Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Giuseppe Valla

Elementi indipendenti rispetto ad un ideale

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 339-354

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__339_0>

ELEMENTI INDIPENDENTI RISPETTO AD UN IDEALE

GIUSEPPE VALLA *)

Introduzione.

La nozione di « indipendenza » fra gli elementi di un anello locale A rispetto al suo ideale massimale $\mathfrak{m}$, introdotta sotto altro nome da Northcott in [4], si estende immediatamente al caso di una coppia costituita da un anello commutativo A e da un suo qualunque ideale $\mathfrak{a}$. Nel presente lavoro ci proponiamo di confrontare il massimo numero di elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti (numero indicato con $\sup(\mathfrak{a})$) con l'altezza $h(\mathfrak{a})$ dell'ideale.

La prima proprietà di carattere generale che si riesce a stabilire è la seguente

$$\sup(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a}) \tag{1}$$

valida per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di un anello noetheriano A.

La (1) viene stabilita dapprima nel caso A integro, $\mathfrak{a}$ ideale primo (vedi teorema 2.2). La prima redazione manoscritta di questo lavoro conteneva una dimostrazione del teorema 2.2 sotto ulteriori ipotesi molto restrittive (si supponeva che A fosse il localizzato, in un ideale primo, di un'algebra affine integra e che $\mathfrak{a}$ fosse il suo ideale massimale). Successivamente il prof. D. Rees mi ha informato che una prima dimostrazione del teorema 2.2 è contenuta nella tesi di E. Boger [1]. Qui riproduco una dimostrazione inedita del suddetto teorema dovuta al prof.

---

*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica, Università di Genova, via L. B. Alberti.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Rees (che ringrazio vivamente per la cortese comunicazione) e che si fonda sul teorema 2.1 anch'esso dovuto al prof. Rees.

Il passaggio dal teorema 2.2 alla disuguaglianza (1) in generale, viene ottenuto nel modo seguente. Si dimostra dapprima la (1) per una coppia $(A, \mathfrak{m})$ costituita da un anello locale e dal suo ideale massimale, usando un procedimento di riduzione al caso integro che si articola nei vari enunciati del numero 3. Quindi nel n. 4, si giunge al risultato nella sua forma più generale, mediante un opportuno lemma di localizzazione.

Nel numero 5 si dimostra che la (1) è sempre una uguaglianza quando $\mathfrak{a}$ è una intersezione di ideali primi. A tal fine si estende dapprima ad anelli semilocali un risultato ottenuto da Northcott per anelli locali: precisamente, si prova che se A è un anello semilocale noetheriano ed $\mathfrak{a}$ è il suo radicale risulta allora $\sup(\mathfrak{a}) \geq h(\mathfrak{a})$. Si perviene poi alla conclusione usando il lemma di localizzazione già citato.

Nel numero 6 si osserva infine che, se $\mathrm{gr}(\mathfrak{a})$ denota il grado di $\mathfrak{a}$, si ha sempre $\mathrm{gr}(\mathfrak{a}) \leq \sup(\mathfrak{a})$; per cui, negli anelli di Macaulay, la (1) è una uguaglianza per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A. Tuttavia ciò non è vero in generale: si dà infatti l'esempio di un anello A (non di Macaulay) e di un suo ideale $\mathfrak{a}$ (non intersezione di primi) per cui risulta

$$\mathrm{gr}(\mathfrak{a}) = \sup(\mathfrak{a}) < h(\mathfrak{a}).$$

1. In questo numero si richiama la nozione di dipendenza rispetto ad un ideale, per un sistema di elementi di un anello A e si dimostrano alcune proprietà elementari relative a tale nozione. Gli anelli sono sempre supposti noetheriani, commutativi e con identità. Gli anelli vengono indicati con lettere maiuscole, gli ideali con lettere gotiche.

Se A è un anello, con il simbolo $\dim A$ indichiamo la dimensione di Krull dell'anello A.

Diremo che gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_m$ di un anello A (generanti un ideale non necessariamente proprio), formano una *A-successione,* se a_i non è divisore dello 0 in $A/(a_1, \ldots, a_{i-1})$, per ogni i $(1 \leq i \leq m)$.

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A, chiameremo *grado* di $\mathfrak{a}$ e lo denoteremo $\mathrm{gr}(\mathfrak{a})$, il massimo numero di elementi di $\mathfrak{a}$ formanti una A-sucessione.

Indichiamo poi con $h(\mathfrak{a})$ l'*altezza* (o *rango*) di un ideale $\mathfrak{a}$.

Infine col simbolo $(A, \mathfrak{m})$ indichiamo un anello A locale con ideale massimale $\mathfrak{m}$.

DEFINIZIONE 1.1. Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un suo ideale proprio, $a_1, ..., a_n$ elementi di A. Diremo che questi elementi sono « *indipendenti rispetto ad* $\mathfrak{a}$ » oppure « $\mathfrak{a}$-*indipendenti* » se per ogni forma non nulla

$$F(X_1, ..., X_n) \in A[X_1, ..., X_n],$$

tale che $F(a_1, ..., a_n)=0$, risulta

$$F(X_1, ..., X_n) \in \mathfrak{a}A[X_1, ..., X_n]$$

(ossia tutti i coefficienti di F sono elementi di $\mathfrak{a}$).

Osserviamo che ogni elemento invertibile dell'anello A è $\mathfrak{a}$-indipendente, qualunque sia l'ideale $\mathfrak{a}$ dell'anello A.

Si ha pure questa

PROPOSIZIONE 1.2. *Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un suo ideale, $a_1, ..., a_n$ elementi di A. Se $n \geq 2$ e $a_1, ..., a_n$ sono $\mathfrak{a}$-indipendenti, allora $a_1, ..., a_n$ appartengono ad $\mathfrak{a}$.*

PROVA. Se infatti $a_i \notin \mathfrak{a}$, consideriamo la forma, di grado $n-1$,

$$G(X_1, ..., X_n)=a_iX_1 \ldots X_{i-1}X_{i+1} \ldots X_n - a_1X_2X_3 \ldots X_n .$$

Si ha chiaramente $G(a_1, ..., a_n)=0$ e non tutti i coefficienti di G sono in $\mathfrak{a}$. Assurdo, da cui la tesi.

Questa proposizione e la osservazione precedente ci suggeriscono quindi di limitare la nostra attenzione a quegli elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti che appartengono ad $\mathfrak{a}$. Quindi d'ora innanzi parlando di elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti supporremo sempre che tali elementi appartengano ad $\mathfrak{a}$.

PROPOSIZIONE 1.3. *Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ due ideali di A. Se $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti sono pure $\mathfrak{b}$-indipendenti.*

PROVA. Ovvio per la definizione 1.1.

PROPOSIZIONE 1.4. *Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un suo ideale, $a_1, ..., a_n$ elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti. Allora ogni sottoinsieme di $\{a_1, ..., a_n\}$ è costituito da elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti.*

PROVA. Basta osservare che se $i \leq n$, risulta chiaramente

$$A[X_1, ..., X_i] \subset A[X_1, ..., X_i, ..., X_n].$$

PROPOSIZIONE 1.5. *Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un ideale di A, $a_1, ..., a_n$ elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti; sia poi $\mathfrak{b}=(a_1, ..., a_n)$ l'ideale di A generato da $a_1, ..., a_n$. Se*

$$F(X_1, ..., X_n) \in A[X_1, ..., X_n]$$

è una forma di grado s, tale che $F(a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^s$, risulta allora che tutti i coefficienti di $F(X_1, ..., X_n)$ stanno in $\mathfrak{a}$.

PROVA. Infatti se $F(a_1, ..., a_n) \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^s$ si ha che

$$F(a_1, ..., a_n)=G(a_1, ..., a_n)$$

ove

$$G(X_1, ..., X_n) \in A[X_1, ..., X_n]$$

è una forma di grado s che ha tutti i coefficienti in $\mathfrak{a}$. Allora $(F-G)(a_1, ..., a_n)=0$ e

$$(F-G)(X_1, ..., X_n) \in A[X_1, ..., X_n]$$

è una forma di grado s; si ha dunque che $(F-G)(X_1, ..., X_n)$ ha tutti i coefficienti in $\mathfrak{a}$ e quindi anche tutti i coefficienti di $F(X_1, ..., X_n)$ sono elementi di $\mathfrak{a}$, come si doveva dimostrare.

Terminiamo questo numero con una definizione:

DEFINIZIONE 1.6. Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un suo ideale. Porremo $\sup(\mathfrak{a})$=estremo superiore degli $n \in \boldsymbol{N}$ tali che $\mathfrak{a}$ contenga n elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti.

Si proverà che $\sup(\mathfrak{a})$ è finito (cfr. teorema 4.2) e quindi coincide con il massimo numero di elementi di $\mathfrak{a}$ che sono $\mathfrak{a}$-indipendenti.

Se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale, scriveremo $\sup A$ invece che $\sup(\mathfrak{m})$.

2. Incominciamo in questo numero il confronto tra $\sup(\mathfrak{a})$ e l'altezza di $\mathfrak{a}$. Esaminiamo il caso in cui A è un anello integro ed $\mathfrak{a}$ è un suo ideale primo .

Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello noetheriano A, e se $a_1, \dots, a_n$ è un sistema di generatori di $\mathfrak{a}$, possiamo considerare l'anello graduato

$$R_{\mathfrak{a}}=A[a_1t, \dots, a_rt],$$

dove t è una indeterminata su A.

Si vede facilmente che $R^{\mathfrak{a}}$ è costituito da tutte le somme $\sum_{r=0}^{n} c_rt^r$ dove $c_r \in \mathfrak{a}^r$ e con la convenzione che $\mathfrak{a}^0=A$. Osserviamo ancora che se $\mathfrak{b}$ è un ideale di A, l'ideale $\mathfrak{b}R_{\mathfrak{a}}$ è costituito dagli elementi del tipo $\sum_{r=0}^{n} c_rt^r$ dove $c_r \in \mathfrak{b}\mathfrak{a}^r$.

Si prova questo risultato:

TEOREMA 2.1 (Rees). *Siano A un anello, $a_1, \dots, a_r$ elementi di A, $\mathfrak{a}$ l'ideale generato da $a_1, \dots, a_r$,* e *$\mathfrak{b}$ un ideale di A tale che $\mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}$. Allora $a_1, \dots, a_r$ sono $\mathfrak{b}$-indipendenti se e solo se l'omomorfismo naturale $(A/\mathfrak{b})[X_1, \dots, X_r] \rightarrow R_{\mathfrak{a}}/\mathfrak{b}R_{\mathfrak{a}}$ è un isomorfismo.*

PROVA. Consideriamo l'omomorfismo

$$\varphi : (A/\mathfrak{b})[X_1, \dots, X_r] \rightarrow R_{\mathfrak{a}}/\mathfrak{b}R_{\mathfrak{a}}$$

così definito: se $F(X_1, \dots, X_r)$ è una forma di grado s con coefficienti in A e se $\overline{F}(X_1, \dots, X_r)$ è la forma che si ottiene riducendone i coefficienti modulo $\mathfrak{b}$, poniamo allora $\varphi(\overline{F})$ uguale alla classe residua modulo $\mathfrak{b}R_{\mathfrak{a}}$ di $F(a_1t, \dots, a_rt)$. Si vede facilmente che questa è una buona definizione e che l'omomorfismo φ così definito è un omomorfismo omogeneo di grado 0 ed è inoltre surgettivo. Proveremo che φ è iniettivo se e solo se $a_1, \dots, a_r$ sono $\mathfrak{b}$-indipendenti.

Sia dapprima φ iniettivo; sia poi

$$F(X_1, \dots, X_r) \in A[X_1, \dots, X_r]$$

una forma di grado s tale che $F(a_1, \dots, a_r)=0$. Allora essendo

$$F(a_1t, \dots, a_rt)=F(a_1, \dots, a_r)t^s$$

risulta $\varphi(\overline{F})=0$ e quindi $\overline{F}(X_1 . \dots, X_r)=0$, ossia tutti i coefficienti di $F(X_1, \dots, X_r)$ stanno in $\mathfrak{b}$.

Viceversa siano $a_1, \ldots, a_r$ $\mathfrak{b}$-indipendenti.

Poichè $\operatorname{Ker}\varphi$ è un ideale omogeneo, per provare che $\operatorname{Ker}\varphi=(0)$ basta far vedere che ogni elemento omogeno di $\operatorname{Ker}\varphi$ è nullo. Ora se

$$\overline{F}(X_1, \ldots, X_r)\in(A/\mathfrak{b})[X_1, \ldots, X_r]$$

è una forma di grado s tale che $\varphi(\overline{F})=0$, ciò significa che

$$F(a_1t, \ldots, a_rt)=F(a_1, \ldots, a_r)t^s\in\mathfrak{b}R_{\mathfrak{a}}$$

e quindi $F(a_1, \ldots, a_r)\in\mathfrak{b}\mathfrak{a}^s$; dalla proposizione 1.5 segue allora che $F(X_1, \ldots, X_r)$ ha tutti i coefficienti in $\mathfrak{b}$ e quindi $\overline{F}(X_1, \ldots, X_r)=0$.

Siamo ora in grado di provare questo risultato:

TEOREMA 2.2. *Siano A un anello integro e $\mathfrak{p}$ un suo ideale primo. Risulta allora*

$$\sup(\mathfrak{p})\leq h(\mathfrak{p}).$$

PROVA (Rees). Siano $a_1, \ldots, a_r\in A$ r elementi $\mathfrak{p}$-indipendenti. Per il teorema 2.1, se indichiamo con $\mathfrak{a}$ l'ideale generato da $a_1, \ldots, a_r$, risulta

$$(A/\mathfrak{p})[X_1, \ldots, X_r]\simeq R_{\mathfrak{a}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}}.$$

Ora se F è il corpo dei quozienti di A, $F(t)$ è il corpo dei quozienti di $R_{\mathfrak{a}}$. Si ha inoltre $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}}\supset\mathfrak{p}$; essendo poi $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}}\subset\mathfrak{p}A[t]$ e $\mathfrak{p}A[t]\cap A=\mathfrak{p}$ risulta $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}}\cap A=\mathfrak{p}$. Ancora, se k è il corpo dei quozienti di $A/\mathfrak{p}$, $k(X_1, \ldots, X_r)$ è il corpo dei quozienti di $(A/\mathfrak{p})[X_1, \ldots, X_r]$. Applicando la disuguaglianza della Appendice 1, proposizione 2 di [7], vol. II, si ottiene:

$$h(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}})+\text{gr. tr.}_k\, k(X_1, \ldots, X_r)\leq h(\mathfrak{p})+\text{gr. tr.}_F\, F(t). \tag{1}$$

Ora essendo $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}}\supset\mathfrak{p}\neq(0)$ è $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}}\neq(0)$ e quindi $h(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{a}})>0$. La tesi segue dunque dalla (1).

3. In questo numero consideriamo un anello locale $(A, \mathfrak{m})$ e proviamo che $\sup A\leq\dim A$. Proveremo ciò dapprima nell'ipotesi che A sia ridotto e quindi elimineremo tale ipotesi.

TEOREMA 3.1. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale ridotto. Risulta allora* $\sup A \leq \dim A$.

PROVA. Siano $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r$ i primi minimali di A. Per ogni $i=1, ..., r$ $A/\mathfrak{p}_i$ è un anello integro e quindi per il teorema 2.2 risulta

$$\sup A/\mathfrak{p}_i \leq \dim A/\mathfrak{p}_i \qquad \forall i=1, ..., r.$$

Sia dunque

$$\varphi : A \to \bigoplus_{i=1}^{r} A/\mathfrak{p}_i$$

l'omomorfismo di anelli così definito: per ogni $a \in A$

$$\varphi(a)=\{\varphi_1(a), ..., \varphi_r(a)\}$$

ove $\varphi_i : A \to A/\mathfrak{p}_i$ è la proiezione canonica sul quoziente. Risulta $\operatorname{Ker}\varphi=(0)$ in quanto per ipotesi A è ridotto. Ora se $d=\dim A$, è $d \geq \dim A/\mathfrak{p}_i$ per ogni $i=1, ..., r$. Quindi se consideriamo $d+1$ elementi di A, siano $a_1, ..., a_{d+1}$, si ha che per ogni $i=1, ..., r$

$$\varphi_i(a_1), ..., \varphi_i(a_{d+1})$$

non sono $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}_i$-indipendenti in $A/\mathfrak{p}_i$. Allora per ogni $i=1, ..., r$ esiste una forma

$$F_i(X_1, ..., X_{d+1}) \notin \mathfrak{m}A[X_1, ..., X_{d+1}]$$

di grado s_i, tale che $\varphi_i[F_i(a_1, ..., a_{d+1})]=0$. Consideriamo allora

$$G(X_1, ..., X_{d+1})=F_1(X_1, ..., X_{d+1}) \ldots F_r(X_1, ..., X_{d+1}).$$

Si ha che

$$G(X_1, ..., X_{d+1}) \notin \mathfrak{m}A[X_1, ..., X_{d+1}]$$

perchè $\mathfrak{m}A[X_1, ..., X_{d+1}]$ è un ideale primo; $G(X_1, ..., X_{d+1})$ è d'altra parte una forma di grado $s=\sum_{i=1}^{r} s_i$ tale che $G(a_1, ..., a_{d+1})=0$. Infatti si ha:

$$\varphi[G(a_i, ..., a_{d+1})]=\varphi[\prod_{i=1}^{r} F_i(a_1, ..., a_{d+1})]=$$

$$=\{\varphi_1(\prod_{i=1}^{r} F_i(a_1, \ldots, a_{d+1})), \ldots, \varphi_r(\prod_{i=1}^{r} F_i(a_1, \ldots, a_{d+1}))\}=$$

$$=\{\prod_{i=1}^{r} \varphi_1[F_i(a_1, \ldots, a_{d+1})], \ldots, \prod_{i=1}^{r} \varphi_r[F_i(a_1, \ldots, a_{d+1})]\}=0$$

perchè ciascuna componente è prodotto di fattori uno almeno dei quali si è visto essere nullo. Per il fatto dunque che φ è iniettiva si ha che $G(a_1, \ldots, a_{d+1})=0$. Abbiamo così provato che se $d=\dim A$, $d+1$ elementi di A non sono mai $\mathfrak{m}$-indipendenti. Quindi veramente: $\sup A \leq \dim A$.

Al fine di eliminare l'ipotesi che l'anello A sia un anello ridotto ci servirà il seguente

LEMMA 3.2. *Siano A un anello, $\mathfrak{p}$ un ideale primo di A e $\varphi: A \to A/\sqrt{(0)}$ la proiezione canonica sul quoziente. Risulta allora*:

$$\sup(\mathfrak{p}) \leq \sup(\varphi(\mathfrak{p})).$$

PROVA. Faremo vedere che r elementi $\mathfrak{p}$-indipendenti in A, individuano r elementi $\varphi(\mathfrak{p})$-indipendenti in $A/\sqrt{(0)}$. Siano dunque $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{p}$ elementi $\mathfrak{p}$-indipendenti; proviamo che $\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r) \in \varphi(\mathfrak{p})$ sono $\varphi(\mathfrak{p})$-indipendenti. Sia

$$G(X_1, \ldots, X_r) \in (A/\sqrt{(0)})[X_1, \ldots, X_r]$$

una forma di grado s, tale che $G[\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_r)]=0$. Se

$$F(X_1, \ldots, X_r) \in A[X_1, \ldots, X_r]$$

è una forma di grado s, che si ottiene da $G(X_1, \ldots, X_r)$ rilevandone in A i coefficienti, si ha che $\varphi[F(a_1, \ldots, a_r]=0$ e quindi $F(a_1, \ldots, a_r) \in \sqrt{(0)}$; allora esiste un intero positivo t tale che:

$$[F(a_1, \ldots, a_r)]^t = F^t(a_1, \ldots, a_r)=0.$$

Ma

$$F^t[X_1, \ldots, X_r] \in A[X_1, \ldots, X_r]$$

è una forma di grado ts, quindi per la supposta $\mathfrak{p}$-indipendenza di

$a_1, \ldots, a_r$ si ha:

$$F^t(X_1, \ldots, X_r) \in \mathfrak{p}A[X_1, \ldots, X_r];$$

ma $\mathfrak{p}A[X_1, \ldots, X_r]$ è un ideale primo e quindi si conclude che

$$F(X_1, \ldots, X_r) \in \mathfrak{p}A[X_1, \ldots, X_r].$$

Ma ciò implica chiaramente che $G(X_1, \ldots, X_r)$ ha tutti i coefficienti in $\varphi(\mathfrak{p})$.

Veniamo infine al seguente

TEOREMA 3.3. *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale. Si ha allora*

$$\sup A \leq \dim A.$$

PROVA. Osserviamo che $\dim(A/\sqrt{(0)}) = \dim A$ ovviamente. Poi $A/\sqrt{(0)}$ è un anello locale ridotto e quindi per il teorema 3.1 risulta

$$\sup(A/\sqrt{(0)}) \leq \dim(A/\sqrt{(0)}).$$

Per concludere basta dunque osservare che per il lemma 3.2

$$\sup A \leq \sup(A/\sqrt{(0)}).$$

4. In questo numero proviamo che per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di un anello noetheriano A risulta

$$\sup(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a}). \tag{1}$$

Oserviamo intanto che è sufficiente provare la (1) per ogni ideale primo $\mathfrak{p}$ dell'anello A. Infatti se $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ sono i primi minimali di $\mathfrak{a}$, per la proposizione 1.3 risulta

$$\sup(\mathfrak{a}) \leq \sup(\mathfrak{p}_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, r$$

e se

$$\sup(\mathfrak{p}_i) \leq h(\mathfrak{p}_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, r$$

si ha anche

$$\sup(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{p}_i) \qquad \forall i = 1, \ldots, r$$

e quindi $\sup(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a})$.

Allora se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A, per giungere al nostro risultato, basterà trovare il legame tra sup $(\mathfrak{p})$ e sup $(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$ e poi si potrà concludere con il teorema 3.3.

Ciò faremo mediante questo

LEMMA 4.1. *Siano A un anello, $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideali primi di A, $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ ideali tali che $\mathfrak{q}_i$ sia $\mathfrak{p}_i$-primario per ogni $i=1, \ldots, n$. Posto* $M=A-(\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i)$ ed $\mathfrak{a}=\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ *risulta allora*:

$$\sup(\mathfrak{a})=\sup(\mathfrak{a}A_M)$$

PROVA. Incominciamo a provare che r elementi $\mathfrak{a}A_M$-indipendenti, individuano, in A, r elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti. Siano infatti $a_1/m, a_2/m, \ldots, \ldots, a_r/m$ ($m \in M$, $a_i \in \mathfrak{a}$ per ogni $i=1, \ldots, r$) elementi $\mathfrak{a}A_M$-indipendenti; proviamo che $a_1, \ldots, a_r$ sono $\mathfrak{a}$-indipendenti. Sia infatti

$$F(X_1, \ldots, X_r) \in A[X_1, \ldots, X_r]$$

una forma di grado s tale che $F(a_1, \ldots, a_r)=0$. Se indichiamo con I l'insieme delle r-uple ordinate di numeri interi non negativi $(i)=(i_1, \ldots, i_r)$, tali che $i_1+\ldots+i_r=s$ sarà ad esempio:

$$F(X_1, \ldots, X_r)=\sum_{(i)\in I} c_{(i)} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}.$$

Consideriamo allora la forma, di grado s,

$$G(X_1, \ldots, X_r)=\sum_{(i)\in I} (m^s c_{(i)}/1) X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r} \in A_M[X_1, \ldots, X_r].$$

Si ha

$$G(a_1/m, \ldots, a_r/m)=F(a_1, \ldots, a_r)/1=0,$$

quindi, per ogni $(i)\in I$,

$$(m^s c_{(i)}/1) \in \mathfrak{a}A_M \subset \mathfrak{q}_j A_M$$

per ogni $j=1, \ldots, n$; inoltre $m^s \notin \mathfrak{p}_j$ e quindi $(m^s/1) \notin \mathfrak{p}_j A_M$ per ogni $j=1, \ldots, n$. Allora essendo $\mathfrak{q}_j A_M$ un ideale $\mathfrak{p}_j A_M$-primario (cfr. [7], teorema 16, cap. IV), risulta $c_{(i)}/1 \in \mathfrak{q}_j A_M$ per ogni $j=1, \ldots, n$. Quindi per ogni $j=1, \ldots, n$ esiste $t_j \in M$ tale che $t_j c_{(i)} \in \mathfrak{q}_j$; ma $t_j \notin \mathfrak{p}_j$ e quindi $c_{(i)} \in \mathfrak{q}_j$ per ogni $j=1, \ldots, n$; si conclude allora che $c_{(i)} \in \mathfrak{a}$ per ogni $(i) \in I$.

Viceversa siano ora $a_1, \ldots, a_r$ elementi $\mathfrak{a}$-indipendenti; proviamo che $a_1/1, \ldots, a_r/1$ sono elementi $\mathfrak{a}A_M$-indipendenti. Sia

$$F(X_1, \ldots, X_r) \in A_M[X_1, \ldots, X_r]$$

una forma di grado s tale che $F(a_1/1, \ldots, a_r/1)=0$. Con il simbolismo usato prima, sarà, ad esempio,

$$F(X_1, \ldots, X_r) = \sum_{(i)\in I} (c_{(i)}/m) X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r} = (1/m) \sum_{(i)\in I} c_{(i)} X_1^{i_1} \ldots X_r^{i_r}.$$

È allora

$$0 = (1/m) \sum_{(i)\in I} c_{(i)} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r}$$

e quindi esiste $t \in M$ tale che

$$\sum_{(i)\in I} t c_{(i)} a_1^{i_1} \ldots a_r^{i_r} = 0.$$

Ne segue allora, per la supposta $\mathfrak{a}$-indipendenza di $a_1, \ldots, a_r$, che, per ogni $(i) \in I$, $t c_{(i)} \in \mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}_j$ per ogni $j=1, \ldots, n$; ma $t \notin \mathfrak{p}_j$ *e* quindi $c_{(i)} \in \mathfrak{q}_j$ per ogni $j=1, \ldots, n$. Si conclude allora che $c_{(i)} \in \mathfrak{a}$ per ogni $(i) \in I$ e dunque $(c_{(i)}/m) \in \mathfrak{a}A_M$ per ogni $(i) \in I$ come appunto si voleva dimostrare.

Si ha subito come immediata conseguenza di questo lemma e del teorema 3.3 il seguente risultato:

TEOREMA 4.2. *Se A è un anello ed $\mathfrak{a}$ è un suo ideale risulta allora*

$$\sup(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a}).$$

5. Si è visto nel n. 4 che se $\mathfrak{a}$ è un ideale di un anello A risulta $\sup(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a})$. In questo numero proviamo che $\sup(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a})$, per ideali $\mathfrak{a}$ che siano intersezione di ideali primi.

Ricordiamo ora che è stato provato da Northcott ([4], teorema 3, pag. 68) che se $(A, \mathfrak{m})$ è un anello locale e se $a_1, \ldots, a_d$ sono un sistema di parametri di A, essi sono elementi $\mathfrak{m}$-indipendenti. Questo risultato, insieme con il teorema 4.2, prova l'uguaglianza $\sup A = \dim A$ per un anello locale A. Quindi, se $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di un anello qualunque

A, risulta:

$$\sup(\mathfrak{p}) = \sup(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \dim A_{\mathfrak{p}} = h(\mathfrak{p}).$$

Allora per provare il risultato nel caso di ideali intesezione di ideali primi sarà necessaria una generalizzazione del risultato di Northcott sopra enunciato (prop. 5.3). Incominciamo con alcuni lemma.

LEMMA 5.1. *Siano A un anello, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ ideali massimali distinti di A, di altezza positiva. Allora per ogni $i=1, \ldots, n$ esiste un elemento $x_i \in \mathfrak{m}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{m}$, tale che*

$$\dim A_{\mathfrak{m}_i}/x_i A_{\mathfrak{m}_i} = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - 1.$$

PROVA. Per semplificare le notazioni proviamo il risultato ad esempio per $\mathfrak{m}_1$. Se $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ sono i primi minimali di A, $\mathfrak{m}_1$ non coincide con alcuno dei $\mathfrak{p}_k$ in quanto tali ideali hanno tutti altezza zero. Allora esiste un elemento x_1 di $\mathfrak{m}_1$ tale che

$$x_1 \notin \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r \cup \mathfrak{m}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{m}_n ;$$

ciò perchè se fosse

$$\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r \cup \mathfrak{m}_2 \cup \ldots \cup \mathfrak{m}_n ,$$

si avrebbe che $\mathfrak{m}_1$ sarebbe contenuto in qualche $\mathfrak{m}_j$ o in qualche $\mathfrak{p}_k$ (cfr [7], cap. IV, § 6, Remark pag. 215) e quindi coinciderebbe con qualcuno di essi: assurdo. Si ha allora, essendo $x_1 \notin \mathfrak{p}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{p}_r$,

$$\dim(A_{\mathfrak{m}_1}/x_1 A_{\mathfrak{m}_1}) \leq \dim A_{\mathfrak{m}_1} - 1.$$

Ma in ogni caso,

$$\dim(A_{\mathfrak{m}_1}/x_1 A_{\mathfrak{m}_1}) \geq \dim A_{\mathfrak{m}_1} - 1$$

(cfr. [4], cap. IV, teorema 2, pag. 64) e quindi l'uguaglianza cercata.

LEMMA 5.2. *Siano A un anello semilocale, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ i suoi ideali massimali, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ il suo radicale e $s = h(\mathfrak{a})$. Allora esistono $y_1, \ldots, y_s \in \mathfrak{a}$ tali che per ogni $i=1, \ldots, n$ si ha:*

$$\dim(A_{\mathfrak{m}_i}/(y_1, \ldots, y_s)A_{\mathfrak{m}_i}) = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - s.$$

PROVA. Proviamo il lemma per induzione su s. Se $s=0$ non c'è nulla da dimostrare. Sia $s>0$ e supponiamo vero il lemma per $s-1$. Allora chiaramente $h(\mathfrak{m}_i)>0$ per ogni $i=1, \ldots, n$ e quindi per il lemma precedente esistono $x_1, \ldots, x_n$ con $x_i \in \mathfrak{m}_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{m}_j$, tali che

$$\dim (A_{\mathfrak{m}_i}/x_i A_{\mathfrak{m}_i}) = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - 1.$$

Ora l'elemento $y_1 = x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$ appartiene ad $\mathfrak{a}$ ed inoltre è tale che

$$\dim (A_{\mathfrak{m}_i}/y_1 A_{\mathfrak{m}_i}) = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - 1$$

per ogni $i=1, \ldots, n$; infatti se $j \neq i$, $x_j \notin \mathfrak{m}_i$ e quindi l'immagine di x_j in $A_{\mathfrak{m}_i}$ è una unità. Posto quindi $B=A/(y_1)$, $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{m}_i/(y_1)$ per ogni $i=1 \ldots, n$, si ha che B è un anello semilocale i cui ideali massimali sono $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_n$. Inoltre si hanno gli isomorfismi canonici:

$$1) \qquad B_{\mathfrak{n}_i} \simeq A_{\mathfrak{m}_i}/y_1 A_{\mathfrak{m}_i} \qquad i=1, \ldots, n;$$

di qui si trae $\dim B_{\mathfrak{n}_i} = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - 1$ per ogni $i=1, \ldots, n$, e quindi se $\mathfrak{b}$ è il radicale di B, $h(\mathfrak{b}) = h(\mathfrak{a}) - 1 = s-1$. Allora per l'ipotesi induttiva esistono $b_2, \ldots, b_s \in \mathfrak{b}$ tali che

$$2) \qquad \dim B_{\mathfrak{n}_i}/(b_2, \ldots, b_s) B_{\mathfrak{n}_i} = \dim B_{\mathfrak{n}_i} - s + 1 \qquad i=1, \ldots, n.$$

Allora se $y_2, \ldots, y_s$ sono elementi di $\mathfrak{a}$ che rimontano rispettivamente $b_2, \ldots, b_s$ si prova che $y_1, y_2, \ldots, y_s$ verificano la nostra tesi. Si hanno infatti gli isomorfismi canonici:

$$3) \qquad (b_2, \ldots, b_s) B_{\mathfrak{n}_i} \simeq (y_1, y_2, \ldots, y_s) A_{\mathfrak{m}_i}/y_1 A_{\mathfrak{m}_i} \qquad i=1, \ldots, n;$$

da 1) e 3) si deducono poi gli isomorfismi:

$$B_{\mathfrak{n}_i}/(b_2, \ldots, b_s) B_{\mathfrak{n}_i} \simeq A_{\mathfrak{m}_i}/(y_1, y_2, \ldots, y_s) A_{\mathfrak{m}_i} \qquad i=1, \ldots, n$$

e di qui infine, mediante le 2), le uguaglianze:

$$\dim (A_{\mathfrak{m}_i}/(y_1, y_2, \ldots, y_s) A_{\mathfrak{m}_i}) = \dim (B_{\mathfrak{n}_i}/(b_2, \ldots, b_s) B_{\mathfrak{n}_i}) =$$
$$= \dim B_{\mathfrak{n}_i} - s + 1 = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - 1 - s + 1 = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - s.$$

Siamo ora in grado di provare questo risultato:

PROPOSIZIONE 5.3. *Siano A un anello semilocale $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$ i suoi ideali massimali, $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$ il suo radicale. Si ha allora*:

$$\sup(\mathfrak{a}) \geq h(\mathfrak{a}).$$

PROVA. Se poniamo $s = h(\mathfrak{a})$ per il lemma 5.2 esistono $y_1, \ldots, y_s \in \mathfrak{a}$ tali che

$$\dim(A_{\mathfrak{m}_i}/(y_1, \ldots, y_s)A_{\mathfrak{m}_i}) = \dim A_{\mathfrak{m}_i} - s$$

per ogni $i = 1, \ldots, n$. Ciò significa, in virtù di [4], cap. IV, teorema 2, pag. 64, che le immagini di $y_1, \ldots, y_s$ in ciascun $A_{\mathfrak{m}_i}$ fanno parte di un sistema di parametri di $A_{\mathfrak{m}_i}$ e quindi, per il teorema 3, pag. 68 in [4] e la proposizione 1.4, sono $\mathfrak{m}_i A_{\mathfrak{m}_i}$-indipendenti per ogni $i = 1, \ldots, n$. Allora, con lo stesso ragionamento con cui si è provata la prima parte del lemma 4.1, si prova che $y_1, \ldots, y_s$ sono $\mathfrak{m}_i$-indipendenti per ogni $i = 1, \ldots, n$ e quindi, per la definizione 1.1 sono $\mathfrak{a}$-indipendenti. Ciò prova l'asserto.

E veniamo infine ad uno dei risultati più significativi di questo lavoro.

TEOREMA 5.4. *Siano A un anello ed $\mathfrak{a}$ un ideale di A tale che $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i$ ove i $\mathfrak{p}$ sono ideali primi di A. Risulta allora*:

$$\sup(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a}).$$

PROVA. Per il teorema 4.2 è sufficiente provare che $\sup(\mathfrak{a}) \geq h(\mathfrak{a})$. Indichiamo dunque con $M = A - (\bigcup_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i)$; si ha allora che A_M è un anello semilocale che ha per radicale $\mathfrak{a}A_M$. Allora per la proposizione 5.3 risulta

$$\sup(\mathfrak{a}A_M) \geq h(\mathfrak{a}A_M) = h(\mathfrak{a}).$$

Ma per il lemma 4.1 risulta $\sup(\mathfrak{a}A_M) = \sup(\mathfrak{a})$ e quindi $\sup(\mathfrak{a}) \geq h(\mathfrak{a})$ come volevasi dimostrare.

6. In questo numero si prova che se A è un anello di Macaulay, risulta allora $\sup(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a})$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A (prop. 6.4). Si giunge a tale risultato dopo aver osservato che sup $(\mathfrak{a})$ è maggiore o eguale al grado di $\mathfrak{a}$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di un anello A. Infine si prova con un esempio che la uguaglianza della proposizione 6.4 non è sempre vera.

Incominciamo con questo

TEOREMA 6.1 ([6], teorema 2.1). *Siano A un anello, $a_1, \ldots, a_n$ elementi di A formanti una A-successione. Se $\mathfrak{a}$ è l'ideale di A generato da tali elementi, allora $a_1, \ldots, a_n$ sono $\mathfrak{a}$-indipendenti.*

Si ha come immediata conseguenza il seguente

COROLLARIO 6.2. *Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un suo ideale. Allora risulta:* $\mathrm{gr}\,(\mathfrak{a}) \leq \sup\,(\mathfrak{a})$.

PROVA. Infatti se $a_1, \ldots, a_n$ sono elementi di $\mathfrak{a}$ formanti una A-successione e se $\mathfrak{b}$ è l'ideale di A generato da $a_1, \ldots, a_n$, per il teorema 6.1 $a_1, \ldots, a_n$ sono $\mathfrak{b}$-indipendenti; essendo $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ la tesi segue dalla proposizione 1.3.

Possiamo dunque conglobare il risultato precedente e il teorema 4.2 in questa

PROPOSIZIONE 6.3. *Siano A un anello, $\mathfrak{a}$ un suo ideale. Risulta allora:*

$$\mathrm{gr}\,(\mathfrak{a}) \leq \sup\,(\mathfrak{a}) \leq h(\mathfrak{a})$$

È immediata allora la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 6.4. *Siano A un anello di Macaulay, $\mathfrak{a}$ un suo ideale. Risulta allora:*

$$\mathrm{gr}\,(\mathfrak{a}) = \sup\,(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a}).$$

PROVA. Segue subito dalla proposizione 6.3 e dal fatto che in un anello A di Macaulay si ha $\mathrm{gr}\,(\mathfrak{a}) = h(\mathfrak{a})$ per ogni ideale $\mathfrak{a}$ di A (cfr. [3], teorema 4.1).

Facciamo infine un esempio di un anello A che non sia di Macaulay e di un suo ideale $\mathfrak{a}$ che non sia intersezione di ideali primi, per i quali risulti:

$$\sup\,(\mathfrak{a}) < h(\mathfrak{a}).$$

ESEMPIO 6.5. Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello locale di dimensione d, il cui massimale $\mathfrak{m}$ sia associato allo zero,. Si ha allora $\operatorname{gr}(\mathfrak{m})=0$ in quanto ogni elemento di $\mathfrak{m}$ è un divisore di 0 in A. D'altra parte esiste un $x \in \mathfrak{m}$, tale che $\mathfrak{m}$ sia l'annullatore dell'A-modulo xA (cfr. [2], pag. 4.) Poichè $\mathfrak{m} \neq A$, si ha $x \neq 0$ e quindi esiste un intero non negativo n tale che $x \notin \mathfrak{m}^n$. Se allora $\mathfrak{q} = \mathfrak{m}^n$, si ha $\sup(\mathfrak{q})=0$ perchè la forma xT non appartiene a $\mathfrak{q}A[T]$ e si annulla in ogni elemento di $\mathfrak{q}$. D'altra parte $\mathfrak{q}$ è $\mathfrak{m}$-primario onde $h(\mathfrak{q})=h(\mathfrak{m})= \dim A$. Se dunque $d>0$ si ha

$$0= \operatorname{gr}(\mathfrak{q})= \sup(\mathfrak{q})<h(\mathfrak{q})=d.$$

Ad esempio, si può prendere per A l'anello $R_{\mathfrak{m}}$, dove

$$R=k[X, Y]/(X^2, XY)=k(x, y),$$

$\mathfrak{m}=(x, y)$ e per $\mathfrak{q}$ l'ideale $(x, y)^2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOGER, E.: *Minimalitatsbedingungen in der Theorie der Reductionen von Idealen*, Schriftenreihe Math. Ist. Univ. Munster, Heft 40, 1968.

[2] DIEUDONNE, J.: *Topics in local algebra*, Notre Dame Mathematical Lectures, Number 10.

[3] GRECO, S. - SALMON, P.: *Anelli di Macaulay*, Pubblicazioni dell'Istituto Matematico dell'Università di Genova, 1965.

[4] NORTHCOTT, D. G.: *Ideal theory*, Cambridge Tracts, C.U.P., 1960.

[5] NORTHCOTT, D. G. - REES, D.: *Reductions of ideals in local rings*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 50 (1954), pp. 145-158.

[6] REES, D.: *The grade of an ideal or module*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 53 (1957), pp. 28-42.

[7] ZARISKI, O. - SAMUEL, P.: *Commutative Algebra*, Voll. I e II, D. Van Nostrand, 1958-1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1970.