GIULIANO BRATTI

Sulle distribuzioni vettoriali di una variabile debolmente quasi periodiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 44 (1970), p. 383-397

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1970__44__383_0>

SULLE DISTRIBUZIONI VETTORIALI DI UNA VARIABILE DEBOLMENTE QUASI PERIODICHE

GIULIANO BRATTI *)

§ **1.** Da un lavoro di Amerio [1] si ricava la seguente definizione: (siano R i reali con la topologia usuale, B uno spazio di Banach sui complessi C, B' il suo duale).

DEF. *Una mappa* $f: R \to B$ *si dice debolmente quasi periodica* (*d.q.p.*) *se* $\forall \alpha \in B'$, $\alpha \circ f$, $R \to C$, *è quasi periodica secondo H. Bohr.*

In questa nota si dà l'estensione della definizione di Amerio al caso delle distribuzioni vettoriali di una variabile, studiandone qualche conseguente proprietà. In particolare si ottiene:

a) nel § 2, una caratterizzazione topologica dello spazio vettoriale delle distribuzioni soddisfacenti la definizione estesa, mediante la ε-topologia tensoriale di Grothendieck ([10], pag. 434);

b) nel § 3, si dimostra che l'estensione della definizione di Amerio coincide con la « naturale » estensione della definizione scalare quasi periodica. Nel fatto: *una distribuzione scalare* T *di dominio* $\mathfrak{D}_{L^1}$ ($\mathfrak{D}_{L^1}$ *definito come in* § 2) *si dice quasi periodica se l'insieme delle sue traslate* ($\tau_h T$) *è relativamente compatto in* $\mathfrak{B}'$ *duale forte di* $\mathfrak{D}_{L^1}$.

È naturale, allora, pensare che, se E è uno spazio vettoriale topologico, una forma lineare e continua T di $\mathfrak{D}_{L^1}$ in E si dica quasi periodica, se, ancora, l'insieme delle sue traslate ($\tau_h T$) è relativamente compatto in $L(\mathfrak{D}_{L^1}; E)$, spazio delle forme lineari e continue di $\mathfrak{D}_{L^1}$ in E, quando

---

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, 35100 Padova.

quest'ultimo ha la topologia della convergenza uniforme sui limitati di $\mathfrak{D}_{L^1}$;

c) nel § 4, si definisce una mappa di valor medio vettoriale per le distribuzioni soddisfacenti la definizione estesa e di dimostra che sussiste un teorema analogo al teorema di unicità dello sviluppo di Fourirer, già classico per le funzioni e distribuzioni scalari quasi periodiche e per le funzioni vettoriali fortemente quasi periodiche, per le distribuzioni considerate;

d) nei §§ 5 e 6, dopo la definizione di distribuzione vettoriale fortemente quasi periodica e lo studio di qualche sua proprietà, si ottiene un teorema analogo a uno di Amerio, precisamente: *se B è uno spazio di Banach e se la distribuzione $T \in L_b(\mathfrak{D}_{L^1}; B)$ è debolmente quasi periodica, essa è quasi periodica (in senso forte) se e solo se $(T \cdot A) = \{\langle T \cdot \varphi \rangle, \forall \varphi \in A\}$, A limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$, è relativamente compatto in B.*

§ **2.** Sia $\mathfrak{D}_{L^1}$ lo spazio vettoriale delle funzioni complesse di variabile reale, indefinitamente derivabili, con ogni loro derivata, ed esse stesse, appartenenti a L^1; su $\mathfrak{D}_{L^1}$, un sistema di intorni di zero sia costituita dai $V(m, \varepsilon)$, m naturale, ε reale positivo,

$$V(m, \varepsilon) = \{f \in \mathfrak{D}_{L^1} : \sup_{p \leq m} \int_{-\infty}^{+\infty} |D^p f| \, dx \leq \varepsilon\},$$

$\mathfrak{D}_{L^1}$ risulta F-spazio, [7], pag. 199.

Il duale forte di $\mathfrak{D}_{L^1}$ sia $\mathfrak{B}'$; il sottospazio di $\mathfrak{B}'$ delle distribuzioni quasi periodiche sia $\mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ (in [7], tale sottospazio è indicato con il simbolo $\mathfrak{B}'_{\text{p.p.}}$).

$\mathcal{E}$ sia lo spazio vettoriale delle funzioni complesse di variabile reale, indefinitamente derivabili, con la topologia vettoriale dell'uniforme convergenza su ogni compatto di R, i reali, delle funzioni e di ogni loro derivata; $\mathcal{E}$ è uno spazio di Fréchet. $\mathcal{E}'$ sia il duale forte di $\mathcal{E}$.

Per altro, nel seguito E è sempre uno spazio vettoriale topologico, localmente convesso, di Hausdorff, con topologia debole, E_σ, completa.

DEF. 1. *In* $L_b = L_b(\mathfrak{D}_{L^1}\,;\, E_\sigma)$, *spazio vettoriale su* C, *i complessi, delle forme lineari e continue* T *di* $\mathfrak{D}_{L^1}$ *in* E_σ *con la topologia vettoriale dell'uniforme convergenza sui limitati di* $\mathfrak{D}_{L^1}$, T *si dice debolmente quasi periodica (d.q.p.) se* ${}^tT : E' \to \mathfrak{B}'$, E' *duale di* E_σ, ${}^tT(\alpha) = \alpha \circ T$, *ha codominio* $\mathfrak{B}'$ *q.p.*

Se $\alpha \in E'$, $\psi_\alpha : L_b \to \mathfrak{B}'$, $\psi_\alpha(T) = \alpha \circ T$, è continua; anzi, b topologia posta su L_b è la meno fine che rende continue le ψ_α, $\forall \alpha \in E'$. Indicato con $L_{\text{d.q.p.}}$ il sottospazio di L_b delle T d.q.p. risulta:

$$L_{\text{d.q.p.}} = \cap \{\psi_\alpha^{-1}(\mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}),\ \forall \alpha \in E'\},$$

intersezione in L_b.

Poichè $\mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ è chiuso in $\mathfrak{B}'$, $L_{\text{d.q.p.}}$ è chiuso in L_b; L_b è completo, poichè $\mathfrak{D}_{L^1}$ è metrico ed E_σ completo; allora $L_{\text{d q.p.}}$, con la topologia relativa da L_b, è completo.

Si ha: $L_{\text{d.q.p.}} \simeq E_\sigma \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$ ($\widehat{\otimes}_\varepsilon$ è il completamento della ε-topologia di Grothendieck su $E_\sigma \otimes \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}}$).

Per provare l'isomorfismo di sopra, sarà dimostrato che:

a) $E \otimes \mathfrak{B}'$ è denso in $L_{\text{d.q.p.}}$;

b) $\psi : L_{\text{d.q.p.}} \to L_\varepsilon\ (E'_m\,;\, \mathfrak{B}'_{\text{q.p.}})$, $\psi(T) = \varphi_T$, $\varphi_T(\alpha) = \alpha \circ T$, $\alpha \in T'$, è isomorfismo topologico (m su E' è la topologia di MacKey; L_ε ha la topologia dell'uniforme convergenza sugli equicontinui di E', duale di E_σ).

DIMOSTRAZIONE. *a*) sia $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A, V)$, A limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$, V intorno di zero in E_σ, un intorno di zero in $L_{\text{d.q.p.}}$ $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}(A, V_1)$, dove $V_1 = \{u \in E,\ |\alpha_k(u)| \leq \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n$; ε reale positivo, $\alpha_k \in \mathrm{E}'$ linearmente indipendenti$\}$.

Scelto $u_i \in \cap \{\mathrm{Ker}\,(\alpha_j),\ j \neq i\}$, con $\alpha_i(u_i) = 1$, se $T \in L_{\text{d.q.p.}}$ si ha:

$$T - \sum_1^n{}_i\, u_i \otimes (\alpha_i \circ T) \in \mathcal{U}(A, V_1) \subseteq \mathcal{U}.$$

Nel fatto: se $\varphi(x) \in A$,

$$\alpha_k\langle T \cdot \varphi \rangle - \alpha_k\Big[\sum_1^n{}_i\, u_i \langle \alpha_i \circ T \cdot \varphi \rangle\Big] = \langle \alpha_k \circ T \cdot \varphi \rangle - \langle \alpha_k \circ T \cdot \varphi \rangle = 0;$$

b) dimostriamo che $\psi(T)$ appartiene a $L_\varepsilon\,(E'_m\,;\,\mathcal{B}'_{\text{q.p.}})$.

Sia A limitato in $\mathcal{D}_{L^1}$: $A^0 \cap \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, A^0 in $\mathcal{B}'$, è intorno di zero in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ $\langle T\cdot A\rangle = \cup\{\langle T\cdot\varphi\rangle,\ \varphi\in A\}$ è totalmente limitato in E_σ; allora $\Gamma(\langle T\cdot A\rangle)^-$, estensione convessa bilanciata e chiusa di $\langle T\cdot A\rangle$, è compatta in E_σ, [12], pag. 113. $\{\Gamma(\langle T\cdot A\rangle)^-\}^0$ è in E' m-intorno di zero; se $\alpha\in\{\Gamma(\langle T\cdot A\rangle)^-\}^0$ e $\varphi(x)\in A$, $|\langle\alpha\circ T\cdot\varphi\rangle|\leq 1$. Ciò implica $\psi(T)\in L_\varepsilon$ $(E'_m\,;\,\mathcal{B}'_{\text{q.p.}})$

ψ è iniettiva: se $\psi(T)=0$, allora $\forall\alpha\in E'$, $\alpha\circ T=0$: per il teorema di Hahn-Banach $T\equiv 0$.

ψ è suriettiva: sia $\varphi: E'_m \to \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$; $\varphi: E'_m\to\mathcal{B}'$ e, quindi, $\varphi: E'_\sigma\to\mathcal{B}'_\sigma$ è ancora continua, [10], pag. 367.

È continua anche la trasposta di φ: ${}^t\varphi: (\mathcal{B}'_\sigma)'_m \to (E'_\sigma)_m$. Ma $(\mathcal{B}'_\sigma)'_m = \mathcal{D}_{L^1}$ ed $E=(E'_\sigma)'$ sicchè ${}^t\varphi: \mathcal{D}_{L^1}\to E_\sigma$. Poichè $\alpha\circ{}^t\varphi=\varphi(\alpha)\in\mathcal{B}'$ q.p., $\psi({}^t\varphi)=\varphi\in L_\varepsilon\,(E'_m\,;\,\mathcal{B}'$ q.p.)

ψ è continua e aperta:

$$\mathcal{U}(\{\alpha\},\ A^0\cap\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}) = \{T\in L_\varepsilon:\ \alpha\circ T\in A^0\cap\mathcal{B}'_{\text{q.p.}},\ \forall\alpha\in\{\alpha\}\},$$

$\{\alpha\}$ equicontinuo di E', è intorno di zero in L_ε. $\{\alpha\}^0$, polare di $\{\alpha\}$ in E, è intorno di zero in E_σ; allora l'intorno di zero in $L_{\text{d.q.p.}}$, $\mathcal{U}(A,\{\alpha\}^0)$, è mappato da ψ su $\mathcal{U}(\{\alpha\},\ A^0\cap\mathcal{B}'_{\text{q.p.}})$.

Poichè $L_\varepsilon\,(E'_m\,;\,\mathcal{B}'_{\text{q.p.}})$ subordina su $E_\sigma\otimes\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ la ε-topologia, $L_{\text{d.q.p.}}\simeq E_\sigma\otimes_\varepsilon\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$.

OSSERVAZIONE 1. Sia B uno spazio di Banach sui complessi e B_σ B con la sua topologia debole. $\mathcal{C}=\{f: R\to B_\sigma,\ f$ continua e limitata$\}$, su $\mathcal{C}$ la topologia vettoriale sia quella dell'uniforme convergenza su R. Se B_σ è completo $\mathcal{C}$ è completo; $\mathcal{C}$ contiene le funzioni debolmente quasi periodiche di Amerio. Indicato con $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}$ il sottospazio di $\mathcal{C}$ di tali funzioni esso è chiuso in $\mathcal{C}$ e, quindi, completo. Indicato con $\mathcal{C}_{\text{q.p.}}$ lo spazio vettoriale delle funzioni complesse, di variabile reale, quasi periodiche secondo H. Bohr, con la topologia dell'uniforme convergenza su R si ha, come sopra, $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}\simeq B_\sigma\otimes_\varepsilon\mathcal{C}_{\text{q.p.}}$.

La caratterizzazione trovata per $\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}$ equivale ad un teorema di approssimazione delle $f\in\mathcal{C}_{\text{d.q.p.}}$ mediante polinomi trigonometrici vettoriali: *$f \in \mathcal{C}$ è d q.p. se e solo se esiste qualche rete di polinomi trigonometri vettoriali che l'approssima.*

OSSERVAZIONE 2. Sia $\mathcal{B}_{\text{q.p.}} = \{f : R \to C,\ f \in \mathcal{C}^\infty$, quasi periodica secondo Bohr, assieme ad ogni sua derivata$\}$. Si ha: $E \otimes \mathcal{B}_{\text{q.p.}}$ denso in $L_{\text{d.q.p.}}$.

DIMOSTRAZIANE. È sufficiente tener presente che $\mathcal{B}_{\text{q.p.}}$ è denso in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, [7], pag. 206.

§ 3. Per la caratterizzazione delle $T \in L_{\text{d.q.p.}}$ si hanno i seguenti:

a) Sia $T \in L_{\text{d.q.p.}}$: $(\tau_h T)$, $h \in R$, è relativamente compatto in L_b. Viceversa: Se $T \in L_b$ e $(\tau_h T)$ è relativamente compatto in L_b, $T \in_{\text{d.q.p.}}$ (se $h \in R$ e $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_{L^1}$, $\langle \tau_h T \cdot \varphi \rangle = \langle T \cdot \varphi(x+h) \rangle$).

Il concetto di mappa trasposta permette di enunciare *a*) anche così:

a') Sia $T \in L_b$: $T \in L_{\text{d.q.p.}}$ se e solo se $(\tau_h {}^t T)$, ${}^t T : E'_m \to \mathcal{B}'$, è relativamente compatto in $L_\varepsilon\ (E'_m\ ;\ \mathcal{B}')$.

La caratterizzazione delle distribuzioni scalari quasi periodiche in [7], pag. 206, *b*) e la definizione di funzione d.q.p. danno luogo a:

b) sia $\mathfrak{D}$ il dominio delle distribuzioni scalari: $T \in L_b$ è d.q.p. se e solo se $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle : R \to E_\sigma$ è d.q.p. $\forall \gamma(x) \in \mathfrak{D}$.

c) Sia $T \in L_b$. Posto $\theta_T(h) : R \to L_b$, $\theta_T(h) = \tau_h T$, T è d.q.p. se e solo se $\theta_T(h)$ soddisfa la proprietà di Bochner generalizzata (da ogni rete $\theta_T(h+h_i)$ si può estrarre una sottorete, $\theta_T(h+h_{i_j})$ convergente, uniformemente rispetto a $h \in R$, in L_b).

DIMOSTRAZIONE. *a*) Si fa uso del fatto che in uno spazio vettoriale topologico completo i concetti di « precompatto » (totalmente limitato) e di « relativamente compatto » coincidono.

Sia $T \in L_{\text{d.q.p.}}$ è sufficiente dimostrare che $(\tau_h T)$ è precompatto in L_b rispetto ad intorni di zero del tipo $\mathcal{U} = \mathcal{U}(A, \{\alpha\}^0)$, A limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$, $\alpha \in E'$, $\{\alpha\}^0 = \{u \in E : |\alpha(u)| \leq 1\}$.

Se $(\tau_h T)$ non fosse precompatto in L_b esisterebbe $\mathcal{U}$ intorno di zero in L_b tale che una relazione del tipo:

$$(\tau_h T) \subseteq \tau_{h_1} T + \mathcal{U} \cup \ldots \cup \tau_{h_n} T + \mathcal{U}, \qquad n < +\infty,$$

non è mai vera. Si può estrarre allora da $(\tau_h T)$ una sequenza $(\tau_{h_i} T)$ con la proprietà:

$$\tau_{h_{i+1}} T \notin \tau_{h_1} T + \mathcal{U} \cup \ldots \cup \tau_{h_i} T + \mathcal{U}.$$

Poichè $\alpha \circ T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ e $\alpha \circ (\tau_h T) = \tau_h(\alpha \circ T)$, da $\tau_{h_i}(\alpha \circ T)$ si può estrarre una sottorete convergente in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$. Indicato con V l'intorno di zero in $\mathcal{B}'$, $V = \{Q \in \mathcal{B}' : |\langle Q \cdot A \rangle| \leq 1\}$ esiste $j_0 = j_0(V)$ tale che se j_1 e j_2 sono $\geq j_0$ si ha:

$$|\langle \tau_{h_{i_{J_1}}}(\alpha \circ T) - \tau_{h_{i_{J_2}}}(\alpha \circ T) \cdot A \rangle| \leq \varepsilon.$$

Assurdo.

Viceversa. sia $(\tau_h T)$ relativamente compatto in L_b.

Se $\alpha \in E'$, $\psi_\alpha : L_b \to \mathcal{B}'$ è continua; valendo $\{\psi_\alpha(\tau_h T)\} \equiv \{\tau_h(\alpha \circ T)\}$, $\alpha \circ T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ Allora T è d.q.p.

a') Per la dimostrazione di *a'*) è sufficiente tener presente che la mappa ψ, usata nella caratterizzazione topologica di $L_{\text{d.q.p.}}$ in § 2, con dominio L_b e codominio L_ε $(E'_m ; \mathcal{B}')$ è la mappa di trasposizione ed è isomorfismo topologico.

b) Sia $T \in L_{\text{d.q.p.}}$; se $\alpha \in E'$ e $\gamma(t) \in \mathcal{D}$,

$$\alpha \langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle = \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \gamma(x-t) \rangle, \qquad x \in R.$$

Poichè $\alpha \circ T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ $\forall \alpha \in E'$, $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$ è funzione, di R in E_σ, d.q.p.

Viceversa: se $\langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$ è d.q.p., $\alpha \langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$ è quasi periodica. Valendo ciò $\forall \gamma(t) \in \mathcal{D}$, $\alpha \circ T$ è quasi periodica: allora T è d.q.p.

c) Per la dimostrazione di *c*) è sufficiente tener presente che se la rete T_j converge a Q in L_b, allora $\tau_h T_j$ converge a $\tau_h Q$, uniformemente rispetto a $h \in R$.

Ciò a causa del fatto che se $A \subseteq \mathcal{D}_{L^1}$ è limitato, $(\tau_h A) = \{\varphi(x+h), \forall \varphi \in A, \forall h \in R\}$ è ancora limitato in $\mathcal{D}_{L^1}$.

OSSERVAZIONE 1. Se E_σ non è completo *a*) continua a valere se si sostituisce a relativamente compatto, precompatto.

OSSERVAZIONE 2. La dimostrazione di a) realizza quanto affermato in b) del § 1.

OSSERVAZIONE 3. La dimostrazione di b) prova, implicitamente, che se $\varphi(t) \in \mathfrak{D}_{L^1}$, $\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle$, funzione di R in E_σ, è d.q.p.; è sufficiente tener presente che $\mathfrak{D}$ è denso in $\mathfrak{D}_{L^1}$. Allora, se $\varphi(t) \in \mathfrak{D}_{L^1}$, esiste una sequenza, $\gamma_i(t) \in \mathfrak{D}$, con $\lim_i \gamma_i(t) = \varphi(t)$; poichè si ha: $\lim_i \gamma_i(x-t) = \varphi(x-t)$ uniformemente rispetto a $x \in R$, si ha, pure,

$$\langle T_t \cdot \gamma_i(x-t) \rangle \rightarrow \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle.$$

§ **4.** Sia $u \otimes T \in E \otimes \mathcal{B}'_{\text{d.b}}$; se $\alpha \in E'$ e se $M: \mathcal{B}'_{\text{q.p.}} \rightarrow C$ è la mappa lineare del valor medio delle $T \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, si ha:

$$M[\alpha \circ (u \otimes T)] = M(T)\alpha(u).$$

Si consideri $i \otimes_\varepsilon M : E_\sigma \otimes_\varepsilon \mathcal{B}'_{\text{q.p.}} \rightarrow E_\sigma \otimes_\varepsilon C$, i identità in E_σ, $i \otimes_\varepsilon M[u \otimes_\varepsilon T] = u \otimes_\varepsilon M(T)$, $i \otimes_\varepsilon M$ è continua, [10], pag. 439; si può quindi estendere in uno ed un solo modo, per continuità, a $E_\sigma \widehat{\otimes}_\varepsilon \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, con valori in $E_\sigma \widehat{\otimes}_\varepsilon C$. Indicata con M_1 tale estensione M_1 si può pensare con codominio E. Assumiamo M_1 come mappa lineare di valor medio vettoriale delle T d.q.p.

Sia $\lambda \in R$ e $a_\lambda(T)$, $T \in L_{\text{d.q.p.}}$, sia così definito:

$$\bar{a}_\lambda(T) = M_1[(\exp. -2\pi i \lambda x)T].$$

Si ha: $\forall \alpha \in E'$, $\alpha[a_\lambda(T)] = a_\lambda(\alpha \circ T)$, $a_\lambda(Q)$, $Q \in \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$, definito come in [7], pag. 208.

DIMOSTRAZIONE. Sia $T \in L_{\text{d.q.p.}}$: $T = \lim_j S_j$ in $L_{\text{d.q.p.}}$, $S_j = \Sigma_{(j)}^k u_k \otimes T_k \in E \otimes \mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$. Risulta facilmente:

$$(\exp. -2\pi i \lambda x) S_j = \Sigma_k^{(j)} u_k \otimes (\exp. -2\pi i \lambda x) T_k .$$

La proprietà dei limitati in $\mathfrak{D}_{L^1}$ dà:

$$(\exp. -2\pi i \lambda x) S_j \rightarrow (\exp. -2\pi i \lambda x) T$$

in $L_{\text{d.q.p.}}$. Allora

$$\bar{a}_\lambda(T) = \lim_j M_1[(\exp. -2\pi i\lambda x)S_j] = \lim_j \Sigma_k^{(j)} a_\lambda(T_k)u_k .$$

Ne segue:

$$\alpha[\bar{a}_\lambda(T)] = \lim_j \Sigma_k^{(j)} a_\lambda(T_k)\alpha(u_k).$$

È, anche, $\lim_j \alpha \circ S_j = \alpha \circ T$ in $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$ e, a causa della continuità di M su $\mathcal{B}'_{\text{q.p.}}$,

$$\lim_j a_\lambda(\alpha \circ S_j) = a_\lambda(\alpha \circ T).$$

La dimostrazione è compiuta.

Osservazione 1. Segue facilmente, da sopra, *se* $\bar{a}_\lambda(T)=0$, $\forall\lambda\in R$, T è identicamente nulla.

Dimostrazione. Se $\bar{a}_\lambda(T)=0$ $\forall\lambda\in R$, $\alpha \circ T$ è tale che $a_\lambda(\alpha \circ T)=0$ $\forall\lambda\in R$. Allora $\alpha \circ T \equiv 0$ $\forall\alpha\in E'$. Ricordando il teorema di Hahn-Banach, $T\equiv 0$.

Osservazione 2. Il significato delle $\bar{a}_\lambda(T)$ è quello di coefficienti di Fourier vettoriali delle T d.q.p. Si ha, come enunciato in *c*) § 1,

$T_1 \equiv T_2$, *T_1 e T_2 d.q.p., se e solo se* $\{\bar{a}_\lambda(T_1)\}_{\lambda\in R} \equiv \{\bar{a}_\lambda(T_2)\}_{\lambda\in R}$.

Osservazione 3. Sia $g : R \to E_\sigma$ funzone d.q.p.
È naturale pensare il

$$\lim_{T\to+\infty} 1/T \int_0^T g(x)dx$$

come valore medio vettoriale di g. Sia $T_g : \mathfrak{D}_{L^1} \to E_\sigma$,

$$\langle T_g \cdot \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)dx : \alpha \circ T_g = T_{\alpha \circ g}, \qquad \alpha\in E'.$$

Si ha:

$$M_1(T_g) = \lim_{T\to+\infty} 1/T \int_0^T g(x)dx.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\alpha \in E' : \alpha[M_1(T_g)] = \alpha[\bar{a}_0(T_g)] = a_0(\alpha \circ T_g) = a_0(T_{\alpha^\frown g}) =$$

$$= \lim_{T \to +\infty} 1/T \int_0^T \alpha(g(x))dx = \alpha[\lim_{T \to +\infty} 1/T \int_0^T g(x)dx].$$

Valendo la relazione di sopra per ogni $\alpha \in E'$ la dimostrazione è compiuta.

L'osservazione 1 e quest'ultimo risultato danno una conferma della accettabilità di M_1 come mappa di valor medio vettoriale delle distribuzioni d.q.p.

§ **5.** Sia B uno spazio di Banach sui complessi C.

DEF. 2. *In $L_b = L_b$ $(\mathfrak{D}_{L^1}$; $B)$, spazio vettoriale su C delle forme lineari e continue T di $\mathfrak{D}_{L^1}$ in B, con la topologia dell'uniforme convergenza sui limitati di $\mathfrak{D}_{L^1}$, T si dice (fortemente) quasi periodica, (q.p.), se l'insieme delle sue traslate, $(\tau_h T)$, $h \in R$, in L_b, relativamente compatto.*

È evidente che il sottospazio di L_b, $L_{\text{q.p.}}$, delle T che sono q.p., è chiuso; poichè L_b è completo anche $L_{\text{q.p.}}$, con la topologia relativa da L_b, è completo. Risulta: *Se $f : R \to B$ è quasi periodica, $T_f : \mathfrak{D}_{L^1} \to B$,*

$$\langle T_f \cdot \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x),$$

è quasi periodica; l'insieme delle T_f è denso in L q.p.

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione dipende dal fatto che in $\mathcal{C} = \mathcal{C}\{f : R \to B$, continue e limitate$\}$ con la topologia vettoriale dell'uniforme convergenza su R, se f(x) è quasi periodica, $\{f(x+h), \forall h \in R\}$ è relativamente compatto. Indicato con $\mathcal{C}_{\text{q.p.}}$ (B) il sottospazio di $\mathcal{C}$ delle funzioni quasi periodiche, e pensato $\mathcal{C}_{\text{q.p.}}$ (B) come sottospazio di L_b, la topologia relativa da L_b è meno fine dell'originale.

Per la dimostrazione della seconda affermazione si premettono i seguenti lemmi:

a) se $T \in L_b$ e $\{\alpha\}$ è un equicontinuo nel duale B' di B, $\{\alpha \circ T\}$ è limitato in $\mathfrak{B}'$;

b) se $T \in L_b$, $\varphi(t)$ e $\psi(t) \in \mathfrak{D}_{L^1}$,

$$\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle = \langle \langle T_t \cdot \psi(x+t) \rangle \cdot \varphi(x) \rangle.$$

Per *a*) si ha: il polare di $\{\alpha\}$ in B, $\{\alpha\}^0$, è intorno di zero. Considerato $V = V(A, \{\alpha\}^0)$, intorno di zero in L_b se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$, ρT, $\rho \in R$, è contenuto in V. Ciò implica: $\rho\{\alpha \circ T\} \subseteq U = U(A, |\ | \leq 1)$ con U intorno di zero in $\mathfrak{B}'$. Allora $\{\alpha \circ T\}$ è limitato in $\mathfrak{B}'$.

Per *b*) si ha $\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle : R \to B$ è scalarmente derivabile e, quindi, continua [9]; poichè $\{\varphi(x-t)\}_{x \in R}$ è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$, $\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle$ è limitata e, quindi, il simbolo $\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle$ ha significato.

Se $\alpha \in \mathfrak{B}'$,

$$\alpha[\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle] = \langle \langle (\alpha \circ T)_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle;$$

sicchè è sufficiente dimostrare *b*) nel caso che $T \in \mathfrak{B}'$.

In $\mathfrak{B}'$ è denso $\mathfrak{B}$ [1]), [7], pag. 202; se $f(t) \in \mathfrak{B}$, facili calcoli danno:

$$\langle \langle f(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle = \langle \langle f(x) \cdot \psi(x+t) \rangle \cdot \varphi(x) \rangle.$$

Sia $T \in \mathfrak{B}'$: $T = \lim_j f_j(t)$, $f_j(t) \in \mathfrak{B}$, ciò implica:

$$\langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle = \lim_j \langle f_j(t) \cdot \varphi(x-t) \rangle$$

e la convergenza ha luogo uniformemente rispetto a $x \in R$. Allora:

$$\langle \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \cdot \psi(x) \rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} \langle T_t \cdot \varphi(x-t) \rangle \psi(x) dx =$$

---

[1]) $\mathfrak{B}$ sia lo spazio vettoriale delle funzioni di variabile reale, complesse, indefinitamente derivabili, limitate con ogni loro derivata. Su $\mathfrak{B}$ la topologia vettoriale sia quella che ha un sistema di intorni di zero nei $V(m, \varepsilon) = \{f \quad \mathfrak{B}, \sup_{p \leq m} |D^p f| \leq \varepsilon$, m naturale, ε reale positivo$\}$. $\mathfrak{B}$ è uno spazio di Fréchet.

$$=\lim_j \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_j(t)\cdot\varphi(x-t)\rangle\psi(x)dx=\lim_j \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_j(t)\cdot\psi(x+t)\rangle\varphi(x)dx=$$

$$=\int_{\infty-}^{+\infty} \langle T_t\cdot\psi(x+t)\rangle\varphi(x)dx=\langle\langle T_t\cdot\psi(x+t)\rangle\cdot\varphi(x)\rangle.$$

Da *a*) e *b*) segue: sia $\alpha_j(x)\in\mathfrak{D}$, $\alpha_j(x)\to\delta$, δ la distribuzione di Dirac, la convergenza avendo luogo in $\mathcal{E}'$ come in [7], pag. 166.

Sia $T\in L_{\text{q.p.}}$ e $V=V(A, \{\alpha\}^0)$ un intorno di zero in L_b :

$$|\,\alpha[\langle\langle T_t\cdot\alpha_j(x-t)\rangle\cdot\psi(x)\rangle-\langle T\cdot\psi\rangle]\,|=$$
$$=|\,\langle\langle(\alpha\circ T)_t\cdot\alpha_j(x-t)\rangle\cdot\psi(x)\rangle-\langle\alpha\circ T\cdot\psi(x)\rangle\,|=$$
$$=|\,\langle\alpha_j(x)\cdot\langle(\alpha\circ T)_t\cdot\psi(x+t)\rangle\rangle-\langle\delta\cdot\langle(\alpha\circ T)_t\cdot\psi(x+t)\rangle\rangle\,|=$$
$$=|\,\langle\alpha_j(x)-\delta\cdot\langle(\alpha\circ T)_t\cdot\psi(x+t)\rangle\rangle\,|.$$

Per *a*): $\langle(\alpha\circ T)_t\psi(x+t)\rangle$, $\psi(x)\in A\subseteq\mathfrak{D}_{L^1}$ limitato, $\alpha\in\{\alpha\}\subseteq B'$ equicontinuo, è limitato in $\mathcal{B}$, poichè i limitati di $\mathcal{B}$ sono limitati anche in $\mathcal{E}$, l'iniezione $i:\mathcal{B}\to\mathcal{E}$ essendo continua, se j_0 è opportuno, $\forall j\geq j_0$ si ha:

$$|\,\langle\alpha_j(x)-\delta\cdot\langle(\alpha\circ T)_t\cdot\psi(x+t)\rangle\rangle\,|\leq 1.$$

Allora:

$$\langle T_t\cdot\alpha_j(x-t)\rangle-T\in V \quad\text{se } j\geq j_0\,.$$

Poichè $\langle T_t\cdot\alpha_j(x-t)\rangle$ è quasi periodica, la dimostrazione è compiuta.

La dimostrazione di sopra dà, subito: *$T\in L_b$ è quasi periodica se e solo se $\langle T_t\cdot\gamma(x-t)\rangle: R\to B$ è quasi periodica* $\forall\gamma(t)\in\mathfrak{D}$. (Estensione ad caso vettoriale di *b*) [7], pag. 206).

Dimostrazione. Il tipo di convergenza in L_b rende la condizione necessaria evidente.

Per la condizione sufficiente si ha: $\langle T_t\cdot\gamma(x-t)\rangle: R\to B$, quasi periodica $\forall\gamma(t)\in\mathfrak{D}$ implica, secondo affermazione del teorema di sopra, che T è approssimata da funzioni quasi periodiche. Poichè $L_{\text{q.p.}}$ è chiuso anche la condizione sufficiente è dimostrata.

OSSERVAZIONE 1. *Se* $f: R \to B$ *è* d.q.p. *senza essere* q.p., *e se è uniformemente continua,* T_f *è* d.q.p. *senza essere* q.p.

DIMOSTRAZIONE. Si supponga T_f q.p. Se $\alpha_j(x) \to \delta$ come in [7], pag. 166 si ha: $\langle (T_f)_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle$ quasi periodica. Se V è intorno di zero in B chiuso, convesso, bilanciato, p_V, seminorma associata a V è così definita: $p_V(x) = \inf_{\rho \geq 0,\ \rho x \in V} \rho$. Si ha:

$$p_V[f(x) - \langle (T_f)_t \cdot \alpha_j(x-t) \rangle] = p_V[\int_{-1/j}^{+1/j} \alpha_j(t) f(x) dt - \int_{-1/j}^{+1/j} f(x-t) \alpha_j(t) dt] =$$

$$= p_V[\int_{-1/j}^{+1/j} \alpha_j(t)[f(x) - f(x-t)] dt] \leq \int_{-1/j}^{+1/j} p_V[f(x) - f(x-t)] \alpha_j(t) dt.$$

Poichè $f(x)$ è uniformemente continua se j è opportuno,

$$p_V[f(x) - f(x-t)] \leq 1.$$

Ciò implica:

$$\int_{-1/j}^{+1/j} p_V[f(x) - f(x-t)] \alpha_j(t) dt \leq 1.$$

Allora: $f(x)$ è approssimata uniformemente rispetto a $x \in R$ da funzioni quasi periodiche. Assurdo. Si garantisce, così, l'esistenza di distribnzioni vettoriali che sono d.q.p. senza essere *q.p.*

§ 6. Le dimostrazioni nel § 5 ed il teorema di approssimazione delle funzioni vettoriali q.p. mediante polinomi trigonometrici vettoriali [2] danno il teorema citato in *d*) § 1: *Condizione necessaria e sufficiente al fine che T* d.q.p. *sia* q.p. *è che* $\forall A$ *limitato in* $\mathfrak{D}_{L^1}$, $\langle T \cdot A \rangle = \{\langle T \cdot \varphi \rangle, \forall \varphi \in A\} \subseteq B$ *sia relativamente compatto.*

DIMOSTRAZIONE. *La condizione è necessaria.*

Sia $V = V\{u \in B : \| u \| \leq \eta$, η reale positivo$\}$ intorno di zero in B. Se A è limitato in $\mathfrak{D}_{L^1}$ e se ε è un reale positivo, esiste un polinomio trigonometrico a coefficienti in B, tale che, se $T \in L_{\text{q.p.}}$, si ha:

$$\| \langle T \cdot \varphi \rangle - \langle P \cdot \varphi \rangle \| \leq \varepsilon, \qquad \forall \varphi \in A,$$

P il polinomio.

$\langle P \cdot A \rangle = \{ \langle P \cdot \varphi \rangle \ \forall \varphi \in A \}$ è relativamente compatto in B, poichè sottoinsieme limitato di un sottospazio vettoriale di dimensione finita di B. Ne segue: esiste

$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq B, \qquad n < +\infty,$$

con

$$\langle P \cdot A \rangle \subseteq u_1 + V \cup u_2 + V \cup \ldots \cup u_n + V.$$

Se

$$V_1 = V_1\{u \in B, \ \| u \| \leq \eta + \varepsilon\}$$

si ha: se $\varphi(x) \in A$

$$\| \langle T \cdot \varphi \rangle - \langle P \cdot \varphi \rangle \| \leq \varepsilon$$

e, poichè

$$\| \langle P \cdot \varphi \rangle - u_i \| \leq \eta$$

per qualche

$$u_i \in \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}, \ \| \langle T \cdot \varphi \rangle - u_i \| \leq \eta + \varepsilon.$$

Allora:

$$\langle T \cdot A \rangle \subseteq u_1 + V_1 \cup u_2 + V_1 \cup \ldots \cup u_n + V_1 .$$

$\langle T \cdot A \rangle$ è precompatto in B .

DIMOSTRAZIONE 1. *La condizione è sufficiente.*

Si fa uso del teorema di Amerio [1] e dell'ultima proposizione del § 5.

$T : \mathfrak{D}_{L^1} \to B$ è senz'altro continua poichè l'immagine di ogni limitato è limitata e $\mathfrak{D}_{L^1}$ è spazio di Fréchet.

Se $\gamma(t) \in \mathfrak{D}$, $\theta(x) : R \to B$, $\theta(x) = \langle T_t \cdot \gamma(x-t) \rangle$ è d.q.p. poichè è d.q.p. T; $\theta(x)$ ha codominio relativamente compatto poichè $\{\theta(x), \forall x \in R\}$ è, in B, l'immagine mediante T del limitato $A = \{\gamma(x-t), \forall x \in R\}$ di $\mathfrak{D}_{L^1}$. Allora $\theta(x)$ è q.p. $\forall \gamma(t) \in \mathfrak{D}$. Ne segue: T è q.p.

DIMOSTRAZIONE 2. La condizione sufficiente, come dimostrato di sopra, fa uso di un teorema, quello di Amerio, formulato per le funzioni. Se si suppone B con topologia debole completa, tale condizione può essere dimostrata direttamente. Nel fatto: si supponga $(\tau_h T)$ non precompatto in L_b. Esiste $U=U(A, \|\ \| \leq \varepsilon)=\{T \in L_b : \| \langle T \cdot A \rangle \| \leq \varepsilon\}$ e una sequenza, $(\tau_{h_i} T) \subseteq (\tau_h T)$ con la proprietà:

$$\tau_{h_{i+1}} T \notin \tau_{h_1} T + U \cup \ldots \cup \tau_{h_i} T + U.$$

Visto che B ha topologia debole completa, il fatto che T sia d.q.p. implica la possibilità di estrarre dalla sequenza $\cdot(\tau_{h_i} T)$ una sottorete, $(\tau_{h_{i_j}} T)$, con $\lim_j \tau_{h_{i_j}} T = Q$ in $L_{\text{d.q.p.}}$. Si pone, per brevità $\tau_{h_{i_j}} T = b_j$; possibile determinare la rete $\{\varphi_j\} \subseteq A$ con: $\| \langle b_j \cdot \varphi_j \rangle - \langle b_{j'}, \varphi_j \rangle \| > > \eta > 0$, η conveniente, j' un successivo di j. In base alle ipotesi: da $\langle b_j \cdot \varphi_j \rangle$ si può estrarre una sequenza, $\langle b_{j_\mu}; \varphi_{j_\mu} \rangle$ convergente a un $u_1 \in B$; da $\langle b_{j'_\mu} \cdot \varphi_{j_\mu} \rangle$ si può estrarre una sequenza, $\langle b_{j'_{\mu_\nu}} \cdot \varphi_{j_{\mu_\nu}} \rangle$ convergente in B verso un u_2.

Per non complicare le notazioni si può supporre: $\lim_j \langle b_j \cdot \varphi_j \rangle = u_1$, $\lim_j \langle b_{j'}, \varphi_j \rangle = u_2$ in B e, senz'altro, $\| u_1 - u_2 \| \geq \eta$. Esiste $\bar{\alpha} \in B'$ con: $| \bar{\alpha}(u_1) - \bar{\alpha}(u_2) | = h > 0$. Poichè $b_j \to Q$ in $L_{\text{d.q.p.}}$, $\bar{\alpha} \circ b_j \to \bar{\alpha} \circ Q$ in $\mathfrak{B}'$; ciò implica: esiste j_0 tale che, se j e $j' \geq j_0$

$$| \langle \bar{\alpha} \circ b_j \cdot \varphi_j \rangle - \langle \bar{\alpha} \circ b_{j'} \cdot \varphi_j \rangle | \leq h/2 \qquad \forall i.$$

Sicchè, $| \bar{\alpha}(u_1) - \bar{\alpha}(u_2) : | \leq h/2$. Assurdo.

BIBLIOGRAFIA

[1] AMERIO L.: *Funzioni debolmente quasi periodiche.* Rend. Sem. Mat. di Padova, 1960.

[2] AMERIO L.: *Sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi periodiche.* Acc. Naz. dei Lincei Rend. della Cl. di Sc. fis. mat. e nat. Serie VIII, vol. XXXIV, fasc. 2, febbraio 1963; e *Ancora sul teorema di approssimazione delle funzioni quasi periodiche.* Rend. Acc. Naz. dei Lincei, 36 (1964), pag. 101-106.

[3] AMERIO L.: *Sull'integrazione delle funzioni quasi periodiche astratte.* Ann. di Mat., 1961.

[4] AMERIO L.: *Abstract almost periodic functions and functional equations.* Boll. dell'Un. Mat. Italiana, Serie III, Anno XX, 1965, pag. 287-331.

[5] BOCHNER S.: *Abstrakte fastperiodische Funktionen.* Acta Math., 1933.

[6] FAVARD J.: *Leçons sur les fonctions presque periodiques.* Paris, Gauthier-Villars, 1933.

[7] SCHWARTZ L.: *Theorie des distributions.* Hermann, 1966.

[8] SCHWARTZ L.: *Theorie des distributiones à valeurs vectionèlles.* Ann. Ist. Fourier, Tomo 7, 1957 e Tomo 8, 1958 .

[9] SCHWARTZ L.: *Espaces de fonctions differentiables à valeurs vectorielles.* Journal d'analyse mathematique, 1954, pag. 88-148.

[10] TREVES F.: *Linear topological spaces, distributions and Kernels.* Accademie Press, 1967.

[11] ZAIDMAN S.: *Corso C.I.M.E.* 1961.

[12] KELLEY J. L., NAMIOKA I.: *Linear topological spaces.* D. Van Nostrand Company, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1º settembre 1970.