RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TULLIO VALENT

Qualche proprieta e applicazione di sistemi di vettori definiti su una superficie

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 41 (1968), p. 306-318

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__41__306_0>

QUALCHE PROPRIETÀ E APPLICAZIONE DI SISTEMI DI VETTORI DEFINITI SU UNA SUPERFICIE

TULLIO VALENT *)

Nel presente lavoro viene discusso il problema dell'esistenza di soluzioni per un sistema di equazioni integrali, in relazione alla geometria della superficie di integrazione, allo scopo, tra l'altro, di vedere entro quali limiti si possono pensare equivalenti una condizione di carattere integrale e una di carattere puntuale.

Ciò può rilevarsi utile in questioni connesse con una impostazione di tipo integrale di problemi di Meccanica; in particolare nella teoria matematica dell'equilibrio elastico, ove permette di dimostrare la possibilità di inversione del teorema di Menabrea nel caso dell'appoggio unilaterale liscio.

1. Sia Σ una superficie semplice generalmente regolare, orientata, limitata, di area finita secondo Lebesgue, e sia $\mathbf{N}$ il versore della normale (orientata) a Σ.

Sia P il punto variabile su Σ e 0 un punto prefissato dello spazio.

Consideriamo il seguente sistema di equazioni integrali nella funzione incognita $q(P)$:

$$(1) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma q\mathbf{N}\, d\Sigma = \mathbf{v} \\ \displaystyle\int_\Sigma q\mathbf{N} \wedge OP\, d\Sigma = \mathbf{w} \end{cases}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico — Università — Padova.

Cerchiamo, in questo primo paragrafo, di dare una caratterizzazione dei tipi di superficie Σ per le quali l'equazione (1.1), oppure l'equazione (1.2), oppure il sistema (1), ammettono soluzione, *comunque siano assegnati i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$.

In altri termini, ci proponiamo di trovare delle condizioni necessarie e sufficienti sulla geometria della superficie Σ affinchè, comunque si scelgano due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sia possibile assegnare su di essa un sistema di vettori [1]) *normali* aventi $\mathbf{v}$ come risultante, oppure $\mathbf{w}$ come momento risultante (rispetto a un punto 0), oppure, insieme, $\mathbf{v}$ come risultante e $\mathbf{w}$ come momento risultante.

Dimostreremo precisamente che:

(a) *L'equazione* (1.1) *ammette soluzione, qualunque sia il vettore* $\mathbf{v}$, *se e solo se non esiste alcun vettore costante ortogonale a* N *su* Σ. *Ciò equivale a dire se e solo se* Σ *non è una porzione di un cilindro o di un piano*:

(b) *l'equazione* (1.2) *ammette soluzione, qualunque sia il vettore* $\mathbf{w}$, *se e solo se non esiste alcun vettore del tipo delle rotazioni rigide infinitesime* — cioè del tipo $\mathbf{a} \wedge OP$, ($\mathbf{a}$ vettore costante) — *ortogonale a* N *su* Σ. *Ciò equivale a dire se e solo se* Σ *non è una porzione di una superficie di rotazione*;

(c) *il sistema* (1) *ammette soluzione, qualunque siano i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$, *se e solo se non esiste alcun vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi* — cioè del tipo $\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP$, ($\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vettori costanti) — *ortogonale a* N *su* Σ. Naturalmente, tra i vettori del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi si devono pensare inclusi anche i vettori costanti, ($\mathbf{b} = 0$), e i vettori del tipo delle rotazioni rigide infinitesime, ($\mathbf{a} = 0$).

Le superficie che godono di questa proprietà differenziale le chiameremo, per semplicità, *superficie di tipo* $\mathcal{E}$, dal momento che, tra di esse, figurano, (oltre le superficie piane, cilindriche, e di rotazione), le saperficie elicoidali [2]) e che ogni tale superficie appare come l'inviluppo di una famiglia di superficie elicoidali aventi il medesimo asse e il medesimo passo.

---

[1]) È implicito che le nostre considerazioni si riferiscono ai sistemi di vettori definiti su Σ e *integrabili secondo Lebesgue*.

[2]) Superficie generate da un moto elicoidale uniforme di una linea.

Che per ogni superficie elicoidale esiste un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ortogonale alla normale alla superficie stessa, (cioè parallelo al suo piano tangente), è del tutto immediato: in ogni punto P di una superficie elicoidale il piano tangente contiene la tangente in P all'elica direttrice passante per P e quindi è parallelo a un vettore del tipo $\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP$, ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ vettori costanti).

Sia poi Σ una superficie del tipo $\mathcal{E}$ e $\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP$ [3]) il vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ortogonale a $\mathbf{N}$ su Σ; si supponga anzi di aver scelto O tale che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ siano paralleli.

Intersecando Σ con un fascio di piani ortogonali al vettore $\mathbf{a}$ si ottiene un sistema $\{\mathcal{C}(\lambda)\}$ di curve; ad ogni curva del sistema si associ la superficie elicoidale da essa generata nel moto elicoidale, con velocità di traslazione e di rotazione uguali (o proporzionali) rispettivamente ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Si ha in tal modo una famiglia $\{\mathcal{S}(\lambda)\}$ di superficie elicoidali e Σ risulta tangente a ciascuna delle superficie elicoidali $\mathcal{S}(\lambda)$ della famiglia in tutti i punti della curva $\mathcal{C}(\lambda)$; infatti, se P è un punto di una curva $\mathcal{C}(\bar{\lambda})$, il piano per P, parallelo alla tangente in P a $\mathcal{C}(\bar{\lambda})$ e al vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP$, risulta tangente in P sia a Σ che alla superficie elicoidale $\mathcal{S}(\bar{\lambda})$.

Ne segue che Σ è l'inviluppo della famiglia $\{\mathcal{S}(\lambda)\}$ [4]).

---

[3]) Escludiamo i casi banali in cui $\mathbf{a} = 0$, oppure $\mathbf{b} = 0$.

[4]) Sarebbe interessante una analisi approfondita di questa classe di superficie, ma, poichè essa non è strettamente necessaria agli scopi del presente lavoro, ci siamo limitati a mettere in luce le due proprietà qui accennate.

Non è escluso che la classe delle superficie di tipo $\mathcal{E}$ coincida con quella delle superficie elicoidali, soprattutto in considerazione del fatto che l'intersezione di una superficie Σ di tipo $\mathcal{E}$ con un generico cilindro rotondo, avente per asse la retta per O parallela ad $\mathbf{a}$, è costituita — almeno ove Σ e il cilindro non sono tangenti — di eliche cilindriche di ugule passo. (Il punto O, ben inteso, è scelto in modo tale che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ risultino paralleli).

Per convincersene si pensi che, se $\mathcal{C}$ è una curva appartenente all'intersezione di Σ con il cilindro e questi ultimi non sono tangenti nei punti di $\mathcal{C}$, la tangente a $\mathcal{C}$ nel suo punto generico P è ovviamente parallela al vettore $\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP$ e quindi coincide con la tangente all'elica passante per P il cui passo è $2\pi a/b$.

Ne segue che, o $\mathcal{C}$ coincide con tale elica, oppure è l'inviluppo di una famiglia di eliche di uguale passo tracciate su di un medesimo cilindro. Giacchè, come facilmente si riconosce, di una tale famiglia non esiste una curva inviluppo, si conclude che $\mathcal{C}$ è una elica.

2. Andiamo ora a dimostrare le tre proprietà enunciate, iniziando dalla proprietà c), giacchè le altre due sono immediati corollari di questa.

Con riferimento ad una terna cartesiana trirettangola, il sistema (1) si traduce nel sistema scalare

$$
(2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_\Sigma q N_1 \, d\Sigma = v_1 \\ \displaystyle\int_\Sigma q N_2 \, d\Sigma = v_2 \\ \displaystyle\int_\Sigma q N_3 \, d\Sigma = v_3 \\ \displaystyle\int_\Sigma q \, (N_2 \, x_3 - N_3 \, x_2) \, d\Sigma = w_1 \\ \displaystyle\int_\Sigma q \, (N_3 \, x_1 - N_1 \, x_3) \, d\Sigma = w_2 \\ \displaystyle\int_\Sigma q \, (N_1 \, x_2 - N_2 \, x_1) \, d\Sigma = w_3 \, , \end{cases}
$$

essendo

$$
\mathbf{N} \equiv (N_1 , N_2 , N_3), \; OP \equiv (x_1 , x_2 , x_3), \; \mathbf{v} \equiv (v_1 , v_2 , v_3), \; \mathbf{w} \, (w_1 , w_2 , w_3).
$$

* * *

Facciamo vedere intanto che, *se* Σ *non è una superficie di tipo* $\mathcal{E}$, *il sistema* (2) *ammette soluzioni qualunque siano* v_i , w_i.

Sia $\Delta_n = \{\Sigma_i\}_{i=1, \dots , n}$, $(n \geq 6)$, una decomposizione (finita) di Σ [5]). Cerchiamo una soluzione del sistema (2) che sia costante su ciascun elemento Σ_i della decomposizione: $q = k_i$, (k_i costanti), su Σ_i, vale a dire una *funzione semplice.*

---

[5]) In porzioni chiuse e misurabili.

Ci riconduciamo così a discutere il sistema lineare, nelle k_i, seguente:

$$(3) \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} N_1 \, d\Sigma = v_1 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} N_2 \, d\Sigma = v_2 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} N_3 \, d\Sigma = v_3 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} (N_2 x_3 - N_3 x_2) \, d\Sigma = w_1 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} (N_3 x_1 - N_1 x_3) \, d\Sigma = w_2 \\ \sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} (N_1 x_2 - N_2 x_1) \, d\Sigma = w_3 . \end{cases}$$

Se il sistema (3) non è compatibile per v_i, w_i arbitrari, esistono 6 costanti $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)}, \mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)}$, non tutte nulle, tale che risulti

$$\lambda_1^{(n)} \int_{\Sigma_i} N_1 \, d\Sigma + \lambda_2^{(n)} \int_{\Sigma_i} N_2 \, d\Sigma + \lambda_3^{(n)} \int_{\Sigma_i} N_3 \, d\Sigma + \mu_1^{(n)} \int_{\Sigma_i} (N_2 x_3 - N_3 x_2) \, d\Sigma +$$

$$+ \mu_2^{(n)} \int_{\Sigma_i} (N_3 x_1 - N_1 x_3) \, d\Sigma + \mu_3^{(n)} \int_{\Sigma_i} (N_1 x_2 - N_2 x_1) \, d\Sigma = 0,$$

per ogni Σ_i della decomposizione Δ_n.

Ciò significa che esiste un vettore $\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\lambda}_n + \boldsymbol{\mu}_n \wedge OP$, ($\boldsymbol{\lambda}_n \equiv (\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \lambda_3^{(n)})$, $\boldsymbol{\mu}_n \equiv (\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \mu_3^{(n)})$), del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi, definito su Σ e ortogonale in media a $\mathbf{N}$ su ogni Σ_i

della decomposizione Δ_n:

$$\int_{\Sigma_i} \rho_n \times \mathrm{N}\, d\Sigma = 0 .$$

per ogni $\Sigma_i \in \Delta_n$.

Consideriamo una successione $\{\Delta_n\}$ di decomposizioni di Σ sempre più fini [6]) al crescere di n e tali che la massima misura dei loro elementi sia infinitesima al crescere di n.

Il rango della matrice incompleta del sistema (3) associato alla decomposizione Δ_n risulta evidentemente una funzione monotona non decrescente di n e quindi assume il suo massimo valore, (<6), per $n \geq n_0$, essendo n_0 un intero opportuno.

Se il sistema (3) non è compatibile per v_i, w_i arbitrari, in corrispondenza alla decomposizione Δ_{n_0} esiste, come s'è visto, un vettore ρ_{n_0} del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ortogonale in media a N su ogni elemento della decomposizione Δ_{n_0} stessa.

Vedremo ora come ρ_{n_0} risulti ortogonale in media a N anche su ogni elemento di ogni decomposizione successiva Δ_n, $(n > n_0)$, e, di conseguenza [7]), esso sia ortogonale a N (puntualmente) su Σ.

Sia r il rango della matrice incompleta del sistema (3) associato alla decomposizione Δ_{n_0}. Denotiamo simbolicamente questa matrice nel modo seguente:

$$\text{(4)} \qquad \left\| \begin{matrix} a_{1,1}\,, a_{1,2}\,, \dots, a_{1,n_0} \\ a_{2,1}\,, a_{2,2}\,, \dots, a_{2,n_0} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{6,1}\,, a_{6,2}\,, \dots, a_{6,n_0} \end{matrix} \right\| .$$

Per fissare le idee supponiamo — ciò non priva di generalità il nostro ragionamento — che sia r il rango della submatrice for-

---

[6]) Ogni elemento della decomposizione Δ_{n+1} è contenuto in qualche elemento della decomposizione Δ_n.

[7]) In base alle ipotesi fatte su Σ, N e ρ_{n_0} sono vettori continui e quindi è continuo il loro prodotto scalare $\rho_{n_0} \times \mathrm{N}$.

mata dalle prime r righe della matrice (4). La riga $r+1$-ma della matrice (4) risulta allora combinazione lineare delle prime r righe:

$$a_{r+1,s} = \alpha_1 a_{1,s} + \dots + \alpha_r a_{r,s}, \qquad (s = 1, 2, \dots, n_0).$$

Sia

$$(5) \qquad \left\| \begin{matrix} b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,n_0}, \dots, b_{1,\bar{n}} \\ b_{2,1}, b_{2,2}, \dots, b_{2,n_0}, \dots, b_{2,\bar{n}} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{6,1}, b_{6,2}, \dots, b_{6,n_0}, \dots, b_{6,\bar{n}} \end{matrix} \right\|$$

la matrice incompleta del sistema (3) associato a una decomposizione $\Delta_{\bar{n}}$, ove $\bar{n}$ è un intero maggiore di n_0 arbitrariamente fissato. Il suo rango è r.

È ovvio che anche la submatrice della (5) costituita dalle prime r righe della (5) stessa ha rango r e che. perciò, la riga $r+1$-ma della matrice (5) è combinazione lineare delle prime r righe:

$$b_{r+1,h} = \beta_1 b_{1,h} + \dots + \beta_r b_{r,h}, \qquad (h = 1, 2, \dots, \bar{n}).$$

Il nostro asserto resta provato se la r-pla di combinatori $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ coincide con la r-pla $(\beta_1, \dots, \beta_r)$.

Con operazioni elementari (di sostituzione, previa somma) sulle colonne della matrice (5) è possibile pervenire ad una matrice della quale la (4) è una submatrice. Se ne deduce che

$$a_{r+1,s} = \alpha_1 a_{1,s} + \dots + \alpha_r a_{r,s} = \beta_1 a_{1,s} + \dots + \beta_r a_{r,s}, \quad (s = 1, 2, \dots, n_0),$$

d'onde

$$\alpha_i = \beta_i, \qquad (i = 1, 2, \dots r),$$

in virtù del fatto che le prime r righe della matrice (4) sono state supposte linearmente indipendenti.

* * *

La necessità delle condizioni c) è di verifica pressochè immediata; supposto che Σ sia di tipo $\mathcal{C}$ proviamo che il sistema (1) non ammette soluzione per $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ arbitrari.

Sia

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP,$$

($\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ vettori costanti non entrambi nulli), un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ortogonale a N su Σ ; se il sistema (1) ammettesse soluzione per ogni scelta dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si avrebbe

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} - \mathbf{b} \times \mathbf{w} = \mathbf{a} \times \int_{\Sigma} q\, \mathrm{N}\, d\Sigma - \mathbf{b} \times \int_{\Sigma} q\, \mathrm{N} \wedge OP\, d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma} q\, (\mathbf{a} + \mathbf{b} \wedge OP) \times \mathrm{N}\, d\Sigma,$$

da cui

$$\mathbf{a} \times \mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{w}$$

per ogni scelta di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Ma ciò evidentemente è in contraddizione col fatto che $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non sono entrambi nulli.

* * *

A questo punto appare chiaramente come la dimostrazione della prima parte delle affermazioni contenute nell'enunciato delle proprietà *a*) e *b*) rientri, come caso particolare, in quella ora svolta.

Per finire non ci resta che giustificare i seguenti due fatti:

1⁰) se esiste un vettore costante, $\mathbf{a}$, ortogonale a N su Σ, necessariamente Σ è una porzione di un cilindro o di un piano,

2⁰) se esiste un vettore del tipo delle rotazioni rigide infinitesime, $\mathbf{a} \wedge OP$, ortogonale a N su Σ, necessariamente Σ è una porzione di una superficie di rotazione,

il viceversa essendo banale.

Con riferimento ad un sistema cartesiano trirettangolo, (O, x_1, x_2, x_3), con il terzo asse parallelo e concorde al vettore $\mathbf{a}$, sia $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ l'equazione della superficie Σ.

La condizione

$$\mathbf{a} \times \mathrm{N} = 0, \qquad \text{su } \Sigma,$$

porge

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$

epperò, in questo caso, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ risulta essere l'equazione di un cilindro con le generatrici parallele al vettore **a**, o, in particolare, di un piano parallelo ad **a**, (se è nulla anche un'altra derivata parziale della f).

La condizione

$$\mathbf{a} \wedge OP \times \mathrm{N} = 0, \qquad \text{su } \Sigma,$$

porge invece

$$x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$$

cioè implica che $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ sia l'equazione di una superficie di rotazione intorno all'asse x_3, parallelo ad **a**.

3. Con riferimento alla superficie Σ del paragrafo precedente, siano Σ_1 e Σ_2 due porzioni chiuse misurabili (secondo Lebesgue) di Σ, siffatte che

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \qquad \mu(\Sigma_1 \cap \Sigma_2) = 0 \text{ [8]}.$$

Dimostriamo che, *in generale, se un vettore* $\mathbf{v}$ *definito su* Σ *verifica le*

$$(6) \qquad \int_{\Sigma_1} q \, \mathrm{N} \times \mathbf{v} \, d\Sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_2} q \, \mathrm{N} \times \mathbf{v} \, d\Sigma \geq 0,$$

nella classe, diciamola K, *di tutti i vettori* $q\,\mathrm{N}$ *definiti ed equilibrati su* Σ, *paralleli a* N *su* Σ_1, *paralleli e concordi a* N *su* Σ_2, *si ha quasi ovunque*

$$(7) \qquad \mathbf{v} \times \mathrm{N} = 0 \text{ su } \Sigma_1, \qquad \mathbf{v} \times \mathrm{N} \geq 0 \text{ su } \Sigma_2.$$

---

[8]) Con $\mu(\Sigma_1 \cap \Sigma_2)$ si intende indicare la misura di $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Nella nota precedente [9]) ho trovato un risultato analogo, nell'ipotesi, però, che Σ fosse una porzione di piano.

Il fatto enunciato vale « in generale » nel senso che, per dedurre le (7) dalle condizioni integrali (6), non si può prescindere da considerazioni sulla geometria della superficie Σ.

Tuttavia — diciamo subito — le eccezioni si possono avere *al più* quando Σ_1, oppure Σ_2, è una superficie di tipo $\mathcal{C}$, senza che l'intera Σ sia di tipo $\mathcal{C}$.

Infatti la dimostrazione che segue presuppone soltanto che ogni vettore parallelo a **N**, definito su Σ_1, sia equilibrabile con un vettore parallelo a **N**, definito su Σ_2 e viceversa; e ciò è senz'altro vero — in virtù delle considerazioni fatte ai paragrafi precedenti — se si esclude che Σ sia del tipo anzidetto.

A questo proposito giova osservare che, se l'intera Σ è una superficie di tipo $\mathcal{C}$, la compatibilità del sistema [10])

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} N_1\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{q}\, N_1\, d\Sigma \\
&\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} N_2\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{q}\, N_2\, d\Sigma \\
&\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} N_3\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{q}\, N_3\, d\Sigma \\
&\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} (N_2\, x_3 - N_3\, x_2)\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{q}\, (N_2\, x_3 - N_3\, x_2)\, d\Sigma \\
&\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} (N_3\, x_1 - N_1\, x_3)\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{q}\, (N_3\, x_1 - N_1\, x_3)\, d\Sigma \\
&\sum_{i=1}^{n} k_i \int_{\Sigma_i} (N_1\, x_2 - N_2\, x_1)\, d\Sigma = \int_{\Sigma_2} \bar{q}\, (N_1\, x_2 - N_2\, x_1)\, d\Sigma,
\end{aligned}\right.$$

---

[9]) *Qualche proprietà dei sistemi di vettori applicati. Possibili applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità.*

[10]) Cfr. il sistema (3). In queste ipotesi esiste un vettore del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi ortogonale a **N**, *puntualmente*, su Σ.

in corrispondenza a qualche decomposizione di Σ_1 e ove $\bar{q}$ è una funzione assegnata su Σ_2, si deduce dal fatto che ogni vettore definito su Σ (del tipo degli spostamenti rigidi infinitesimi) e ortogonale a $\mathbf{N}$ su Σ_1 è, in questo caso, ortogonale a $\mathbf{N}$ anche su Σ_2.

Naturalmente, l'osservazione resta valida quando si scambino i ruoli di Σ_1 e di Σ_2, cioè quando $\bar{q}$ sia assegnata su Σ_1.

* * *

Mettiamoci nelle ipotesi che Σ non sia una delle superficie eccezionali che abbiamo segnalato.

La (7.2) discende dalla (6.2) in maniera immediata:
se si avesse $\mathbf{v} \times \mathbf{N} < 0$ in un sottoinsieme, $\bar{\Sigma}$, di Σ_2 di area non nulla, preso un vettore $q\,\mathbf{N}$ della classe K, nullo su $\Sigma_2 - \bar{\Sigma}$ e non nullo su $\bar{\Sigma}$ [11]), risulterebbe

$$\int_{\Sigma_2} q\,\mathbf{N} \times \mathbf{v}\, d\Sigma = \int_{\bar{\Sigma}} q\,\mathbf{N} \times \mathbf{v}\, d\Sigma < 0\,,$$

contro l'ipotesi (6.2).

Mettiamo la (6.1) nella forma equivalente

$$\int_{\Sigma_1} q\,\mathbf{N} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{N})\,\mathbf{N}\, d\Sigma = 0. \tag{8}$$

Consideriamo, e indichiamo con lo stesso simbolo $(\mathbf{v} \times \mathbf{N})\,\mathbf{N}$, la restrizione del vettore $(\mathbf{v} \times \mathbf{N})\,\mathbf{N}$ su Σ_1.

Sia $u\,\mathbf{N}$ un vettore definito su Σ_2 che equilibra $(\mathbf{v} \times \mathbf{N})\,\mathbf{N}$ [12]) e risulti

$$u\,\mathbf{N} \begin{cases} = u'\,\mathbf{N}, \ (u' \geq 0), \ \text{su } \Sigma_2', \\ = u''\mathbf{N}, \ (u'' < 0), \ \text{su } \Sigma_2''. \end{cases}$$

---

[11]) Tale vettore, per le ipotesi fatte su Σ, esiste.

[12]) Vale l'osservazione della nota [11]).

Sia poi $w\,\mathrm{N}$ un vettore definito su Σ_1 ed equilibrante $-u''\,\mathrm{N}$. $(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N}$ può scriversi nella forma

$$[(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} + w\,\mathrm{N}] - w\,\mathrm{N},$$

ove $(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} + w\,\mathrm{N}$ è equilibrato da $u'\,\mathrm{N}$ (parallelo e concorde a N) e $w\,\mathrm{N}$ è equilibrato da $-u''\,\mathrm{N}$ (pure parallelo e concorde a N).

Dal fatto che la (8) deve, ovviamente, valere sia quando $q\,\mathrm{N}$ coincide, su Σ_1, con $(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} + w\,\mathrm{N}$, sia quando $q\mathrm{N}$ coincide, su Σ_1, con $w\,\mathrm{N}$, segue:

$$\int_{\Sigma_1} (\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} \times [(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} + w\mathrm{N}]\,d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma_1} [(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} + w\,\mathrm{N}]^2\,d\Sigma - \int_{\Sigma_1} w\,\mathrm{N} \times [(\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} + w\,\mathrm{N}]\,d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma_1} (\mathbf{v} \times \mathrm{N})^2\,d\Sigma + \int_{\Sigma_1} (\mathbf{v} \times \mathrm{N})\,\mathrm{N} \times w\,\mathrm{N}\,d\Sigma =$$

$$= \int_{\Sigma_1} (\mathbf{v} \times \mathrm{N})^2\,d\Sigma = 0.$$

Se ne deduce che $\mathbf{v} \times \mathrm{N} \equiv 0$ quasi ovunque su Σ_1.

* * *

La proprietà messa in luce in questo paragrafo mostra l'equivalenza — almeno entro certe ipotesi ben poco restrittive, che abbiamo precisate — di una condizione di tipo integrale a una condizione di carattere locale e si presta, proprio per questo motivo, a dimostrare la possibilità di *inversione del teorema di* Menabrea [13])

---

[13]) G. Grioli: *Problemi d'integrazione e formulazione integrale del problema fondamentale dell'elastostatica.* Atti del Simposio Internazionale sulle Applicazioni dell'Analisi alla Fisica Matematica; Cagliari-Sassari 1964.

nel caso del vincolo di appoggio unilaterale liscio con supporto rigido o elasticamente cedevole.

Nella nota precedente [14]) avevo dimostrato l'invertibilità del teorema di MENABREA per l'appoggio piano.

Qui possiamo concludere che tale invertibilità sussiste anche se la superficie di appoggio è pressochè generica.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3-6-68.

---

[14]) Cfr. la [9]).