{cases} \omega = \mathbf{a} \cos \chi + \frac{\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}}{\varrho} \sin \chi \\ \mathbf{c} = \frac{\varrho \mathbf{a} + s_1 \mathbf{K}}{s_2} \cos \chi + \frac{\mathbf{K} \wedge \mathbf{a}}{s_2} \sin \chi - \mathbf{K}, \end{cases}$$

ove \mathbf{a} e \mathbf{K} sono dati da (55), (55') e (56); s_1 , m'' sono arbitrari, mentre le due rimanenti costanti s_2 e ϱ devono soddisfare ad una delle equazioni (61). Inoltre

$$(64) \quad \cos \chi = \frac{1 - \tau^2}{1 + \tau^2}, \quad \sin \chi = \frac{2\tau}{1 + \tau^2}$$

sono funzioni del tempo definite dal fatto che τ dev'essere soluzione dell'equazione (35) e l'integrazione di questa introduce un'altra costante arbitraria. Altra costante d'integrazione si ottiene quando si vuole passare alle coordinate di posizione di \mathcal{C} . In definitiva si hanno cinque costanti arbitrarie. Però bisogna tenere conto della condizione $c^2 = 1$ e del fatto che vi sono ∞^1 coppie di diametri coniugati che danno luogo alla medesima ellisse. Per togliere questa arbitrarierà non essenziale, e conseguire, ad un tempo, una più

semplice rappresentazione dei moti (63) conviene imporre la condizione che \mathbf{a} e \mathbf{b} abbiano il significato di semiassi dell'ellisse descritta dal secondo estremo di $\mathbf{0}$, ω .

Poichè

$$(65) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -s_1 m'',$$

si riconosce che la detta condizione equivale a supporre nullo uno dei due parametri s_1 e m'' .

Quindi in definitiva, da (63) seguono, come si vedrà esplicitamente dagli sviluppi dei nn. successivi, due classi distinte di ∞^3 movimenti.

Dal punto di vista della teoria delle precessioni generalizzate conviene pure, oltre alle (63), dare le formule che caratterizzano l'omografia ε . Si tratta, in effetti, di esplicitare la (2), tenendo conto delle (63) medesime. Data l'arbitrarietà di χ si ottiene:

$$(66) \quad \begin{cases} \varepsilon \mathbf{a} = \frac{\varrho}{s^2} \left(\mathbf{a} + \frac{s_1}{\varrho} \mathbf{K} \right) \\ \varepsilon (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) = \frac{\varrho}{s_2} \mathbf{K} \wedge \mathbf{a}. \end{cases}$$

Poichè da queste seguono sei equazioni scalari, tre delle nove ε_{rs} ($r, s = 1, 2, 3$) restano arbitrarie, cioè, in generale, i moti (63) possono descriversi come precessioni generalizzate in ∞^3 modi diversi.

Tenute presenti le espressioni di a_i e b_i date da (55), (55') e (60), si riconosce subito che bisogna escludere senz'altro l'eventualità $s_1 = m'' = 0$. Segue pertanto da (66) che ε non può mai ridursi ad una omotetia e quindi si conferma, anche in questo modo, il noto risultato ⁵⁾ di impossibilità, per un solido pesante asimmetrico, di precessioni regolari con asse di precessione verticale.

⁵⁾ G. GRIOLI, *Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico*, Ann. di Mat., ser. IV, t. XXVI, fasc. 3-4 (1947).

Infine, si osservi che per le (63) è soddisfatta la condizione di Hess: $OG \times \sigma\omega = 0$.

4. *Caso* $s_1 = 0$, cioè $m + m' = 0$.

Da (55) segue $a_1 = a_3 = 0$; le componenti di \mathbf{K} , date da (56), rimangono inalterate; invece dalle (60) risulta $b_2 = 0$.

Infine l'equazione (35) diviene

$$(67) \quad \dot{\tau} + m\tau^2 + m''\tau + m = 0.$$

Dopo queste specificazioni alla soluzione (63) si può dare la seguente forma cartesiana

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = -R_0 R_1 m'' \sin \chi, \quad q = R_1 R_3 m'' \cos \chi, \quad r = -R_0 R_3 m'' \sin \chi, \\ c_1 = -\varrho \left(\frac{R_1 R_3 \mathcal{R}_3}{2m} m'' \sin \chi - \mathcal{R}_1 \right), \\ c_2 = \frac{\varrho R_1 R_3 m''}{2m} \cos \chi, \\ c_3 = -\varrho \left(\frac{R_1 R_3 \mathcal{R}_1}{2m} m'' \sin \chi + \mathcal{R}_3 \right). \end{array} \right.$$

Da (68) seguono ∞^3 movimenti.

Con riferimento a tali movimenti da (66) si ha

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \mathbf{a} = \frac{\varrho}{2m} \mathbf{a} \\ \varepsilon (\mathbf{K} \wedge \mathbf{a} + m'' \mathbf{K}) = \frac{\varrho}{2m} \mathbf{K} \wedge \mathbf{a} \end{array} \right.$$

cioè

$$(70) \quad \varepsilon = \left(\begin{array}{ccc} \varepsilon_{11} & \frac{\varrho}{2m} & -\frac{R_1}{R_3} \left(\varepsilon_{11} - \frac{\varrho}{2m} \frac{R_3 \mathcal{R}_3}{R_0} \right) \\ \varepsilon_{21} & \frac{\varrho}{2m} & -\frac{R_1}{R_3} \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{31} & \frac{\varrho}{2m} & -\frac{R_1}{R_3} \left(\varepsilon_{31} - \frac{\varrho}{2m} \frac{R_3 \mathcal{R}_1}{R_0} \right) \end{array} \right).$$

5. *Caso* $m'' = 0$.

In questo secondo caso, le (55) e (56) rimangono inalterate, mentre (55') e (60) si semplificano così

$$(71) \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = R_1 R_3 s_1, \quad b_3 = 0.$$

L'equazione (35) assume la forma

$$(72) \quad \dot{i} + m\tau^2 - m' = 0.$$

Quindi le (63) divengono :

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = R_0 R_1 s_1 \cos \chi, \quad q = R_1 R_3 s_1 \sin \chi, \quad r = R_0 R_3 s_1 \cos \chi \\ c_1 = \frac{A R_0 R_1}{B} \frac{\varrho s_1}{s_2} \cos \chi + \varrho \mathcal{R}_1 \\ c_2 = R_1 R_3 \frac{\varrho s_1}{s_2} \sin \chi \\ c_3 = \frac{C R_0 R_3}{B} \frac{\varrho s_1}{s_2} \cos \chi - \varrho \mathcal{R}_3. \end{array} \right.$$

Tale soluzione, a meno di qualche segno dovuto alla diversa posizione di G rispetto agli assi $0\xi\eta\zeta$, coincide con una soluzione segnalata in una mia precedente nota ⁽²⁾.