Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

W. Streb

Über Ringe die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 47 (1972), p. 313-329

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__47__313_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 47 (1972)

ÜBER RINGE DIE VON IHREN EINHEITENGRUPPEN ERZEUGT WERDEN

W. STREB *)

Ein Ring R heiße U-Ring, wenn R eine Einheitengruppe besitzt, U Untergruppe dieser Einheitengruppe ist und $R=|U|$ (oder gleichwertig $R=\langle U\rangle$) gilt. Hierbei sei

$$|A| \text{ der von } A\subseteq R \text{ erzeugte Modul und}$$

$$\langle A\rangle \text{ der von } A\subseteq R \text{ erzeugte Ring.}$$

Jeder Ring R mit Einheitengruppe U unfaßt den U-Ring $|U|$. Wir zeigen:

Ein U-Ring R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn U stark nilpotent [1; S. 364] und R'' nilpotent ist.

Ein U-Ring R ist ein Ring endlicher Klasse [2; p. 343] genau dann, wenn U stark nilpotent und R' nilpotent ist.

Hierbei sei

$$b\circ a:=ba-ab \text{ für } a,\ b\in R,$$

$$B\circ A:=(b\circ a \mid b\in B,\ a\in A) \text{ für } A,\ B\subseteq R,$$

$$R' \text{ das von } R\circ R \text{ erzeugte Ideal von } R \text{ und}$$

$$R'' \text{ das von } R\circ(R\circ R) \text{ erzeugte Ideal von } R.$$

Ist R ein U-Ring und erfüllt eine Gruppe V mit $U'\subseteq V\subseteq U$ die Maximalbedingung für Normalteiler, so gilt:

*) Indirizzo dell'A.: Leibnizweg, 10, 857 Pegnitz, Germania occ.

R ist ein Ring endlicher Klasse genau dann, wenn U stark nilpotent und R' nil ist.

Ist R ein U-Ring und erfüllt die Kommutatorgruppe U' von U die Maximalbedingung für Normalteiler, so gilt:

R ist ein auflösbarer Ring [2; p. 348] genau dann, wenn U' stark nilpotent und R' nil ist. Hierbei sei

$b \cdot \mathrm{a} := b^{-1}a^{-1}ba$ für $a, b \in U$,

$B \cdot A := (b \cdot a \mid b \in B,\ a \in A)$ für $A, B \subseteq U$,

U' der von $U \cdot U$ erzeugte Normalteiler von U und

U'' der von $U \cdot (U \cdot U)$ erzeugte Normalteiler von U.

Über beliebige Ringe R mit Einheitengruppe G zeigen wir: Ist R schwach hyperzentral [4; S. 399], so ist G nilpotent [1; S. 358].

Sei R ein U-Ring, A ein Ideal von R und V ein Normalteiler von U. Wir definieren:

$$A^U := (1+A) \cap U.$$

A^U ist bekanntlich ein Normalteiler von U.

V_U sei das von $V-1$ erzeugte Ideal von R.

Hierbei sei

$$C+B := (c+b \mid c \in C,\ b \in B) \text{ für } B, C \subseteq R.$$

Ohne besonderen Vermerk werden in dieser Arbeit des öfteren folgende einfach zu beweisende Beziehungen verwendet:

Sei R ein U-Ring. Für Ideale A und B von R und Normalteiler V und W von U gilt:

$$\text{Aus } A \subseteq B \text{ folgt } A^U \subseteq B^U.$$

$$\text{Aus } V \subseteq W \text{ folgt } V_U \subseteq W_U.$$

$$(A^U)_U \subseteq A, \quad (V_U)^U \supseteq V, \quad (U')_U = R', \quad U' \subseteq (R')^U.$$

$$V_U + W_U = X_U.$$

Hierbei sei X der von $V \cup W$ erzeugte Normalteiler von U.

Wir schließen nun die Liste der in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen *ab*:

$(x \mid x \ldots)$	Menge aller x mit den Eigenschaften ...
R	bezeichnet immer einen assoziativen Ring.
BA	$:= \lvert (ba \mid b \in B,\ a \in A) \rvert$ für $A, B \subseteq R$.
A^i	$A^1 := A,\ A^{i+1} := AA^i$ für $A \subseteq R$.
${}_iR$	${}_0R := R,\ {}_{i+1}R := R \circ {}_iR$.
$A \subseteq B$	Inklusion.
$A \subset B$	strikte Inklusion.

LEMMA 1. (1) Sei M Teilmenge und A ein Ideal von R. Es gelte

$$* \qquad R \circ (R \circ M) \subseteq A.$$

Für das von $R \circ M$ erzeugte Ideal B von R folgt:

(a) $R''B \subseteq A$.

(b) $R \circ (R \circ B) \subseteq A$.

(c) $(s \circ r)t(r \circ b) \in A$ für alle $r, s, t \in R$ und $b \in B$.

(d) $(s \circ b)t(r \circ b) \in A$ für alle $r, s, t \in R$ und $b \in B$.

(2) Für $B := R$ und $A := R''$ sind ebenfalls die Bedingungen (a)-(d) erfüllt.

BEWEIS. Zu (1): Anwendung von [4; Lemma 4, S. 403] auf R/A und $M+A/A$ liefert (a). Alle im folgenden betrachteten Kongruenzen verstehen sich modulo A. Wegen $*$ ist jedes Element von B kongruent zu einer endlichen Summe $\sum_{i=1}^{n} u_i a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j$ mit $u_i \in R$ und a_i, $b_j \in R \circ M$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$. Da weiter nach $*$ $r \circ b_j = 0$ für alle $r \in R$ und $1 \leq j \leq m$ gilt, bleibt wegen der Linearität der Kommutatoren zum Nachweis von (b) und (c) zu zeigen, daß

$$s \circ (r \circ ua) \equiv 0 \text{ und } (s \circ r)t(r \circ ua) \equiv 0$$

für alle $r, s, t, u \in R$ und $a \in R \circ M$ gilt. Diese Kongruenzen folgen aber mit $*$ und (a) mit Hilfe der folgenden Gleichungen:

$$s \circ (r \circ ua) = (s \circ (r \circ u))a + (r \circ u)(s \circ a) + s \circ u(r \circ a) \equiv 0.$$

$$(s \circ r)t(r \circ ua) = t(u \circ (s \circ r))ra - t(u \circ (sr \circ r))a +$$
$$+ t(s \circ r)u(r \circ a) - (t \circ (s \circ r))(r \circ ua) \equiv 0.$$

Zu (d): Wegen (b) gilt für $r, s, t \in R$ und $b \in B$:

$$(s \circ b)t(r \circ b) = t(r \circ (sb \circ b)) - t(r \circ (s \circ b))b - (t \circ (s \circ b))(r \circ b) \equiv 0.$$

Zu (2): Man sieht unmittelbar ein, daß (a) und (b) erfüllt sind. Da (c) und (d) in diesem Falle gleichwertig sind, ist nur (d) zu zeigen. (d) folgt aber wie bei (1).

Lemma 2. Für Ideale A und B eines U-Ringes R, die die Bedingungen (b)-(d) von Lemma 1 erfüllen, gilt:

(1) $(v \circ (gu)^{-1})(u \circ g) \in A$ für alle $v, u \in U$ und $g \in B^U$.

(2) $U \cdot (U \cdot B^U) \subseteq A^U$.

Weiter gilt:

(3) $(U'')_U \subseteq R''$.

(4) $(w \circ u)(v \circ u^{-1}) \in R''$ für alle $u, v, w \in U$.

Beweis. (1) folgt wegen $g - 1 \in B$ aus (c) und (d) auf Grund der folgenden Gleichung:

$$(v \circ (gu)^{-1})(u \circ g) =$$
$$-u^{-1}(v \circ u)u^{-1}g^{-1}(u \circ (g-1)) - u^{-1}g^{-1}(v \circ (g-1))g^{-1}(u \circ (g-1)).$$

Zu (2): Wir haben zu zeigen, daß

$$v \cdot (u \cdot g) = 1 + v^{-1}(u \cdot g)^{-1}(v \circ (u \cdot g)) \in A^U$$

für alle $g \in B^U$ und $u, v \in U$. Da A ein Ideal von R ist, reicht es auf Grund der Definition von A^U zu beweisen, daß

$$v \circ (u \cdot g) \in A$$

für alle $g \in B^U$ und $u, v \in U$. Dies folgt aber unmittelbar mit (b) und (1) auf Grund der folgenden Gleichung:

$$v \circ (u \cdot g) = (gu)^{-1}(v \circ (u \circ (g-1))) + (v \circ (gu)^{-1})(u \circ g).$$

Zu (3): Nach Lemma 1.(2) sind für $B := R$ und $A := R''$ die Bedingungen (b)-(d) erfüllt. Anwendung von Lemma 2.(2) erbringt

$$(U'')_U \subseteq ((R'')^U)_U \subseteq R''.$$

Zu (4): Wiederum wegen Lemma 1.(2) folgt aus (d)

$$(w \circ u)(v \circ u^{-1}) = -(w \circ u)u^{-1}(v \circ u)u^{-1} \in R''.$$

SATZ 1. Besitzt der U-Ring R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring, so ist U eine stark nilpotente Gruppe.

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl n, so daß ${}_nR = 0$. Sei A_i das von ${}_iR$ erzeugte Ideal von R. Für $M := {}_iR$ und $A := A_{i+2}$ ist jeweils für $0 \leq i \leq n-2$ die Voraussetzung $*$ von Lemma 1.(1) erfüllt. Demnach sind für $B := A_{i+1}$ und $A := A_{i+2}$ jeweils für $0 \leq i \leq n-2$ die Voraussetzungen (b)-(d) von Lemma 2 erfüllt. Somit gilt nach Lemma 2.(2)

$$U \cdot (U \cdot (A_{i+1})^U) \subseteq (A_{i+2})^U$$

für $0 \leq i \leq n-2$. Weiterhin gilt

$$U \cdot (A_0)^U = U \cdot U \subseteq U' \subseteq (R')^U = (A_1)^U.$$

Wegen $A_0 = R$ und $A_n = 0$ ist $(A_0)^U = U$ und $(A_n)^U = 1$. Also gibt es eine natürliche Zahl m, so daß $U_m = 1$. Hierbei sei $U_0 := U$ und $U_{i+1} := U \cdot U_i$ für $i \geq 0$. Hieraus folgt nach [1; Satz 13, S. 172] die Behauptung

SATZ 2. Ist der U-Ring R schwach hyperzentral, so ist U nilpotent.

Beweis. Sei V ein Normalteiler von U mit $V \subset U$. Wir zeigen, daß U/V ein von 1 verschiedenes Zentrum besitzt. Sei A maximales Element der nicht leeren Menge $(J \mid J$ Ideal von R, $J^U \subseteq V)$. Wegen $V \subset U$ gilt $A \subset R$. Sei weiter $M_1 := (r \mid r \in R,\ R \circ r \subseteq A)$ und $M_2 := (r \mid r \in R,\ R \circ r \subseteq M_1)$. Ist $M_1 = R$, so besitzt U/V ein von 1 verschiedenes Zentrum, da $U \cdot U \subseteq U' \subseteq (R')^U \subseteq A^U \subseteq V$ gilt. Ist dagegen $M_1 \subset R$, so gilt $R \circ M_2 \nsubseteq A$ wegen $M_2 \nsubseteq M_1$ und $M_1 \nsubseteq A$. Wir wenden Lemma 1.(1) auf $R := R$, $M := M_2$ und $A := A$ an und stellen fest, daß für $B := D$ und $A := A$ die Voraussetzungen (b)-(d) von Lemma 2.(2) erfüllt sind. Hierbei sei D das von $R \circ M_2$ erzeugte Ideal von R. Die Voraussetzungen (b)-(d) von Lemma 2.(2) sind dann auch für $B := D + A$ und $A := A$ erfüllt. Also gilt

$$* \qquad U \cdot (U \cdot (D+A)^U) \subseteq A^U \subseteq V.$$

Wegen $R \circ M_2 \nsubseteq A$ gilt $D \nsubseteq A$ und somit $D + A \supset A$. Die Maximaleigenschaft von A bedingt $(D+A)^U \nsubseteq V$. Mit $*$ folgt somit, daß U/V auch in diesem Falle ein von 1 verschiedenes Zentrum besitzt.

Da jeder Ring R mit Einheitengruppe G den G-Ring $|G|$ umfaßt, mit R auch $|G|$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring bessitzt und nach [4; Lemma 6, S. 404] mit R auch $|G|$ schwach hyperzentral ist, folgt aus den Sätzen 1 und 2.

Satz 3. Sei R ein Ring mit der Einheitengruppe G.
Ist R schwach hyperzentral, so ist G nilpotent.

Besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring, so ist G stark nilpotent.

Satz 4. Sei R ein Ring mit Einheitengruppe G. Ist R ein auflösbarer Ring, so ist G' stark nilpotent.

Beweis. Nach [2; Theorem 5.6, p. 350] ist R' nilpotent und besitzt deshalb einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Wegen $(G')_G = |G|' \subseteq R'$ besitzt das Ideal $(G')_G$ von $|G|$ und somit auch der Ring $|G'|$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Anwendung von Satz 1 auf den G'-Ring $|G'|$ liefert die Behauptung.

Lemma 3. Sei R ein U-Ring. Seien V und W Normalteiler von U mit $W \subseteq V$ und $U \cdot V \subseteq W$. Besitzt R/V_U einen nilpotenten assoziierten

Lie-Ring und ist V_U/W_U nilpotent, so besitzt auch R/W_U einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

BEWEIS. Nach den Voraussetzungen lassen sich natürliche Zahlen n und m so wählen, daß ${}_nR\subseteq V_U$ und $(V_U)^m\subseteq W_U$. Wir erklären eine Folge M_i, $i\geq n$ von Teilmengen von R durch folgende Festsetzung: $M\in M_i$ genau dann, wenn es Indizes i_j, $1\leq j\leq k$ gibt, so daß $i_j<n$ für $1\leq j\leq k$, $\sum_{j=1}^{k}(n+i_j)=i$ und $M=\prod_{j=1}^{k}{}_{i_j}R(V-1)$. Sei weiter

$$A_i=\sum_{M\in M_i}M+W_U$$

für $i\geq n$. Wir zeigen zunächst

$$R\circ A_i\subseteq A_{i+1} \text{ für } i\geq n. \tag{a}$$

Wegen der Linearität der Kommutatoren und $R\circ W_U\subseteq W_U$ reicht es zu zeigen, daß

$$R\circ M\subseteq M_{i+1} \text{ für alle } M\in M_i \text{ und } i\geq n. \tag{b}$$

Ersetzt man in der Produktdarstellung von M aus M_i entweder genau einen Faktor ${}_jR$ durch ${}_{j+1}R$ falls $j<n-1$ oder genau einen Faktor ${}_{n-1}R$ durch $R(V-1)R$, so erhält man jeweils ein Element von M_{i+1}. Auf Grund der Produktdarstellung von M ist deshalb für die Gültigkeit von (b) hinreichend, daß

$$R\circ{}_jR\subseteq{}_{j+1}R \text{ für } j\geq 0,$$

$$R\circ{}_{n-1}R\subseteq V_U=R(V-1)R \text{ und} \tag{c}$$

$$R\circ(V-1)\subseteq W_U. \tag{d}$$

Nach Voraussetzung gilt (c). Da

$$u\circ(v-1)=vu(u\cdot v-1)\in W_U$$

für alle $u\in U$ und $v\in V$ ist, folgt (d) auf Grund der Linearität der

Kommutatoren. Insgesamt ist (a) bewiesen. Weiter gilt

$$(e) \qquad A_n = R(V-1) + W_U = V_U ,$$

da $W_U \subseteq V_U$ und $R(V-1) = V_U$. Wir zeigen nun

$$(f) \qquad A_{2nm} \subseteq W_U .$$

Es reicht zu beweisen, daß

$$M \subseteq W_U \text{ für alle } M \in M_{2nm} .$$

Sei $M = \prod_{j=1}^{k} {}_{i_j}R(V-1)$ Element von M_{2nm}. Dann gilt $\sum_{j=1}^{k}(n+i_j) = 2nm$ und wegen $i_j < n$ für $1 \leq j \leq k$ auch $\sum_{j=1}^{k}(n+i_j) < 2nk$. Es folgt $k > m$. Somit ist $M \subseteq (V_U)^k \subseteq (V_U)^m \subseteq W_U$. Also gilt (f).

Aus (a), (e), (f) und der Voraussetzung, daß U_U/V_U einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt, folgt unmittelbar, daß auch U_U/W_U einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt.

Aus Lemma 3 folgt mit einem einfachen Induktionsschluß.

Lemma 4. Sei R ein U-Ring. Ist V ein Normalteiler endlicher Klasse in U, besitzt R/V_U einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring und ist V_U nilpotent, so besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

Hierbei heißt ein Normalteiler V von U Normalteiler endlicher Klasse in U genau dann, wenn es Normalteiler V_i, $0 \leq i \leq n$ von U gibt, so daß $V_0 = V$, $V_{i+1} \subseteq V_i$, $V_n = 1$ und $U \cdot V_i \subseteq V_{i+1}$ gilt.

Satz 5. Ein U-Ring R ist ein Ring endlicher Klasse genau dann, wenn U stark nilpotent und R' nilpotent ist.

Beweis. Sei R ein Ring endlicher Klasse. Nach [2; Theorem 5.6, p. 350] ist R' nilpotent. Da R auch einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt, ist nach Satz 1 die Gruppe U stark nilpotent. Sei nun R' nilpotent und U stark nilpotent. Anwendung von Lemma 4 auf $V := U'$ erbringt nun wegen $(U')_U = R'$, daß R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt. Nach [2; Theorem 6.5, p. 353] ist R ein Ring endlicher Klasse.

Lemma 5. Sei A ein Ideal von R. Ist A nilpotent, so besitzt mit R/A^2 auch R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

Beweis. Sei $N_0 := A$ und $N_{i+1} := R \circ N_i$ für $i \geq 0$. Nach Voraussetzung lassen sich natürliche Zahlen n und m so wählen, daß ${}_nR \subseteq A^2$ und $A^m = 0$. Wir erklären eine Folge M_i, $i \geq n$ von Teilmengen von R durch folgende Festsetzung:

$M \in M_i$ genau dann, wenn es Indizes i_j, $1 \leq j \leq k$ gibt, so daß $i_j < n$, $\sum_{j=1}^{k} (n+i_j) = i$ und $M = \prod_{j=1}^{k} N_{i_j}$.

Sei weiter

$$B_i := \sum_{M \in M_i} M$$

für $i \geq n$. Wir zeigen zunächst

$$(a) \qquad R \circ B_i \subseteq B_{i+1} \text{ für } i \geq n.$$

Wegen der Linearität der Kommutatoren reicht es zu zeigen, daß

$$(b) \qquad R \circ M \subseteq B_{i+1} \text{ für alle } M \in M_i \text{ und } i \geq n.$$

Ersetzt man in der Produktdarstellung von $M \in M_i$ entweder genau einen Faktor N_j durch N_{j+1} falls $j < n-1$ oder genau einen Faktor N_{n-1} durch $(N_0)^2$, so erhält man jeweils ein Element von M_{i+1}. Auf Grund der Produktdarstellung vom M ist deshalb für die Gültigkeit von (b) hinreichend, daß

$$R \circ N_j = N_{j+1}$$

und

$$R \circ N_{n-1} \subseteq {}_nR \subseteq A^2 = (N_0)^2.$$

Somit gilt (a). Weiterhin ist

$$(c) \qquad B_n = A.$$

Wir zeigen schließlich, daß

$$(d) \qquad B_{2nm} = 0.$$

Hierzu reicht es zu beweisen, daß

$$M=0 \text{ für alle } M\in M_{2nm}\,.$$

Sei $M=\prod_{j=1}^{k} N_{i_j}$ Element von M_{2nm}. Dann gilt $\sum_{j=1}^{k}(n+i_j)=2nm$ und wegen $i_j<n$ auch $\sum_{j=1}^{k}(n+i_j)<2nk$. Es folgt $k>m$. Also ist $M\subseteq A^k\subseteq A^m=0$. Somit gilt (d). Aus (a), (c) und (d) folgt, daß mit R/A^2 auch R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt.

LEMMA 6. Sei R ein U-Ring, R'' nilpotent, U eine stark nilpotente Gruppe und besitze $R/(R'')^2+(U'')_U$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Dann besitzt auch R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

BEWEIS. Nach Lemma 5 besitzt mit $R/(R'')^2+(U'')_U$ auch $R/(U'')_U$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring, da R'' nilpotent ist. Wegen Lemma 2.(3) gilt $(U'')_U\subseteq R''$. Also ist auch $(U'')_U$ nilpotent. Anwendung von Lemma 4 auf $V:=U''$ erbringt die Behauptung.

Im Hinblick auf den Beweis des folgenden Lemmas 8, ziehen wir aus Lemma 1.(2) und Lemma 2.(1) und (4) die Folgerung

LEMMA 7. Sei R ein U-Ring. Für r, s, t, $u\in U$ sind

$$(t\circ r)(s\circ r),\ (t\circ r)u(s\circ r),\ (t\circ r)(s\circ r^{-1}) \text{ und } (t\circ(rs)^{-1})(s\circ r)$$

Elemente von R''.

LEMMA 8. Ist R ein U-Ring, so besitzt $R/(R'')^2+(U'')_U$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.

BEWEIS. Alle im folgenden betrachteten Kongruenzen verstehen sich modulo $(R'')^2+(U'')_U$. Da jedes Element von R Summe von Elementen von U ist, reicht es auf Grund der Linearität der Kommutatoren für a, b, c, d, e, $f\in U$ zu zeigen, daß

$$(a)\qquad f\circ(e\circ(d\circ(c\circ(b\circ a))))\equiv 0.$$

Aus

$$c^{-1}(b\cdot a)^{-1}(c\circ(b\cdot a))=c\cdot(b\cdot a)-1\equiv 0$$

folgt mit $u:=ab$, daß

$$(b) \qquad c\circ(b\circ a)+u(c\circ u^{-1})(b\circ a)=u(c\circ(b\cdot a))\equiv 0.$$

Mit (b) folgt weiter

$$\begin{aligned}(c) \qquad & -(e\circ(d\circ(c\circ(b\circ a))))\equiv e\circ(d\circ u(c\circ u^{-1})(b\circ a))=\\ & =u(d\circ(c\circ u^{-1}))(e\circ(b\circ a))+u(e\circ(c\circ u^{-1}))(d\circ(b\circ a))+\\ & +(d\circ u)(c\circ u^{-1})(e\circ(b\circ a))+(e\circ u)(c\circ u^{-1})(d\circ(b\circ a))+\\ & +(e\circ(d\circ u))(c\circ u^{-1})(b\circ a)+u(e\circ(d\circ(c\circ u^{-1})))(b\circ a)+\\ & +u(c\circ u^{-1})(e\circ(d\circ(b\circ a)))+(d\circ u)(e\circ(c\circ u^{-1}))(b\circ a)+\\ & +(e\circ u)(d\circ(c\circ u^{-1}))(b\circ a).\end{aligned}$$

Hierbei können die ersten fünf Summanden der bei (c) vorkommenden Summe ohne Zerstörung der Kongruenz gestrichen werden, da sie nach Lemma 7 Elemente von $(R'')^2$ sind. Wir zeigen weiter, daß auch der 6. Summand dieser Summe kongruent 0 ist. Anwendung von (b) auf $d\circ(c\circ u^{-1})$ liefert mit $v:=u^{-1}c$, daß

$$\begin{aligned}(d) \qquad & -(e\circ(d\circ(c\circ u^{-1})))(b\circ a)\equiv(e\circ v(d\circ v^{-1})(c\circ u^{-1}))(b\circ a)=\\ & =(e\circ v)(d\circ v^{-1})(c\circ u^{-1})(b\circ a)+v(e\circ(d\circ v^{-1}))(c\circ u^{-1})(b\circ a)+\\ & +v(d\circ v^{-1})(e\circ(c\circ u^{-1}))(b\circ a).\end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden der unter (d) auftretenden Summe können ohne Zerstörung der Kongruenz getilgt werden, da sie nach Lemma 7 Elemente von $(R'')^2$ sind. Da nach (b) und Lemma 7

$$-(d\circ v^{-1})(e\circ(c\circ u^{-1}))(b\circ a)\equiv(d\circ v^{-1})v(e\circ v^{-1})(c\circ u^{-1})(b\circ a)\equiv 0$$

gilt, ist auch der dritte Summand der zuletzt betrachteten Summe kongruent 0. Somit kann in der bei (c) vorkommenden Summe auch der sechste Summand ohne Zerstörung der Kongruenz gestrichen werden, so daß

$$\begin{aligned}(e) \qquad & -(e\circ(d\circ(c\circ(b\circ a))))\equiv u(c\circ u^{-1})(e\circ(d\circ(b\circ a)))+\\ & +(d\circ u)(e\circ(c\circ u^{-1}))(b\circ a)+(e\circ u)(d\circ(c\circ u^{-1}))(b\circ a).\end{aligned}$$

Zum Beweis von (a) ist wegen (e) und der Tatsache, daß der dritte Summand der unter (e) auftretenden Summe aus dem zweiten Summanden durch Vertauschung von d und e erhalten wird, noch zu zeigen:

$$(f) \qquad f \circ u(c \circ u^{-1})(e \circ (d \circ (b \circ a))) = (f \circ u)(c \circ u^{-1})(e \circ (d \circ (b \circ a))) + \\ + u(f \circ (c \circ u^{-1}))(e \circ (d \circ (b \circ a))) + u(c \circ u^{-1})(f \circ (e \circ (d \circ (b \circ a)))) \equiv 0$$

und

$$(g) \qquad f \circ (d \circ u)(e \circ (c \circ u^{-1}))(b \circ a) = (f \circ (d \circ u))(e \circ (c \circ u^{-1}))(b \circ a) + \\ + (d \circ u)(e \circ (c \circ u^{-1}))(f \circ (b \circ a)) + (d \circ u)(f \circ (e \circ (c \circ u^{-1})))(b \circ a) \equiv 0.$$

Mit Lemma 7 folgt, daß jeweils die ersten beiden Summanden der bei (f) und (g) vorkommenden Summe Elemente von $(R'')^2$ sind. Nach den Betrachtungen zu (d) gilt

$$(e \circ (d \circ (c \circ u^{-1})))(b \circ a) \equiv 0.$$

Also ist auch

$$(f \circ (e \circ (c \circ u^{-1})))(b \circ a) \equiv 0$$

und damit der dritte Summand der bei (g) auftretenden Summe kongruent 0. Somit gilt (g) und zu (f) bleibt lediglich zu zeigen, daß

$$(h) \qquad (c \circ u^{-1})(f \circ (e \circ (d \circ (b \circ a)))) \equiv 0.$$

Ersetzt man in (e) der Reihe nach c, d und e durch d, e und f, multipliziert man die aus (e) entstandene Kongruenz sodann linksseitig mit $c \circ u^{-1}$ und rechnet man die rechte Seite nach den Distributivgesetzen aus, so folgt mit Lemma 7, daß alle drei Summanden der rechtsstehenden Summe kongruent 0 sind. Somit gilt auch (h) und (a) ist vollständig bewiesen.

Satz 6. Ein U-Ring R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn R'' nilpotent und U stark nilpotent ist.

Beweis. Besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring, so ist R'' nach [3; Theorem 1, p. 595] nilpotent und U nach Satz 1 stark nilpotent. Die Umkehrung folgt unmittelbar mit den Lemmata 6 und 8.

Ein Normalteiler V einer Gruppe U heiße nilpotenter Normalteiler in U genau dann, wenn es zu jedem Normalteiler W von U mit $W<V$ einen Normalteiler X von U gibt, so daß $W\subset X\subseteq V$ und $U\cdot X\subseteq W$ gilt.

Lemma 9. Sei R ein U-Ring.

(1) Ist V nilpotenter Normalteiler in U und $V-1$ nil, so gibt es zu jedem Ideal A von R mit $A\subset V_U$ einen Normalteiler W von U, so daß $W\subseteq V$, $W_U\nsubseteq A$ und W_U+A/A nilpotent its. Hiermit folgt unmittelbar weiter $A\subset W_U+A\subseteq V_U$.

(2) Erfüllt U zusätzlich zu den unter (1) zusammengestellten Bedingungen die Maximalbedingung für Normalteiler, so ist V_U nilpotent.

Beweis. Zu (1): Sei A Ideal von R mit $A\subset V_U$. Es ist $V\nsubseteq A^U$, da aus $V\subseteq A^U$ im Widerspruch zur Voraussetzung $V_U\subseteq(A^U)_U\subseteq A$ folgen würde. Somit gilt

$$X:=A^U\cap V\subset V. \tag{a}$$

Da V nilpotenter Normalteiler in U ist, läßt sich ein Normalteiler Y von U wählen, so daß

$$X\subset Y\subseteq \mathrm{V} \text{ und } U\cdot Y\subseteq X. \tag{b}$$

Für alle $y\in Y$ und $u\in U$ gilt dann nach (a) und (b)

$$u\circ(y-1)=yu(u\cdot y-1)\in X_U\subseteq(A^U)_U\subseteq A.$$

Es folgt auf Grund der Linearität der Kommutatoren

$$R\circ(y-1)\subseteq A \text{ für alle } y\in Y. \tag{c}$$

Sei nun $w\in Y$, jedoch $w\notin X$. Da $V-1$ nil und $w\in Y\subseteq V$ ist, gibt es eine natürliche Zahl n, so daß

$$(w-1)^n=0. \tag{d}$$

Da $w\notin X$, jedoch $w\in Y\subseteq V$, ist nach (a) $w\notin A^U$ und damit

$$w-1\notin A. \tag{e}$$

Sei B das von $w-1$ erzeugte Ideal von R. Es gilt

$$B^n \subseteq A \text{ wegen } (c) \text{ und } (d),$$

$$B \nsubseteq A \text{ wegen } (e) \text{ und}$$

$$w \in Y \subseteq V.$$

Für den von w erzeugten Normalteiler W von U ist die Behauptung im vollen Umfange beweisen, da $W_U = B$ gilt.

Zu (2): Die Menge

$$M := (N \mid N \text{ Normalteiler von } U,\ N \subseteq V,\ N_U \text{ ist nilpotent})$$

ist nicht leer und es gilt $N_U \subseteq V_U$ für alle $N \in M$. Sei X maximales Element von M. Wir führen die Annahme $X_U \subset V_U$ zum Widerspruch und zeigen somit, daß V_U nilpotent ist. Zu X_U gibt es nach (1) einen Normalteiler Y, so daß $Y \subseteq V$, $Y_U \nsubseteq X_U$ und $Y_U + X_U/X_U$ nilpotent ist. Wir zeigen abschließend, daß der von $Y \cup X$ erzeugte Normalteiler Z, für den $X \subset Z$ wegen $Z_U = Y_U + X_U \supset X_U$ und $X \subseteq Z$ gilt, im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von X Element von M ist. Z ist jedoch Element von M, da wegen $Y \cup X \subseteq V$ gilt, daß $Z \subseteq V$, und mit X_U und $Y_U + X_U/X_U$ auch $Y_U + X_U = Z_U$ nilpotent ist.

Satz 7. Ist R ein U-Ring, U nilpotent und $\langle U' - 1 \rangle$ nil, so ist R hyperkommutativ [4; S. 400-401].

Beweis. Anwendung von Lemma 9.(1) auf $V := U'$ erbringt, daß $(U')_U = R'$ hypernilpotent in R ist [4; S. 400-401]. Nach [4; Satz 6, S. 407] ist R hyperkommutativ.

Lemma 10. Sei R ein U-Ring und V ein Normalteiler von U. Es gilt: Aus $(V-1)^n = 0$ folgt $(V_U)^n = 0$.

Beweis. Da R ein U-Ring ist, reicht es zu zeigen, daß

$$\prod_{i=1}^{n} b_i(a_i - 1) = 0$$

für alle $a_i \in V$ und $b_i \in U$ für $1 \leq i \leq n$. Sei

$$c_i := \left(\prod_{j=1}^{i} b_j\right)(a_i - 1)\left(\prod_{j=1}^{i} b_j\right)^{-1}$$

und

$$d_i := \left(\prod_{j=1}^{i} b_j\right) a_i \left(\prod_{j=1}^{i} b_j\right)^{-1}$$

für $1 \leq i \leq n$. Es gilt

$$\prod_{i=1}^{n} b_i(a_i - 1) = \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} (d_i - 1)\right)\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right) = 0,$$

da $d_i \in V$ für alle $1 \leq i \leq n$.

SATZ 8. Sei R ein U-Ring, wobei eine Gruppe V mit $U'' \subseteq V \subseteq U$ die Maximalbedingung für Normalteiler erfülle:

R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn $R/(U'')_U$ einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt, $\langle U'' - 1 \rangle$ nil und U stark nilpotent ist.

BEWEIS. Ist R ein Ring mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring, so lassen sich alle nötigen Folgerungen wegen $\langle U'' - 1 \rangle \subseteq R''$ mit Satz 6 ziehen. Wir beweisen nun die Umkehrung. Anwendung von Lemma 9.(2) auf den V-Ring $|V|$ und den Normalteiler U'' von V erbringt, daß $(U'')_V$ nilpotent ist. Nach Lemma 10 ist dann auch $(U'')_U$ nilpotent. Durch Anwendung von Lemma 4 auf $V := U''$ folgt die Behauptung.

SATZ 9. Sei R ein U-Ring, wobei eine Gruppe V mit $U' \subseteq V \subseteq U$ die Maximalbedingung für Normalteiler erfülle.

R ist ein Ring endlicher Klasse genau dann, wenn $\langle U' - 1 \rangle$ nil und U stark nilpotent ist.

BEWEIS. Ist R ein Ring endlicher Klasse so zieht man die nötigen Folgerungen wegen $\langle U' - 1 \rangle \subseteq R'$ unmittelbar mit Satz 5. Um die Umkehrung zu beweisen wendet man Lemma 9.(2) auf den V-Ring $|V|$ und den Normalteiler U' von V an. Es folgt, daß $(U')_V$ nilpotent ist. Nach Lemma 10 ist auch $(U')_U = R'$ nilpotent. Mit Satz 5 folgt nun die Behauptung.

SATZ 10. Sei R ein U-Ring, wobei U' die Maximalbedingung für Normalteiler erfülle.

R ist ein auflösbarer Ring genau dann, wenn $\langle U' - 1 \rangle$ nil und U' stark nilpotent ist.

Beweis. Ist R ein auflösbarer Ring, so zieht man die nötigen Folgerungen wegen $\langle U'-1\rangle \subseteq R'$ unmittelbar mit [2; Theorem 5, 6, p. 350] und Satz 4. Zum Beweis der Umkehrung wendet man Lemma 9.(2) auf den U'-Ring $|U'|$ und den Normalteiler U' von U' an. Es folgt, daß $(U')_{(U')}$ nilpotent ist. Nach Lemma 10 ist auch $(U')_U = R'$ nilpotent. Nach [2; Theorem 5, 6, p. 350] ist R ein auflösbarer Ring.

Ein Normalteiler V einer Gruppe U heiße hyperendlicher Normalteiler in U genau dann, wenn es zu jedem Normalteiler W von U mit $W \subset V$ einen Normalteiler X von U gibt, so daß $W \subset X \subseteq V$ und X/W endlich ist.

Lemma 11. Sei R ein U-Ring. Ist V hyperendlicher Normalteiler in U und $\langle V-1\rangle$ lokalnilpotent, so ist V_U hypernilpotent in R.

Beweis. Sei A Ideal von R mit $A \subset V_U$. Es ist $V \nsubseteq A^U$, da aus $V \subseteq A^U$ im Widerspruch zur Voraussetzung $V_U \subseteq (A^U)_U \subseteq A$ folgen würde. Also gilt

$$(a) \qquad X := V \cap A^U \subset V.$$

Da V hyperendlicher Normalteiler in U ist, läßt sich ein Normalteiler Y von U so wählen, daß $X \subset Y \subseteq V$ und Y/X endlich ist. Somit gilt

$$Y \subseteq (qx \mid q \in Q,\ x \in X)$$

mit einer endlichen Teilmenge Q von V. Da nach (a) $X \subseteq A^U$, folgt hieraus

$$Y \subseteq (qa \mid q \in Q,\ a \in A^U),$$

und weiter

$$(b) \qquad Y-1 \subseteq (Q-1)+A.$$

Da Q Teilmenge von V ist, ist $Q-1$ Teilmenge von $\langle V-1\rangle$. Mit Q ist auch $Q-1$ endlich. Da $\langle V-1\rangle$ lokalnilpotent ist, gibt es demnach eine natürliche Zahl n, so daß $\langle Q-1\rangle^n = 0$. Somit folgt aus (b) weiter

$$(c) \qquad (Y-1)^n \subseteq (\langle Q-1\rangle + A)^n \subseteq A.$$

Nach Lemma 10 folgt aus (c)

$$(d) \qquad (Y_U)^n \subseteq A.$$

Wegen $X \subset Y \subseteq V$ ist nach (a) $Y \nsubseteq A^U$. Es folgt

$$(e) \qquad Y_U \nsubseteq A.$$

Aus $Y \subseteq V$ folgt

$$(f) \qquad Y_U \subseteq V_U .$$

Wegen (d)-(f) gilt für $B := Y_U + A$:

$$A \subset B \subseteq V_U \text{ und } B/A \text{ ist nilpotent.}$$

Somit ist V_U hypernilpotentes Ideal in R.

SATZ 11. Sei R ein U-Ring. Ist U' hyperendlicher Normalteiler von U und $\langle U' - 1 \rangle$ lokalnilpotent, so ist R hyperkommutativ.

BEWEIS. Nach Lemma 11 ist $(U')_U = R'$ hypernilpotent in R. Nach [4; Satz 6, S. 407] ist R hyperkommutativ.

LITERATUR

[1] SPECHT, W.: *Gruppentheorie*, Springer-Verlag, 1956.

[2] JENNINGS, S. A.: *Central chains of ideals in an associative ring.* Duke Mathematical Journal, vol. 9 (1942), S. 341-355.

[3] JENNINGS, S. A.: *On rings whose associated Lie rings are nilpotent,* Bulletin of the American Mathematical Society, vol 53 (1947), S. 593-597.

[4] STREB, W.: *Über schwach hyperzentrale Ringe,* Rendiconti del Seminatio Matematico della Università di Padova, vol. XLIV (1970), S. 399-409.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 gennaio 1972.