RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

JAAK PEETRE

Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 42 (1969), p. 15-26

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1969__42__15_0>

SUR LA TRANSFORMATION DE FOURIER DES FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

di Jaak Peetre *)

Introduction.

Envisageons la transformation de Fourier

$$\mathfrak{F}f(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}f(x)dx \qquad (-\infty<x,\ \xi<\infty).$$

D'après le théoreme de Hausdorff-Young (voir Zygmund [10], t. II, chap. XII) on sait que si $f\in L_p$ $\{L_p$ par rapport à la mesure de Haar$\}$, $1\leq p\leq 2$, on a $\mathfrak{F}f\in L_q$, $2\leq q\leq\infty$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si on considère, au lieu des fonctions scalaires f, des fonctions f à valeurs dans un espace de Banach A, $\mathfrak{F}$ étant défini par une formule tout à fait analogue, ce résultat n'est plus vrai. En effet on voit facilement que, en général, on n'à même pas que $\vec{f}\in L_p(A)$ entraine $\mathfrak{F}\vec{f}\in L_1^{\text{loc}}(A)$. Donc il est naturel d'introduire la notion suivante. *On dit que A est de type p, $1\leq p\leq 2$, si $\vec{f}\in L_p(A)$ entraine $\mathfrak{F}\vec{f}\in L_q(A)$.* Nous allons étudier, dans cet article, quelques propriétés simples de cette notion, liées à la théorie des *espaces d'interpolation.* En particulier, nous allons démontrer le résultat suivant: *Si A_0 et A_1 sont des espaces de Banach de type p_0 et p_1 respictivement on a*

$$(A_0, A_1)_{\theta,p}\subset[A_0, A_1]_\theta\subset(A_0, A_1)_{\theta,q}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

---

*) Indirizzo dell'A: Tekniska Högskolan i Lund, Fack 725, Lund 7. Sverige.

Ceci peut être regardé comme une extension d'un résultat antérieur (Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 1.1).

Le plan de l'article est le suivant. Au n. 1 on rappelle quelques notions sur les espaces $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ et $[A_0, A_1]_\theta$. Au n. 2 on donne des critères pour qu'un espace soit de type p et on donne aussi des exemples. Au n. 3 on démontre le resultat signalé ci-dessus. Enfin, au n. 4 on indique des applications aux espaces de type Besov.

1. Rappel sur les espaces d'interpolation.

Soient A_0 et A_1 des espaces de Banach tous deux continûment plongés dans un espace vectoriel topologique *separé* $\mathcal{A}$. On designe par A_0+A_1 leur *somme* et par $A_0 \cap A_1$ leur intersection; c'est sont des sous-espaces de $\mathcal{A}$.

a) *La méthode réelle* (voir Lions-Peetre [4], [5], Peetre [7], [8]). Soient θ, p_0, p_1 tels que $0<\theta<1$, $1 \leq p_0 \leq \infty$, $1 \leq p_1 \leq \infty$. On désigne par $(A_0, A_1)_{\theta, p_1, p_0}$[1]) l'espace des éléments $a \in A_0+A_1$ qui peuvent être représentés dans la forme

$$a=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t} \tag{1.1}$$

où u est une fonction à valeurs dans $A_0 \cap A_1$ telle que

$$t^{-\theta}u(t) \in L^*_{p_0}(A_0),\ t^{1-\theta}u(t) \in L^*_{p_1}(A_1) \tag{1.2}$$

$\left\{ L^*_p,\ L_p \text{ par rapport à la mesure } \frac{dt}{t} \right\}$. On le munit de la norme

$$\| a \|_{(A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}} = \inf_u \max \{ \| t^{-\theta}u(t) \|_{L^*_{p_0}(A_0)}, \|t^{1-\theta}u(t) \|_{L^*_{p_1}(A_1)} \}$$

qu'en fait un espace de Banach.

Le cas le plus important est le cas $p_0=p_1=p$. Nous allons écrire

---

[1]) Notation de [7], [8]; celle de [4], [5] était $S(p_0, \theta, A_0; p_1, \theta-1, A_1)$.

simplement $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ du lieu de $(A_0, A_1)_{\theta, p, p}$. On sait (Peetre [7], [8]) que

$$(1.3) \qquad (A_0, A_1)_{\theta, p} = (A_0, A_1)_{\theta, p_0, p_1}, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},$$

à une équivalence de norme près.

b) *La méthode complexe* (voir Calderón [2], [3]).

Soit θ, tel que $0<\theta<1$. On désigne par $[A_0, A_1]_\theta$ l'espace des éléments $a \in A_0 + A_1$ qui peuvent être représentés dans la forme

$$(1.4) \qquad a = U(\theta)$$

où U est une fonction à valeurs dans $A_0 + A_1$, bornée et analytique dans la bande $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ du plan complexe des $\lambda = \alpha + i\beta$, telle que $U(i\beta) = \lim_{\alpha \to 0} U(\alpha + i\beta)$ et $U(\alpha + i\beta) = \lim_{\alpha \to 1} U(\alpha + i\beta)$ {ces limites existent de moins au sens des distributions à valeurs dans $A_0 + A_1$} sont des functions bornées et continues à valeurs dans A_0 et A_1 respectivement:

$$(1.5) \qquad U(i\beta) \in C(A_0), \qquad U(1+i\beta) \in C(A_1).$$

On le munit de la norme

$$\| a \|_{[A_0, A_1]_\theta} = \inf_U \max \{ \| U(i\beta) \|_{C(A_0)}, \; \| U(1+i\beta) \|_{C(A_1)} \}$$

qui en fait un espace de Banach.

Nous aurons besoin du résultat suivant qui se trouve implicitement de moins dans Calderón [3].

LEMME 1.1. *Pour que* $a \in [A_0, A_1]_\theta$ *il suffit que* a *admet la représentation* (1.4), *avec* (1.5) *remplacé par*

$$(1.6) \qquad U(i\beta) \in L_{r_0}(A_0), \; U(1+i\beta) \in L_{r_0}(A_1), \; 0 < r_0, \; r_1 < \infty.$$

DÉMONSTRATION: D'apres [3], n. 9.4, on a:

$$(1.7) \qquad \| a \|_{[A_0, A_1]_\theta} \leq C \max \{ \| U(i\beta) \|_{L_{r_0}(A_0)}, \; \| U(1+i\beta) \|_{L_{r_1}(A_1)} \}$$

si $a \in [A_0, A_1]_\theta$ admet la représentation (1.4), avec

$$U(i\beta) \in L_{r_0}(A_0) \cap C(A_0), \quad U(1+i\beta) \in L_{r_1}(A_1) \cap C(A_1).$$

Soit maintenant Φ_n une suite de fonctions continues telles que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(h)dh = 1, \\ \Phi_n(h) \geq 0, \\ \Phi_n(h) = 0 \text{ pour } |h| \geq \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

et posons

$$U_n(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda + ih)\Phi_n(h)dh,$$

$$a_n = U_n(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} U(\theta + ih)\Phi_n(h)dh.$$

Si (1.6) a lieu effectivement on peut appliquer (1.7) à $U_n - U_m$, $a_n - a_m$. On voit que a_n est une suite de Cauchy dans $[A_0, A_1]_\theta$. Or a_n tend vers a dans $A_0 + A_1$. D'où $a \in [A_0, A_1]_\theta$.

2. Généralités sur les espaces de type p.

DÉFINITION 2.1. *Soit A un espace de Banach quelconque. Soit p avec* $1 \leq \mathrm{p} \leq 2$. *On dit que A est de type p si on a*:

$$\vec{f} \in L_p(A) \Rightarrow \mathfrak{F}\vec{f} \in L_q(A), \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

où $\mathfrak{F}$ *désigne la transformation de Fourier*

$$\mathfrak{F}\vec{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\vec{f}(x)dx, \qquad -\infty < x, \ \xi < \infty.$$

Nous avons le résultat général suivant.

THÉORÈME 2.1. *Soient* A_0 *et* A_1 *comme au* n. 1; *on suppose que* A_0 *est de type* p_0 *et* A_1 *de type* p_1 . *On pose:*

$$\frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

i)*Alors* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ *est de type* p. ii) *Lorsque l'un des espaces* $L_{p_0}(A_0)$*et* $L_{p_1}(A_1)$ *résulte reflexif,* $[A_0, A_1]_\theta$ *est également de type* p.

DÉMONSTRATION: Par hypothèse avons.

$$\mathfrak{F}:\ L_{p_0}(A_0)\to L_{q_0}(A_0),\qquad \frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1,$$

$$\mathfrak{F}:\ L_{p_1}(A_1)\to L_{q_1}(A_1),\qquad \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1.$$

D'où

$$\mathfrak{F}:\ (L_{p_0}(A_0),\ L_{p_1}(A_1))_{\theta,p}\to(L_{q_0}(A_0),\ L_{q_1}(A_1)_{\theta,p} \tag{2.1}$$

ainsi que

$$\mathfrak{F}:\ [L_{p_0}(A_0),\ L_{p_1}(A_1)]_\theta\to[L_{q_0}(A_0),\ L_{q_1}(A_1)]_\theta . \tag{2.2}$$

Or d'après Lions-Peetre [5], chap. VII, § 1.1, nous avons

$$(L_{p_0}(A_0),\ L_{p_1}(A_1))_{\theta,p}=L_p((A_0, A_1)_{\theta,p})$$

et, par la même méthode (utiliser l'inégalité de Jessen)

$$(L_{q_0}(A_0),\ L_{q_1}(A_1))_{\theta,p}\subset L_q((A_0, A_1)_{\theta,p}),\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Donc i) résulte de (2.1). De même, d'après Calderón [3], n. 13.6, nous avons, avec l'hypothesè de reflexivité ci-dessus,

$$[L_{p_0}(A_0),\ L_{p_1}(A_1)]_\theta=L_p([A_0, A_1]_\theta)$$

et

$$[L_{q_0}(A_0),\ L_{q_1}(A_1)]_\theta \subset L_q([A_0\,,\ A_1]_\theta).$$

Donc ii) résulte de (2.2).

Nous avons aussi le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit A reflexif. Alors A et sont dual A' sont au même temps de ttype p.*

DÉMONSTRATION: Nous pouvons excluer le cas $p=1$. (Voir exemple 2.1 ci-dessous.) Par hypothèse on a:

$$\mathfrak{F}:\ L_p(A) \to L_q(A), \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

D'ou par transposition

$$\mathfrak{F}^t:\ (L_q(A))' \to (L_p(A))'.$$

Or, grâce à l'hypotése de reflexivité, nous avons

$$(L_q(A))'=L_q(A'),\ (L_p(A))'=L_q(A').$$

De plus $\mathfrak{F}^t$ peut s'identifier à $\mathfrak{F}$. Donc il vient

$$\mathfrak{F}: L_p(A') \to L_q(A')$$

Envisageons maintenant quelques exemples simples d'espaces de type p.

Exemple 2.1. Tout espace de Banach est type 1.

Exemple 2.2. Tout espace de Hilbert est de type 2 [2]).

Exemple 2.3. L'espace L_p {par rapport à une mesure quelconque}, $1 \leq p \leq 2$, est de type p. En effet, on a:

$$(L_1\,,\ L_2)_{\theta,p}=[L_1\,,\ L_2]_\theta=L_p\,, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{1}+\frac{\theta}{2},$$

---

[2]) Nous ne connaissons aucun espace de type 2 qui ne soit pas un espace de Hilbert.

de sorte qu'on peut utiliser le th. 2.1.

Exemple 2.4. L'espace L_q, $2 \leq q \leq \infty$ est de type p où $\frac{1}{q}+$ $+\frac{1}{p}=1$. En effet, on a: $(L_q)'=L_p$, de sorte qu'on peut utiliser le th. 2.2.

Exemple 2.5. On ne peut pas améliorer les résultats des exemples 2.4 et 2.5. Donc ni L_p ni L_q n'est, en général, de type p_1, $p_1>p$. Démontrons le dans le cas d'une mesure discrète, c'est-à-dire le cas des espaces de suites l_p et l_q. Admettons qu'on a l'inegalité:

$$(2.3) \qquad \int_{|\xi|\leq 1} \| \mathfrak{F}\vec{f}(\xi) \|_{l_p} d\xi \leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| f(x) \|_{l_p}^{p_1} dx \right)^{\frac{1}{p_1}},$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{F}L_{p_1}(l_p) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(l_p)$. Soit f une fonction scalaire à support compact et posons

$$\vec{f}(x)=\vec{f_n}(x)=(f(x+\omega_1),\ f(x+\omega_2),\ \dots,\ f(x+\omega_n),\ 0, \dots)$$

où ω_1, ω_2, ..., ω_n sont choisis tels que les supports des fonctions $f(x+\omega_j)$ ne se rencontrent pas. On a:

$$\mathfrak{F}\vec{f}(\xi)=\mathfrak{F}\vec{f_n}(\xi)=(e^{i\xi\omega_1}\mathfrak{F}f(\xi),\ \dots,\ e^{i\xi\omega_n}\mathfrak{F}f(\xi),\ 0,\ \dots)$$

Appliquons (2.3) avec $\vec{f}=\vec{f_n}$. Il vient:

$$n^{\frac{1}{p}} \int_{|\xi|\leq 1} | \mathfrak{F}f(\xi) | \, d\xi \leq C n^{\frac{1}{p_1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Mais ceci nous donne une contradiction si $p_1>p$. Donc on a:

$$\mathfrak{F}L_{p_1}(l_1) \nsubseteq L_1^{\mathrm{loc}}(l_p)$$

et à fortiori

$$\mathfrak{F}L_{p_1}(l_p) \nsubseteq L_{p_1}(l_p)$$

si $p_1 > p$. Le cas de l_q se traite par une méthode analogue ou par intermediaire du th. 2.2.

3. **Un rapport entre la méthode réelle et la méthode complexe.**

D'après Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 1.1, on sait qu'on a toujours

$$(A_0\,,\ A_1)_{\theta,1} \subset [A_0\,,\ A_1]_\theta \subset (A_0\,,\ A_1)_{\theta,\infty}\,, \tag{3.1}$$

On va maintenant donner une généralisation de ce résultat.

THÉORÈME 3.1. *Soient A_0 et A_1 comme au n. 1, on suppose que A_0 est de type p_0 et A_1 de type p_1. Alors on a*:

$$(A_0\,,\ A_1)_{\theta,p} \subset [A_0\,,\ A_1]_\theta \subset (A_0\,,\ A_1)_{\theta,q}\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \qquad \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}.$$

DÉMONSTRATION: La preuve se fait par une extension de la méthode [5]. Soit $a \in (A_0\,,\ A_1)_{\theta,p}$. D'après (1.3) on a la représentation

$$a=\int_0^\infty u(t)\,\frac{dt}{t}$$

avec

$$t^{-\theta}u \in L^*_{p_0}(A_0),\ t^{1-\theta}u \in L^*_{p_1}(A_1).$$

Posons:

$$U(\lambda)=\mathfrak{M}u(\lambda)=\int_0^\infty t^{\lambda-\theta}u(t)\,\frac{dt}{t} \quad \text{(transformation de type Mellin).}$$

On voit aussitôt que $U(\lambda)$ est une fonction analytique à valeurs dans A_0+A_1 avec

$$a=U(\theta).$$

Mais par un changement de variable ($t=e^{-x}$) la transformation de Mellin $\mathfrak{M}$ se ramène à la transformation de Fourier $\mathfrak{F}$. Donc on peut appliquer l'analogue du théorème de Hausdorff-Young pour $\mathfrak{M}$ et on trouve

$$U(i\beta)\in L_{q_0}(A_0),\ U(1+i\beta)\in L_{q_1}(A_1), \qquad \frac{1}{p_i}+\frac{1}{q_i}=1.$$

D'où $a\in[A_0, A_1]_\theta$ par le lemme 1.1. Inversement, soit $a\in[A_0, A_1]_\theta$. On a alors la représentation

$$a=U(0),\ U(i\beta)\in C(A_0),\ U(1+i\beta)\in C(A_1).$$

Mais ici on peut remplacer $U(\lambda)$ par $\Phi(\lambda)U(\lambda)$ où $\Phi(\lambda)$ est une fonction analytique scalaire, avec $\Phi(\theta)=1$, à decroissance assez rapide à l'infini. Donc on peut supposer que

$$U(i\beta)\in L_{p_0}(A_0),\ U(1+i\beta)\in L_{p_1}(A_1).$$

Si l'on définit à l'aide de

$$u(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{i\alpha-\infty}^{i\alpha+\infty} t^{\lambda-\theta}U(\lambda)d\lambda$$

il vient maintenant:

$$a=\int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t},\ t^{-\theta}u(t)\in L^*_{q_0}(A_0),\ t^{1-\theta}u(t)\in L^*_{q_1}(A).$$

D'où $a\in(A_0, A_1)_{\theta,q}$, d'après (1.3).

Remarque 3.1. Les exemples 2.3 et 2.4 montrent qu'on ne peut pas améliorer ce résultat en général.

4. **Quelques application.**

On se place sur l'espace numérique R^n; L_p désignent les L_p par rapport à la mesure de Haar, W_p^m les espaces de Sobolev (m

entier ≥ 0, $1 \leq p \leq \infty$). On pose

$$B_p^{s,r} = (L_p\,,\; W_p^m)_{\theta,r} \qquad (\text{« espace de Besov »})$$

et

$$H_p^s = [L_p\,,\; W_p^n]_\theta$$

avec $\theta = \frac{s}{m}$, $0 < s < m$. Ci dessous nous prenons $1 < p < \infty$. On sait alors que ces espaces, à une équivalence de norme près, ne dépendent pas de m (d'après Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 2.1 respectivement Calderón [3], n. 12.3). (On sait aussi que $H_p^m = W_p^m$, m entier >0). Comme W_p^m, est isomorphe à L_p (suite du théorème du Michlin [6] sur les multiplicateurs de Fourier), il est de type p pour $1 < p \leq 2$. Donc en appliquant le th. 3.1 on retrouve le résultat suivant (voir Besov [1], Taibleson [1])

$$(4.1) \qquad B_p^{s,p} \subset H_p^s, \qquad 1 < p \leq 2,\; s > 0.$$

D'une façon analogue on montre

$$(4.2) \qquad H_q^s \subset B_q^{s,q}, \qquad 2 \leq q < \infty.$$

(Ces résultats valent encore pour $p=1$ et $q=\infty$ ce que résulte aussitôt par application de (3.1).) Le th. 3.1 donne aussi, par exemple dans le cas de (4.1),

$$H_p^s \subset B_p^{s,q} \qquad 1 < p \leq 2, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Mais c'est sans intêret parce que par d'autres méthodes (par intermédiaire d'un théorème de type Paley-Littlewood) on peut montrer (voir Taibleson 9) que

$$H_p^s \subset B_p^{s,2}, \qquad 1 < p \leq 2$$

résultat nettement plus fort parce que, d'une façon générale $B_p^{s,r_1} \subset B_p^{s,r_2}$ pour $r_1 \leq r_2$. Signalons toute fois une généralisation de (4.1), qui est nouvelle, semble-t-il, qui résulte par application de nos méthodes:

$$(4.3) \qquad (H^{s_0}_{p_0}, H^{s_1}_{p_1})_{\theta,p} \subset H^s_p,$$

$$s=(1-\theta)s_0+\theta s_1, \; \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \; 1<p_0, \; p_1 \leq 2.$$

En effet, d'après le th. 3.1 il vient

$$(H^{s_0}_{p_0}, H^{s_1}_{p_1})_{\theta,p} \subset [H^{s_0}_{p_0}, H^{s_1}_{p_1}]_\theta$$

et d'après un résultat qui est implicite dans Calderón [2]

$$[H^{s_0}_{p_0}, H^{s_1}_{p_1}]_\theta = H^s_p.$$

De même on trouve une généralisation analogue de (4.2)

$$(4.4) \qquad H^s_q \subset (H^{s_0}_{q_0}, H^{s_1}_{q_1})_{\theta,p},$$

$$s=(1-\theta)s_0+\theta s_1, \; \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}, \; 2\leq q_0, \; q_1<\infty.$$

On notera que pour $p_0=p_1=p$ respectivement $q_0=q_1=q$ on retrouve (4.1) respectivement (4.2), ceci grâce à Lions-Peetre [5], chap. IV, th. 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] O. V. Besov: *Etude d'une classe d'espaces de fonctions liée aux théorèmes de plongement et de prolongement,* Trudy Mat. Inst. Steklov, 60 (1961), 42-81. (En russe).

[2] A. P. Calderón: *Intermediate spaces and interpolation,* Studia Math. (Série spéciale) 1 (1963), 31-34.

[3] A. P. Calderón: *Intermediate spaces and interpolation, the complex method,* Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[4] J. L. Lions - J. Peetre: *Propriétés d'espaces d'interpolation,* C.R. Acad. Sci. Paris 253 (1961), 1747-1749.

[5] J. L. Lions - J. Peetre: *Sur une classe d'espaces d'interpolation,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 19 (1964), 5-68.

[6] S. G. MICHLIN: *Sur les multiplicateurs des integrales de Fourier,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 109 (1956), 701-703. (En russe).

[7] J. PEETRE: *Nouvelles propiétés d'espaces d'interpolation,* C.R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 1424-1426.

[8] J. PEETRE: *Sur le nombre de paramétres dans la définition de certains espaces d'interpolation,* Ricerche Mat. 12 (1963) 248-261.

[9] M. H. TAIBLENSON: *On the theory of Lipschitz spaces of distributions in Euclidean n-space,* I. *Principal properties,* J. Math. Mech. 13 (1964), 407-419.

[10] A. ZYGMUND: *Trigonometrical series,* Cambridge. 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 maggio 1968.