RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO BIROLI

Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution avec des fonctionnelles non différentiables

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 299-318

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__299_0>

SOLUTIONS PRESQUE PÉRIODIQUES DES INÉQUATIONS D'ÉVOLUTION AVEC DES FONCTIONNELLES NON DIFFÉRENTIABLES

MARCO BIROLI *)

1. Introduction et énoncés.

Dans la suite nous indiquons par V un espace de Banach réel reflexif de norme $\| \;\|$, qu'on peut, sans perdre de generalité, supposer strictement convexe, par V^* son dual, par $\langle\ ,\ \rangle$ la dualité entre V et V^*, par $\| \;\|^*$ la norme duale de V^*; nous indiquons par H un espace de Hilbert identifié avec son dual pour le produit scalaire $(\ ,\ )$, par $|\ \ |$ la norme induite par $(\ ,\ )$ sur H.

Nous supposons V identifié avec un sous-espace dense de H et que l'injection de V dans H est compacte.

Soit $\boldsymbol{K} \subset V$ fermé convexe, $0 \in \boldsymbol{K}$.

Soit $A : V \to V^*$ avec les propriétés suivantes:

(a) A est monotone, borné, hémicontinu

(b) $\langle Av, v \rangle \geq \alpha \| v \|^p$, $\alpha > 0$, $p \geq 2$, $\qquad \forall v \in V$

(c) $\langle Aw - Av, w - v \rangle \geq \alpha \| w - v \|^p$ $\qquad \forall v, w \in V$

(d) $\| Av \|^* \leq c \| v \|^{p-1} + K$, $c > 0$ $\qquad \forall v \in V$.

Soit, enfin $\psi(\eta) : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ une fonction continue.

Dans de travaux précédents l'A. a traité le problème de l'existence et de l'unicité d'une solution presque périodique d'une inéquation parabolique et a obtenu les résultats suivants:

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico del Politecnico di Milano.

Istituto di Matematica del Politecnico di Milano; lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

Th. I. *Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans V^*. Considerons l'inéquation d'évolution*

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle -$$

$$(1,1) \qquad -\langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\} dt \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\{|v(t_2)-u(t_2)|^2 - |v(t_1)-u(t_1)|^2\} \qquad t_1 \leq t_2\,;$$

$$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \text{ avec } v'(t) \in \mathfrak{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V^*) \text{ et } v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. sur } \boldsymbol{R};$$

$$u(t) \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \cap C(\boldsymbol{R};\ H) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. sur } \boldsymbol{R}$$

(p' index conjugé à p).

Cette inéquation d'évolution a, au moins, une solution presque périodique dans H et S^p-presque périodique dans V, telle que $\forall \tau \in \boldsymbol{R}$

$$|u(t+\tau)-u(t)| \leq \varphi(\sup_{t\in\boldsymbol{R}} \|f(t+\tau)-f(t)\|^*)$$

$$\int_0^1 \|u(t+\tau+\eta)-u(t+\eta)\|^p\, d\eta \leq \varphi(\sup_{t\in\boldsymbol{R}} \|f(t+\tau)-f(t)\|^*)$$

où $\varphi(\sigma)$ est une fonction continue telle que $\lim_{\sigma\to 0} \varphi(\sigma)=0$ (cfr. [1]).

Th. II. *Soit $f(t) \in \mathfrak{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V^*)$ et supposons que la inéquation d'évolution* (1,1) *ait une solution $u(t)$ bornée dans H; alors $u(t)$ est l'unique solution de* (1,1) *bornée dans H* (cfr. [2]).

Th. III. *Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans V^* et*

$$\|f(t)\|^* \leq R.$$

Supposons que $p=2$ et

$$|\psi(\eta_1)-\psi(\eta_2)| \leq M|\eta_1-\eta_2|,\ M < \frac{\gamma^s\alpha^2}{R}$$

pour $\eta_1,\ \eta_2 \leq \dfrac{R}{\gamma\alpha}$ (où γ est la constante d'injection de V dans H).

Considérons l'inéquation d'évolution

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle +$$

$$(1,2) \qquad + \psi(|\, u(t-\delta)\,|)\langle u(t),\ v(t)-u(t)\rangle - \langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\}dt \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\{|\, v(t_2)-u(t_2)\,|^2 - |\, v(t_1)-u(t_1)\,|^2\} \qquad t_1 \leq t_2,\ \delta > 0;$$

$$\forall v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \text{ avec } v'(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}; V^*) \text{ et } v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. sur } \boldsymbol{R}.$$

$$u(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \cap C(\boldsymbol{R};\ H) \qquad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. sur } \boldsymbol{R}.$$

Cette inequation d'évolution a, au moins, une solution presque périodique dans H et $\mathcal{S}^2$-presque périodique dans V, telle que $\forall \tau \in \boldsymbol{R}$

$$|\, u(t+\tau)-u(t)\,| \leq \varphi(\operatorname*{Sup}_{t\in \boldsymbol{R}} \|\, f(t+\tau)-f(t)\,\|^*)$$

$$\int_0^1 \|\, u(t+\tau+\eta)-u(t+\eta)\,\|^p\, d\eta \leq \varphi(\operatorname*{Sup}_{t\in \boldsymbol{R}} \|\, f(t+\tau)-f(t)\,\|^*)$$

où $\varphi(\sigma)$ *est une fonction continue telle que* $\lim_{\sigma\to 0} \varphi(\sigma) = 0$ (cfr. [3]).

Sibony, [6], a traité le problème de l'existence et de l'approximation de la solution d'inéquations variationnelles elliptiques, où il y a des fonctionnelles non différentiables et Duvaut - Lions, [4] [5], ont traité le problème de Cauchy, pour quelques cas d'inéquation d'évolution, où il y a des fonctionnelles non différentiables.

Notre but est, maintenant, d'étudier le problème de la solution presque périodique d'inéquations paraboliques, ou il y a des fonctionnelles non différentiables; nous utiliserons la formulation abstraite suggerée par [6] et obtiendrons des résultats, qui etendent les Th. I, II et III.

TH. IV. *Soient* $H(v)$ *et* $H_\varepsilon(v)$ *des fonctionnelles convexes sur* V.

Supposons que, $\forall \varepsilon > 0$, $H_\varepsilon(v)$ *soit Gateux-différentiable avec une dérivée bornée et hémicontinue, monotone de* V *dans* V^*, *telle que*

$$\|\, H'_\varepsilon v\,\|^* \leq c'\, \|\, v\,\|^{p-1} + K', \qquad c' > 0 \quad \forall v \in V.$$

Supposons en outre que

a) si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(t)=u(t)$ dans $\mathfrak{L}^p(t_1\,,\, t_2\,;\, V)$, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} H(u_n(t)dt=\int_{t_1}^{t_2} H(u(t))dt$$

b) si $v(t)\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(v(t))dt=\int_{t_1}^{t_2} H(v(t))dt;$$

c) si $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, u_\varepsilon(t)=\xi(t)$ dans $\mathfrak{L}^p(t_1\,,\, t_2\,;\, V)$, on a

$$\min\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(u_\varepsilon(t))dt\geq\int_{t_1}^{t_2} H(\xi(t))dt.$$

Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans V^*. Considérons l'inequation d'évolution

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle+\langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle+\\ (1,3)\qquad &+H(v(t)-H(u(t))-\langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\}dt\geq\\ &\geq\tfrac{1}{2}\{|\,v(t_2)-u(t_2)\,|^2-|\,v(t_1)-u(t_1)\,|^2\}\qquad t_1\leq t_2\end{aligned}$$

$$\forall v(t)\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R},\ V)\ \text{avec}\ v'(t)\in\mathfrak{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V^*)\ \text{et}\ v(t)\in\boldsymbol{K}\ \text{p.p. sur}\ \boldsymbol{R}$$

$$u(t)\in\mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V)\cap C(\boldsymbol{R};\ H)\quad u(t)\in\boldsymbol{K}\ \text{p.p. sur}\ \boldsymbol{R}.$$

Cette inéquation a une unique solution $u(t)$ presque périodique dans H et $\mathfrak{S}^p$ presque périodique dans V.

TH. V. *Soient $H(v)$ et $H_\varepsilon(v)$ comme au* Th. IV.

Soit $p=2$ et $f(t)$ presque périodique dans V^* avec

$$\|\,f(t)\,\|^*\leq R.$$

Supposons que $\psi(\eta): \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}_+$ *satisfait aux hypothèses du* Th. III. *Considérons l'inéquation d'évolution*

$$(1,4)\qquad \begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \\ +\psi(|\,u(t-\delta)\,|)\langle u(t),\ v(t)-u(t)\rangle + H(v(t)) - H(u(t)) - \\ -\langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\}dt \geq \\ \geq \tfrac{1}{2}\{|\,v(t_2)-u(t_2)\,|^2 - |\,v(t_1)-(t_1)\,|^2\} \qquad t_1 \leq t_2,\ \delta>0\end{gathered}$$

$\forall v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V)$ avec $v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V^*)$ et $v(t) \in \boldsymbol{K}$ p.p. sur $\boldsymbol{R}$.

$$u(t) \in \mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \cap C(\boldsymbol{R};\ H) \quad u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. sur } \boldsymbol{R}.$$

Cette inéquation a, au moins, une solution presque périodique dans H et $\mathfrak{S}^2$*-presque périodique dans V.*

Nous considérons, en suite, un cas particulier interessant du Th. IV. Nous posons

$$V = H^1(\Omega) \qquad H = \mathfrak{L}^2(\Omega),$$

où $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ est un ouvert borné avec $\Gamma = \partial\Omega$ suffisamment regulière et

$$\boldsymbol{K} = V$$

$$\langle Au,\ v\rangle = a(u,\ v) = \int_\Omega \left\{\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x)u(x)v(x)\right\}dx$$

où

$$a_{ij}(x),\ a_0(x) \in \mathfrak{L}^\infty(\Omega)$$

$$\sum_{ij=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n |\,\xi_i\,|^2$$

p.p. dans Ω et $\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \boldsymbol{R}^n$,

$$a_0(x) \geq \delta > 0 \qquad \text{p.p. dans } \Omega$$

$$H(u)=g\int_{\Gamma}|u(x)|\,d\sigma \qquad g>0.$$

On a:

Th. VI. *Soit $f(t)$ une fonction presque périodique dans $(H^1(\Omega))^* \cap$ $\cap H^{-1}(\Omega)$.*

Dans le cas particulier considéré, l'inéquation d'évolution (1,3) *a,* $\forall g>0$, *une unique solution $u_g(t)$ presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathfrak{S}^2$-presque périodique dans $H^1(\Omega)$.*

On a, en outre, que

$$\lim_{g\to\infty}{}^* u_g(t)=u_D(t)$$

$$\lim_{g\to 0}{}^* u_g(t)=u_N(t)$$

dans $\mathfrak{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ H^1(\Omega))$, où $u_D(t)$ est solution du problème

$$(1,5)\qquad \begin{cases} \left\langle \dfrac{du}{dt},\ v\right\rangle+\langle Au(t),\ v\rangle=\langle f(t),\ v\rangle & \forall v\in H_0^1(\Omega)\\ u(t)\in H_0^1(\Omega)\quad \text{p.p.} \end{cases}$$

et $u_N(t)$ est solution du problème

$$(1,6)\qquad \begin{cases} \left\langle \dfrac{du}{dt},\ v\right\rangle+\langle Au(t),\ v\rangle=\langle f(t),\ v\rangle & \forall v\in H^1(\Omega)\\ u(t)\in H^1(\Omega)\quad \text{p.p.} \end{cases}$$

Remarque. Nous nous posons dans les conditions du Th. VI; nous observons, [4], que l'inéquation considérée est équivalante formellement au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{ij=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+a_0(x)u(t,\ x)=f(t,\ x)$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|\le g \qquad u\,\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\le 0 \qquad u\left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu_A}\right|-g\right)=0 \qquad \text{p.p. sur } \Gamma\times\boldsymbol{R}$$

où nous supposons $f(t, x) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^2(\Omega))$ et par $\dfrac{\partial}{\partial \nu_A}$ nous indiquons dérivation conormale pour l'opérateur A considéré.

Le problème (1,5) est, supposé $f(t) \in H^{-1}(\Omega)$ p.p., la formulation variationelle du problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a_0(x) u(t, x) = f(t, x)$$

$$u(t, x)\,|_{\Gamma} = 0 \qquad\qquad \text{p.p. sur } \Gamma \times \boldsymbol{R}.$$

Enfin, si on suppose $f(t, x) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^2(\Omega))$, le problème (1,6) est formellement équivalent au problème

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) + a_0(x) u(t, x) = f(t, x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \qquad\qquad \text{p.p. sur } \Gamma \times \boldsymbol{R}.$$

Dans le paragraphe 2 nous démontrons le Th. IV par une procédé de regularisation; le Th. V peut être démontré par le même procédé et nous ne développerons pas la démonstration.

Dans le § 3 nous appliquons le Th. IV à l'exemple considéré et démontrons le Th. VI.

2. Démonstration du Th. IV.

a) *Existence.*

Considérons l'inéquation d'évolution

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle v'(t), v(t)-u(t) \rangle + \langle Au(t), v(t)-u(t) \rangle + \\ (2,1) \qquad &+ \langle H'_\varepsilon u(t), v(t)-u(t) \rangle - \langle f(t), v(t)-u(t) \rangle \} dt \geq \\ &\geq \tfrac{1}{2} \{ |\, v(t_2) - u(t_2) \,|^2 - |\, v(t_1) - u(t_1) \,|^2 \} \end{aligned}$$

$$\forall v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V)\ v'(t) \in \mathfrak{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V^*)\ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}\}$$

$$u(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathfrak{L}^p_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \cap C(\boldsymbol{R};\ H)\ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}\}.$$

Dans les hypothèses faites, cette inéquation d'évolution a une unique solution $u_\varepsilon(t)$ presque périodique dans H et $\mathcal{S}^p$-presque périodique dans V, telle que $\forall \tau \in \boldsymbol{R}$

$$(2,2) \qquad | u_\varepsilon(t+\tau) - u_\varepsilon(t) | \leq \varphi(\operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} \| f(t+\tau) - f(t) \|^*)$$

$$(2,3) \qquad \int_0^1 \| u_\varepsilon(t+\tau+\eta) - u_\varepsilon(+\eta) \|^p \, d\eta \leq \varphi(\operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} \| f(t+\tau) - f(t) \|^*).$$

Nous pouvons, en outre, affirmer, [1], que

$$(2,4) \qquad |u_\varepsilon(t)| \leq C$$

$$(2,5) \qquad \int_0^1 \| u_\varepsilon(t+\eta) \|^p \, d\eta \leq C.$$

où C ne dépende pas de ε.

De (2,2) on a que les $u_\varepsilon(t)$ sont equicontinues dans H. Si, alors, on procéde comme dans [1], on a que il est possible d'extraire de $\{u_\varepsilon(t)\}$ une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{u_\varepsilon(t)\}$, telle que.

$$(2,6) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = u(t) \text{ dans } C(t_1,\ t_2\ ;\ H)$$

$$(2,7) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*} u_\varepsilon(t) = u(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^p(t_1,\ t_2\ ;\ V)$$

$$(2,8) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0}{}^{**} u_\varepsilon(t) = u(t) \text{ dans } \mathcal{S}^p(V) \qquad \text{(cfr. [1])}$$

(où par lim** nous indiquons la limite dans la topologie faible*).

On a alors

$$(2,9) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} | v(t_2) - u_\varepsilon(t_2) |^2 = | v(t_2) - u(t_2) |^2$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} | v(t_1)-u_\varepsilon(t_1) |^2 = | v(t_1)-u(t_1) |^2 \tag{2,10}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} \langle f(t),\ v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle dt= \\ = \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle dt\end{aligned} \tag{2,11}$$

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t),\ v(t)-u_\varepsilon(t)\rangle dt= \\ = \int_{t_1}^{t_2} \langle v(t),\ v(t)-u(t)\rangle dt.\end{aligned} \tag{2,12}$$

Observons que $\{Au_\varepsilon(t)\}$ est bornée dans $\mathfrak{L}^{p'}(t_1, t_2; V^*)$; on peut, alors, sans perdre de généralité, supposer

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*} Au_\varepsilon(t) = \xi(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^{p'}(t_1, t_2; V^*). \tag{2,13}$$

Démontrons maintenant que $Au(t) = \xi(t)$.

Considérons l'inéquation (2,1); il est évident que chaque solution de (2,1) est aussi solution de l'inéquation d'évolution

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \\ + H_\varepsilon(v(t)) - H_\varepsilon(u(t)) - \langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\} dt \geq \\ \geq \tfrac{1}{2}\{| v(t_2)-u(t_2) |^2 - | v(t_1)-u(t_1) |^2\}\end{aligned} \tag{2,14}$$

$$\forall v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathfrak{L}^p_{\text{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \quad v'(t) \in \mathfrak{L}^{p'}_{\text{loc}}(\boldsymbol{R};\ V^*) \quad v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}\}$$

$$u(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathfrak{L}^p_{\text{loc}}(\boldsymbol{R};\ V) \cap C(\boldsymbol{R};\ H),\ v(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p.}\}.$$

Fixons t_1 et t_2 ; il est toujours possible, [1], de trouver une suite $\{u_n(t)\}$ telle que, supposé $u(t_1) \in \boldsymbol{K}$,

$$u_n(t_1) = u(t_1), \; u(t) \in \boldsymbol{K} \text{ pp. dans } (t_1, t_2) \tag{2,15}$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^p(t_1, t_2; v) \tag{2,16}$$

$$u'_n(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H) \tag{2,17}$$

$$\max \lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle u'_n(t), u_n(t) - u(t) \rangle dt \leq 0. \tag{2,18}$$

Posons dans (2,14) $v(t) = u_n(t)$; on a

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u_n(t) \rangle dt \leq \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2} \{ \langle u'_n(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle + \\ &+ H_\varepsilon(u_n(t)) - H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - \langle f(t), u_n(t) - u_\varepsilon(t) \rangle \} dt. \end{aligned} \tag{2,19}$$

Nous observons, maintenant, que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t), - u_n(t) \rangle dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t) - u(t) \rangle dt \end{aligned} \tag{2,20}$$

uniformément pour ε.

On a alors

$$\max_{\varepsilon\to 0}\lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)-u(t)\rangle dt=$$

$$=\max_{n\to\infty}\lim\ \max_{\varepsilon\to 0}\lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)-u_n(t)\rangle dt=$$

$$=\max_{\varepsilon\to 0}\lim\ \max_{n\to\infty}\lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)-u_n(t)\rangle dt\leq$$

$$\leq \max_{n\to\infty}\lim\ \max_{\varepsilon\to 0}\lim \int_{t_1}^{t_2} \{\langle u'_n(t),\ u_n(t)-u_\varepsilon(t)\rangle+ \tag{2,21}$$

$$+H_\varepsilon(u_n(t))-H_\varepsilon(u_\varepsilon(t))-\langle f(t),\ u_n(t)-u_\varepsilon(t)\rangle\}\mathrm{dt}\leq$$

$$\leq \max_{n\to\infty}\lim \int_{t_1}^{t_2} \{\langle u'_n(t),\ u_n(t)-u(t)\rangle+H(u_n(t))-H(u(t))-$$

$$-\langle f(t),\ u_n(t)-u(t)\rangle\}dt\leq 0.$$

De (2,21) et de la monotonie de A, on a, [1],

$$Au(t)=f(t)$$

et

$$\min_{\varepsilon\to 0}\lim \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_\varepsilon(t),\ u_\varepsilon(t)-v(t)\rangle dt\geqq$$

(2,22)

$$\geqq \int_{t_1}^{t_2} \langle Au(t),\ u(t)-v(t)\rangle dt.$$

Démontrons, maintenant, que $u(t)$ est solution de l'inéquation d'évolution (1,3).

Nous observons, en outre, que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(v(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} H(v(t))dt \tag{2,23}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(u_\varepsilon(t))dt \geqq \int_{t_1}^{t_2} H(u(t))dt. \tag{2,24}$$

De (2,9), (2,10), (2,11), (2,12), (2,22), (2,23) et (2,24) on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle +$$

$$+H(v(t))-H(u(t))-\langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\}dt \geq$$

$$\geq \tfrac{1}{2}\{|\,v(t_2)-u(t_2)\,|^2 - |\,v(t_1)-u(t_1\,|^2\};$$

donc $u(t)$ est solution de (1,3).

De (2,2), (2,3), (2,6) et (2,8) on a que $u(t)$ est presque périodique dans H et $\mathcal{S}^p$-presque périodique dans V.

La thèse est ainsi démontrée.

b) *Unicité.*

La partie du Th. IV concernante l'unicité suit du lemme suivant:

LEMMA I. Soit $f(t)\in \mathcal{L}^{p'}_{\mathrm{loc}}$ $(\boldsymbol{R};\ V)$. Considérons l'inéquation d'évolution (1,3) et supposons que cet inéquation ait une solution $u(t)\in \mathcal{L}^\infty$ $(\boldsymbol{R};\ H)$; $u(t)$ est alors l'unique solution de (1,3) dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};\ H)$.

Soient $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions de (1,2) dans $\mathcal{L}^\infty(\boldsymbol{R};\ H)$.

Nous posons

$$w(t) = \frac{u_1(t)+u_2(t)}{2}\,.$$

Considérons t_1 et t_2 fixés et définissons $w_\eta(t)$ comme solution du problème

$$\eta w'_\eta(t) + w_\eta(t) = w(t)$$

$$w_\eta(t_1) = w(t_1)$$

et supposons $w(t_1) \in \boldsymbol{K}$.

On a

(2,25) $$\lim_{\eta \to 0} w_\eta(t) = w(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^p(t_1, t_2; V)$$

(2,26) $$\lim_{\eta \to 0} w_\eta(t) = w(\mathrm{t}) \text{ dans } C(t_1, t_2; H)$$

(2,27) $$w'_\eta(t) \in \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H)$$

(2,28) $$\max_{\eta \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - w(t) \rangle dt \leq 0$$

(2,29) $$w_\eta(t) \in \boldsymbol{K} \text{ p.p. dans } (t_1, t_2)$$

De (2,25) on a que

(2,30) $$\lim_{\eta \to 0} \int_{t_1}^{t_2} H(w_\eta(t)) dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} H(w(t)) dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \frac{H(u_1(t)) + H(u_2(t))}{2} dt.$$

Posons dans (1,3) $v(t) = w_\eta(t)$.

On a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle + \langle Au_1(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle$$
$$+ H(w_\eta(t)) - H(u_1(t)) - \langle f(t), w_\eta(t) - u_1(t) \rangle \} dt \geq$$
$$\geq \tfrac{1}{2} \{ | w_\eta(t_2) - u_1(t_2) |^2 - | w_\eta(t_1) - u_1(t_1) |^2 \}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \{ \langle w'_\eta(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle + \langle Au_2(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle +$$
$$+ H(w_\eta(t)) - H(u_2(t)) - \langle f(t), w_\eta(t) - u_2(t) \rangle \} dt \geq$$
$$\geq \tfrac{1}{2} \{ | w_\eta(t_2) - u_2(t_2) |^2 - | w_\eta(t_1) - u_2(t_1) |^2 \}.$$

Si on fait la semi-somme des deux inéquations, on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle w'_\eta(t),\ w_\eta(t)-w(t)\rangle+\tfrac{1}{2}\langle Au_2(t),\ w_\eta(t)-u_2(t)\rangle$$

$$+\tfrac{1}{2}\langle Au_2(t),\ w_\eta(t)-u_2(t)\rangle+H(w_\eta(t))-\frac{H(u_1(t))+H(u_2(t))}{2}$$

$$-\langle f(t),\ w_\eta(t)-w(t)\rangle\}dt\geq\tfrac{1}{4}\{|\ w_\eta(t_2)-u_1(t_2)\ |^2+$$

$$+|\ w_\eta(t_2)-u_2(t_2)\ |^2-|\ w_\eta(t_1)-u_1(t_1)\ |^2-|\ w_\eta(t_1)-u_2(t_1)\ |^2\}$$

dont, si on passe à la limite pair $\eta\to 0$, de (2,25), (2,26), (2,28) et (2,30) on a

$$-\int_{t_1}^{t_2}\langle Au_1(t)-Au_2(t),\ u_1(t)-u_2(t)\rangle dt\geq$$

$$\geq\tfrac{1}{2}\{|\ u_2(t_2)-u_1(t_2)\ |^2-|\ u_2(t_1)-u_1(t_1)\ |^2\}.$$

De telle relation, si on procede comme dans (2), on démontre la thèse.

3. Démonstration du Th. VI.

Pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathcal{S}^2$-presque périodique dans $H^1(\Omega)$ du problème considéré, il suffit de démontrer que la fonctionelle $H(u)$ satisfait aux hypotheses du Th. IV. La fonctionelle

$$H(u)=g\int_\Gamma |\ u(x)\ |\ d\sigma,\ g>0$$

est convexe et puisque $H^1(\Omega)$ s'injecte avec continuité dans $H^{1/2}(\Gamma)$, si

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t)=u(t) \ \text{dans}\ \mathfrak{L}^2(t_1\,,\ t_2\,;\ H^1(\Omega))$$

on peut affirmer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2} H(u_n(t))dt=\int_{t_1}^{t_2} H(u(t))dt. \tag{3.1}$$

Définissons, maintenant, les fonctionnelles $H_\varepsilon(u)$ dans la façon suivante

$$H_\varepsilon(u)=g\frac{1}{1+\varepsilon}\int_\Gamma |u(x)|^{1+\varepsilon}d\sigma.$$

Il est évident que les fonctionnelles $H_\varepsilon(u)$ sont convexes et ont une Gateaux-dérivée donnée par un opérateur $H'_\varepsilon(u)$ monotone, hémicontinue, positif de $H^1(\Omega)$ dans $(H^1(\Omega))^*$.

On a, pour $v\in H^1(\Omega)$,

$$\langle H'_\varepsilon u,\ v\rangle=g\int_\Gamma u(x)\,|u(x)|^\varepsilon v(x)d\sigma\leq$$

$$\leq \|v(x)\|_{\mathfrak{L}^2(\Gamma)}\cdot\Big(\int_\Gamma |u(x)|^{2\varepsilon}d\sigma\Big)^{1/2}\leq$$

$$\leq \|v(x)\|_{\mathfrak{L}^2(\Gamma)}\cdot\Big(\int_\Gamma |u(x)|^2d\sigma+K'\Big)^{1/2}\leq$$

$$\leq \|v(x)\|_{\mathfrak{L}^2(\Gamma)}(\|u(x)\|_{\mathfrak{L}^2(\Gamma)}+K'')\leq$$

$$\leq \|v(x)\|_{H^1(\Omega)}(C\,\|u(x)\|_{H^1(\Omega)}+K).$$

On a alors

$$\|H'_\varepsilon u\|^*\leq C\,\|u\|+K.$$

Soit maintenant $v(t)\in\mathfrak{L}^2(t_1,\ t_2;\ H^1(\Omega))$; on a

$$\frac{1}{1+\varepsilon}|v(t,\ x)|^{1+\varepsilon}\leq \max\{1,\ |v(t,\ x)|^2\}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{|v(t,\ x)|^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon}=|v(t,\ x)|\ \text{ p.p. sur } (t_1,\ t_2)\times\Gamma.$$

On a alors

$$(3,2) \qquad \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(v(t))dt = \int_{t_1}^{t_2} H(v(t))dt.$$

Soit

$$\lim_{\varepsilon \to 0}{}^{*}\, u_\varepsilon(t) = \xi(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^2(t_1\,,\ t_2;\ H^1(\Omega)).$$

Démontrons que

$$\min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} H_\varepsilon(u_\varepsilon(t))dt \geq \int_{t_1}^{t_2} H(\xi(t))dt.$$

Nous observons, avant tout, que

$$\alpha^{1+\varepsilon} - \alpha \geq -e^{-(1+\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \qquad \forall \alpha \geq 0.$$

On a alors

$$\min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t)))dt \geq$$

$$\geq \min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - H(u_\varepsilon(t)))dt +$$

$$+ \min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t)))dt.$$

Pour (3,1) la fonctionelle $\int_{t_1}^{t_2} H(v(t))dt$ est convexe continue sur $\mathfrak{L}^2(t_1\,,\ t_2\,;\ H^1(\Omega))$; donc cette fonctionelle est semicontinue inférieurement dans la topologie faible de $\mathfrak{L}^p(t_1\,,\ t_2;\ H^1(\Omega))$, dont

$$\min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t)))dt \geq 0.$$

Alors on a

$$\min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} (H_\varepsilon(u_\varepsilon(t)) - H(\xi(t))dt \geq$$

$$\geq \min_{\varepsilon \to 0} \lim \int_{t_1}^{t_2} \left(-e^{-(1+\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) dt = 0.$$

La thèse est ainsi demontrée.

Toutes les hypothèses du Th. IV sont donc valables; nous pouvons, alors, affirmer que dans notre cas particulier l'inéquation d'évolution (1,3) a une unique solution presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathfrak{S}^2$ — presque périedique dans $H^1(\Omega)$.

Indiquons par $u_g(t)$ la solution de (1,3) dans notre cas particulier.

De la démonstration du Th. IV résulte que $\forall g > 0$, on a, $\forall \tau \in \boldsymbol{R}$,

$$|\, u_g(t+\tau) - u_g(t) \,| \leq \varphi(\operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} \|\, f(t+\tau) - f(t) \,\|^*) \tag{3,3}$$

$$\int_0^1 \|\, u_g(t+\tau+\eta) - u_g(t+\eta) \,\|^2 \, d\eta \leq \tag{3,4}$$

$$\leq \varphi(\operatorname*{Sup}_{t \in \boldsymbol{R}} \|\, f(t+\tau) - f(t) \,\|^*).$$

Si nous posons $v(t) = 0$ dans notre inéquation d'évolution, nous obtenons

$$\int_{t_1}^{t_2} H_g(u_g(t))dt + \alpha \int_{t_1}^{t_2} \|\, u_g(t) \,\|^2 \, dt + C^{\text{st.}} \leq$$

$$\leq \Big(\int_{t_1}^{t_2} (\|\, f(t) \,\|^*)^2 dt \Big)^{1/2} \Big(\int_{t_1}^{t_2} \|\, u_g(t) \,\|^2 \, dt \Big)^{1/2}$$

où

$$H_g(u_g(t)) = g \int_\Gamma |\, u_g(t, x) \,| \, d\sigma.$$

De la relation précédente on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \| u_g(t) \|^2 dt \leq C^{st.} \tag{3,5}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} H_g(u_g(t)) dt \leq C^{st.} \tag{3,6}$$

dont

$$\lim_{g \to \infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} | u_g(t, x) | \, dt d\sigma = 0. \tag{3,7}$$

De (3,3), (3,4), (3,5) on a qu'on peut extraire de $\{u_g(t)\}$ une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{u_g(t)\}$, telle que

$$\lim_{g \to \infty}{}^{*} u_g(t) = u_D(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^2(t_1, t_2; H^1(\Omega)) \tag{3,8}$$

$$\lim_{g \to \infty} u_g(t) = u_D(t) \text{ dans } C(t_1, t_2; \mathfrak{L}^2(\Omega)) \tag{3,9}$$

$$\lim_{g \to \infty}{}^{**} u_g(t) = u_D(t) \text{ dans } \mathfrak{S}^2(H^1(\Omega)). \tag{3,10}$$

De (3,3), (3,9) et (3,10) on a que $u_D(t)$ est presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathfrak{S}^2$ — presque périodique dans $H^1(\Omega)$, de (3,7) on a

$$u_D(t) \in H_0^1(\Omega) \quad \text{p.p.}$$

Si on passe a la limite dans (1,3), par les mêmes procédés du Th. IV on a alors que $u_D(t)$ est l'unique solution presque — périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathfrak{S}^2$ — presque périodique dans $H_0^1(\Omega)$ de l'inéquation d'évolution

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t), v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t), v(t)-u(t)\rangle -$$

$$-\langle f(t), v(t)-u(t)\rangle\} dt \geq \tfrac{1}{2}\{| v(t_2)-u(t_2)|^2 - | v(t_1)-u(t_1)|^2\}, \qquad t_1 \leq t_2$$

$$\forall v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H_0^1(\Omega)) \; v'(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H^{-1}(\Omega))$$

$$u(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R}; H_0^1(\Omega)) \cap C(\boldsymbol{R}; \mathfrak{L}^2(\Omega))\}$$

qui est équivalent au problème (1,5).

De l'unicité de la solution presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathfrak{S}^2$ — presque périodique dans $H_0{}^1(\Omega)$ de (1,5), on a que (3,8), (3,9), (3,10) sont valables pour l'entiére suite $\{u_g(t)\}$.

Faisons maintenant tendre $g \to 0$.

De (3,5) on a

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Gamma} |u_g(t, x)|\, dt d\sigma \leq C^{\text{st.}}$$

et donc

$$\lim_{g\to 0}\int_{t_1}^{t_2} H_g(u_g(t))dt=0.$$

De la même façon $\forall v(t)\in \mathfrak{L}^2_{\text{loc}}(\boldsymbol{R};\ H^1(\Omega))$ on a

$$\lim_{g\to 0}\int_{t_1}^{t_2} H_g(v(t))dt=0.$$

De (3,3), (3,4), (3,5) on a encore qu'on peut extraire de $\{u_g(t)\}$ une sous-suite, que nous indiquons encore par $\{u_g(t)\}$, telle que

$$\lim_{g\to 0}{}^{*}\, u_g(t)=u_N(t) \text{ dans } \mathfrak{L}^p(t_1,\ t_2;\ H^1(\Omega)) \tag{3,13}$$

$$\lim_{g\to 0} u_g(t)=u_N(t) \text{ dans } C(t_1,\ t_2;\ \mathfrak{L}^2(\Omega)) \tag{3,14}$$

$$\lim_{g\to 0}{}^{**}\, u_g(t)=u_N(t) \text{ dans } \mathfrak{S}^2(H^1(\Omega)). \tag{3,15}$$

De (3,13), (3,14) et (3,15) on a que $u_N(t)$ est presque périodique dans $\mathfrak{L}^2(\Omega)$ et $\mathfrak{S}^2$ — presque périodique dans $H^1(\Omega)$.

Si on passe à la limite, par les mêmes procédés utilisés dans le Th. IV, on a que $u_N(t)$ est l'unique solution presque périodique dans $H^1(\Omega)$ de l'inéquation d'évolution. ■

$$\int_{t_1}^{t_2} \{\langle v'(t),\ v(t)-u(t)\rangle + \langle Au(t),\ v(t)-u(t)\rangle -$$

$$-\langle f(t),\ v(t)-u(t)\rangle\}dt \geq \tfrac{1}{2}\{|\, v(t_2)-u(t_2)\,|^2 - |\, v(t_1)-u(t_1)\,|^2\}, \qquad t_1 \leq t_2$$

$$\forall v(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ H^1(\Omega))\ \ v'(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ (H^1(\Omega))^*)\}$$

$$u(t) \in \{v(t) \mid v(t) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R};\ H^1(\Omega)) \cap C(\boldsymbol{R};\ \mathcal{L}^2(\Omega))\}$$

qui est equivalente au problème (1,6).

De l'unicité de la solution presque périodique dans $H^1(\Omega)$ de (1,6) on a que (3,8), (3,9) et (3,10) sont valables pour l'entière suite $\{u_g(t)\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Biroli M.: *Solutions presque périodiques des inéquations d'évolution paraboliques.* Annali di Matematica, serie IV, vol. 88.

[2] Biroli M.: *Sull'unicità della soluzione limitata di una diseguaglianza variazionale d'evoluzione.* Rend. Ac. Naz. Lincei, serie VIII. vol. XLVIII, fasc. 4, Aprile 1970.

[3] Biroli M.: *Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire.* (I. II. III.). Rend. Ac. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XLVIII fasc. 6, vol. XLIX, fasc. 1-2 e fasc. 3-4.

[4] Duvaut G., Lions J. L.: *Sur des noveaux problèmes d'inéquations variationelles posés par la Mecanique. Le cas stationaire.* C.R. Ac. Sc. Paris, t. 269 (1969).

[5] Duvaut G., Lions J. L.: *Sur des noveaux problèmes d'inéquations variationelles posés par la Mecanique. Le cas d'évolution.* C.R. Ac. Sc. Paris, t. 269 (1969).

[6] Sibony M.: *Minimisation des fonctionelles non différentiables. Séminaire* Lions, Décembre '69.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 giugno 1970.