

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

W. STREB

Über die Endlichkeit niler Ringe

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 48 (1972), p. 349-357

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1972__48__349_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÜBER DIE ENDLICHKEIT NILER RINGE

W. STREB *)

Bekanntlich [1; Corollary, p. 20 und Theorem 1.4.5, p. 37] ist jeder nile Ring, der die Minimal- oder Maximalbedingung für Rechtsideale erfüllt, nilpotent. Da ein endlicher Ring notwendig beide Extremalbedingungen erfüllt, erhebt sich die Frage, inwieweit die Forderung von Extremalbedingungen für einen nilen Ring R schon hinreichend dafür ist, daß R nilpotent und endlich ist. Hierzu zeigen wir:

HAUPTSATZ. Ein niler Ring R ist nilpotent und endlich genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen (1)-(8) gilt:

- (1) R erfüllt die schwache Minimalbedingung für Ideale und die Maximalbedingung für Linksideale.
- (2) R erfüllt die schwache Minimalbedingung für Linksideale und die Maximalbedingung für Ideale.
- (3) R erfüllt die schwache Maximalbedingung für Ideale und die Minimalbedingung für Linksideale.
- (4) R erfüllt die schwache Maximalbedingung für Linksideale und die Minimalbedingung für Ideale.
- (5) R erfüllt die Minimalbedingung für Linksideale und ist endlich erzeugt.
- (6) R erfüllt die Maximalbedingung für Linksideale und ist finit.

*) Indirizzo dell'A.: Pädagogische Hochschule, Henri-Dunant-Str. 65, D-43 Essen, Rep. Fed. Tedesca.

- (7) R erfüllt die Minimalbedingung für Linksideale und R/R^2 ist endlich.
- (8) R erfüllt die Maximalbedingung für Linksideale und besitzt einen endlichen Annihilator.

Hierbei heiÙe ein Ringelement r finit, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß $nr=0$. Ein Ring R heiÙe finit, wenn jedes Element von R finit ist. Unter dem Annihilator eines Ringes R verstehen wir das Ideal

$$A := (a \mid a \in R \text{ und } ra=0 \text{ für alle } r \in R).$$

Herrn Prof. Dr. H. Heineken, Erlangen, danke ich für den Hinweis auf (7) und (8).

Bezüglich der hier nicht eigens verabredeten Bezeichnungen verweise ich auf [2; S. 399-401]. Für eine Teilmenge M eines Ringes R bezeichnen wir mit $\{M \mid$ das von M erzeugte Linksideal.

LEMMA 1. Erfüllt ein Ring R die schwache Minimalbedingung für Linksideale und ist $\{_i(iR)\}$ nil, so ist $\{_i(iR)\}$ hyper- $\{_i(iR)\}$ -annullierendes Ideal in R .

BEWEIS. Sei S $\{_i(iR)\}$ -epimorphes Bild von R und A minimales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } S, 0 \subset J \subseteq \{_i(iS)\}).$$

Wir führen die Annahme, daß es Elemente $r \in \{_i(iS)\}$ und $a \in A$ gibt mit $ra \neq 0$, zum Widerspruch und zeigen hiermit $\{_i(iS)\}A = 0$.

Wegen der Minimaleigenschaft von A folgt aus dieser Annahme $\{ra \mid = A$. Also gilt $a = sra + nra = (sr + nr)a$ mit $s \in S$ und einer ganzen Zahl n und damit $a = (sr + nr)^m a$ für alle natürlichen Zahlen m . Da $sr + nr \in \{_i(iS)\}$ und mit $\{_i(iR)\}$ auch $\{_i(iS)\}$ nil ist, folgt weiter $a = 0$ im Widerspruch zur Annahme $ra \neq 0$. Somit ist alles bewiesen.

Speziell folgt aus Lemma 1, daß jeder nile Ring R , der die schwache Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, hyper- R -annullierend und damit hypernilpotent ist. Das folgende Beispiel zeigt jedoch, daß ein niler Ring nicht notwendig hypernilpotent ist. Auf eine Zusatzbedingung kann demnach nicht verzichtet werden. Wir zeigen im einzelnen:

Es gibt eine Algebra A der Charakteristik 0 und zu jeder Primzahl

p eine Algebra A der Charakteristik p , die lokal nilpotent ist, jedoch kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal J besitzt.

BEWEIS. Mit den abzählbar vielen Unbestimmten x_1, x_2, x_3, \dots , deren Menge mit U bezeichnet sei, bildet man formale Potenzprodukte $q = \prod_{j=1}^n x_{i_j}$ mit $x_{i_j} \in U$ für $1 \leq j \leq n$ beliebiger Dimension $\dim(q) = n$, deren Menge wir mit Q bezeichnen, und über dem Ring K der ganzen Zahlen oder einem Primkörper K die Algebra B der formalen endlichen Summen $\sum_{i=1}^m k_i q_i$ mit $k_i \in K$ und $q_i \in Q$ für $1 \leq i \leq m$. Diejenigen Potenzprodukte $q = \prod_{j=1}^n x_{i_j}$, welche die Bedingung erfüllen, daß das Maximum der Zahlen i_1, i_2, \dots, i_n kleiner als die oder gleich der Dimension n von q ist, bilden eine Teilmenge \bar{Q} von Q . Die Menge aller Potenzprodukte q , die entweder Elemente von \bar{Q} sind oder wenigstens eine Produktzerlegung $q = \prod_{j=1}^n q_j$ mit $q_j \in Q$ besitzen, in der mindestens ein Faktor Element von \bar{Q} ist, bezeichnen wir mit P . Der von P erzeugte Modul $|P|$ ist ein Ideal von B .

Wir zeigen, daß $A := B / |P|$ lokalnilpotent ist, jedoch kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal J besitzt.

(a) A ist lokalnilpotent.

Da es zu jeder endlichen Teilmenge C von B eine endliche Teilmenge D von Q gibt mit $\langle C \rangle \subseteq \langle D \rangle$, reicht es zu zeigen:

Zu jeder endlichen Teilmenge $D = (d_i \mid 1 \leq i \leq m)$ von Q gibt es eine natürliche Zahl n , so daß

$$\langle D \rangle^n \subseteq \langle D^n \rangle \subseteq |P|.$$

Wir bezeichnen mit n_i den größten Index, der bei den Unbestimmten vorkommt, welche d_i aufbauen, für $1 \leq i \leq m$. n sei das Maximum von n_1, n_2, \dots, n_m . $D^n \subseteq |P|$ sieht man nun folgendermaßen ein:

Es ist $\dim \left(\prod_{j=1}^n d_{i_j} \right) \geq n$ für $d_{i_j} \in D$, jedoch der größte Index, welcher bei den $\prod_{j=1}^n d_{i_j}$ aufbauenden Unbestimmten vorkommt, kleiner oder

gleich n . Also gilt $\prod_{j=1}^n d_{ij} \in \overline{Q} \subseteq P$. Es folgt $\langle D \rangle^n \subseteq \langle D^n \rangle \subseteq |P|$.

(b) A besitzt kein von Null verschiedenes nilpotentes Ideal J .

Es reicht zu zeigen, daß A kein von Null verschiedenes Element a hat, für das $\{a\}^2 = 0$. Es ist also nachzuweisen, daß es zu jedem von Null verschiedenen Element a von A ein Element b von A gibt, so daß $aba \neq 0$.

Sei $c = \sum_{i=1}^m k_i q_i$ mit von Null verschiedenen $k_i \in K$ und paarweise verschiedenen $q_i \in Q$ für $1 \leq i \leq m$ nicht Element von $|P|$. Dann gibt es einen Index z mit $1 \leq z \leq m$, so daß $q_z \notin P$. Sei weiter $n = \dim(q_z)$. Wir zeigen

$$c x_{2n+2} c = \sum_{i,j=1}^m k_i k_j q_i x_{2n+2} q_j \notin |P|.$$

Da die Summanden $q_i x_{2n+2} q_j$ für $1 \leq i, j \leq m$ paarweise voneinander verschieden sind, reicht es zu zeigen, daß ein Summand, etwa $q_z x_{2n+2} q_z$, nicht Element von P ist:

Für einen Faktor d von $q_z x_{2n+2} q_z$, der x_{2n+2} zum Faktor hat, ist das Maximum $2n+2$ der bei den Unbestimmten von d vorkommenden Indizes größer als die Dimension von d , ein Faktor d von $q_z x_{2n+2} q_z$ jedoch, der x_{2n+2} nicht zum Faktor hat, ist notwendig Faktor von $q_z \notin P$. Da deshalb ein Faktor von $q_z x_{2n+2} q_z$ niemals Element von \overline{Q} sein kann, gilt $q_z x_{2n+2} q_z \notin P$.

Da demnach Bedingungen an die Charakteristik eines Ringes R alleine nicht ausreichen, damit ein lokalnilpotenter Ring schon hypernilpotent ist, kann in [4; Lemma 11] nicht auf andere Zusatzbedingungen verzichtet werden. Lemma 11 lautet:

Sei R ein U -Ring. Ist V hyperendlicher Normalteiler in U und $\langle V-1 \rangle$ lokalnilpotent, so ist V_U hypernilpotent in R .

SATZ 1. Jeder schwach hyperzentrale Ring R [2; S. 399], der die schwache Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, ist hyperzentral.

BEWEIS. Nach [2; Satz 10, S. 409] ist das Kommutatorideal R' von R nil. Mit Lemma 1 folgt, daß R' hyper- R' -annullierendes Ideal

von R ist. Weiter schließt man mit [2; Satz 1, S. 402] auf die Behauptung.

Ich bemerke, daß nicht jeder schwach hyperzentrale Ring R notwendig hyperzentral ist, da nach [3; S. 137] nicht einmal jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring die nach [2; Satz 1, S. 402] hierfür notwendige Bedingung erfüllt, daß R' hyper- R' -annullierendes Ideal in R ist.

Wir vermerken weiterhin: Jeder schwach hyperzentrale Ring R , der die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, besitzt endliche Klasse.

BEWEIS. Nach [2; Satz 8, S. 408] ist R' hypernilpotent in R . Also ist R' auf Grund der Maximalbedingung für Ideale nilpotent. Wegen [2; Satz 3, S. 403] ist R hyperzentral. Da R die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, ist R ein Ring endlicher Klasse.

Ein Ideal A eines Ringes R heißt absteigend hyper- A -annullierendes Ideal in R , wenn $AB \subseteq B$ für jedes Ideal B von R mit $0 \subset B \subseteq A$ gilt. R heiße absteigend hyper- R -annullierend, wenn R absteigend hyper- R -annullierendes Ideal von R ist.

LEMMA 2. Jedes nile Ideal A eines Ringes R , der die schwache Maximalbedingung für Linksideale erfüllt, ist absteigend hyper- A -annullierendes Ideal von R .

BEWEIS. Sei B ein Ideal von R mit $0 \subset B \subseteq A$ und C maximales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R, J \subset B).$$

Wir führen die Annahme, daß es Elemente $r \in A$ und $b \in B$ gibt, für die $rb \notin C$ gilt, zum Widerspruch und zeigen somit, daß $AB \subseteq C \subset B$.

Wegen der Maximaleigenschaft von C folgt aus dieser Annahme $\{rb\} + C = B$. Also gilt $b = srb + nrb + c = (sr + nr)b + c$ mit einer ganzen Zahl n , $s \in R$ und $c \in C$ und damit

$$b = (sr + nr)^m b + c + \sum_{i=1}^{m-1} (sr + nr)^i c$$

für alle natürlichen Zahlen m . Da A nil ist, folgt wegen $sr + nr \in A$ weiter $b \in C$ im Widerspruch zur Annahme $rb \notin C$. Somit ist alles bewiesen.

LEMMA 3.

(a) Seien A und B Ideale von R mit $B \subset A$ und $RA + AR \subseteq B$. Weiter gelte für jedes Ideal C von R mit $B \subseteq C \subseteq A$ entweder $C = B$ oder $C = A$.

(b) Sei A Linksideal und B Ideal von R mit $B \subset A$ und $RA \subseteq B$. Weiter gelte für jedes Linksideal C von R mit $B \subset C \subseteq A$, daß $C = A$.

Sowohl aus (a) als auch aus (b) folgt, daß A/B nilpotent und endlich ist.

BEWEIS. Wegen $RA + AR \subseteq B$ bzw. $RA \subseteq B$ ist $|na| + B$ Ideal bzw. Linksideal für alle ganzen Zahlen n und alle $a \in A$. Falls zusätzlich $na \notin B$, ist wegen $B \subset |na| + B \subseteq A$ weiter $|na| + B = A$.

Wir wählen $a \in A$ mit $a \notin B$ beliebig aber fest: Gilt dann $2a \in B$, so ist $|a| + B/B = A/B$ endlich. Gilt dagegen $2a \notin B$, also $|a| + B = A = = |2a| + B$, also $a = m2a + b$ mit einer ganzen Zahl m und $b \in B$, also $(2m-1)a \in B$, so ist wiederum $|a| + B/B = A/B$ endlich.

Daß A/B nilpotent ist, ist trivial.

Jeder endliche nilpotente Ring R erfüllt die Bedingungen (1)-(8). Wir zeigen nun, daß jeder nile Ring R , der eine der Bedingungen (1)-(4) erfüllt, endlich und nilpotent ist.

BEWEIS. Bekanntlich ist jeder nile Ring R , der (1) oder (3) erfüllt, nilpotent, Jeder nile Ring R , der (2) oder (4) erfüllt, ist nach Lemma 1 bzw. Lemma 2 hyper- R -annullierend bzw. absteigend hyper- R -annullierend und somit auf Grund der vorausgesetzten Maximalbedingung bzw. Minimalbedingung für Ideale nilpotent. R ist also in allen Fällen nilpotent.

Zu (1) und (2): R besitzt wegen der Maximalbedingung für Linksideale bzw. Ideale in beiden Fällen ein maximales endliches nilpotentes Ideal B . Wir führen die Annahme $B \subset R$ zum Widerspruch und zeigen somit die Behauptung. Da R nilpotent ist, gibt es ein Ideal D von R , so daß $B \subset D$ und $RD + DR \subseteq B$. Sei A minimales Element der Menge

$$(J | J \text{ Ideal von } R, B \subset J \subseteq D)$$

bzw.

$$(J | J \text{ Linksideal von } R, B \subset J \subseteq D).$$

Wegen $RD + DR \subseteq B$ ist A auch im zweiten Fall ein Ideal und ebenfalls minimales Element der ersten Menge. Anwendung von Lemma 3.(a) auf die Ideale A und B erbringt, daß A/B nilpotent und endlich ist. Mit B ist also auch A nilpotent und endlich. Dies widerspricht wegen $B \subset A$ der Maximaleigenschaft von B .

Zu (3) und (4): R besitzt wegen der Minimalbedingung für Linksideale bzw. Ideale in beiden Fällen ein minimales Ideal A , so daß R/A nilpotent und endlich ist. Wir führen die Annahme $0 \subset A$ zum Widerspruch und zeigen somit die Behauptung. Da R nilpotent ist, gibt es ein Ideal D von R , so daß $D \subset A$ und $RA + AR \subseteq D$. Sei B maximales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Ideal von } R, D \subseteq J \subset A)$$

bzw.

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R, D \subseteq J \subset A).$$

Wegen $RA + AR \subseteq D$ ist B auch im zweiten Fall ein Ideal und ebenfalls maximales Element der ersten Menge. Anwendung von Lemma 3.(a) auf die Ideale A und B erbringt, daß A/B nilpotent und endlich ist. Mit R/A ist also auch R/B nilpotent und endlich. Dies widerspricht wegen $B \subset A$ der Minimaleigenschaft von A .

SATZ 2.

(a) Jeder nile Ring R , der die schwache Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, ist hyper- R -annullierend und finit.

(b) Jeder nile Ring R , der die Minimalbedingung für Linksideale erfüllt, ist nilpotent und lokal endlich.

BEWEIS. Zu (a): Sei B das Ideal der finiten Elemente von R . Wir führen die Annahme $B \subset R$ zum Widerspruch und zeigen somit, daß R finit ist. Da R nach Lemma 1 hyper- R -annullierend ist, gibt es ein Ideal D von R , so daß $B \subset D$ und $RD \subseteq B$. Sei A minimales Element der Menge

$$(J \mid J \text{ Linksideal von } R, B \subset J \subseteq D).$$

Da für A und B die Voraussetzungen von Lemma 3.(b) erfüllt sind, ist A/B endlich und damit finit. Also ist auch $\{A\}/B$ finit. Mit B und

$\{A\}/B$ ist auch $\{A\}$ finit. Dies widerspricht wegen $B \subset \{A\}$ der Maximal-eigenschaft von B .

Zu (b): Bekanntlich ist R nilpotent. Nach (a) ist R zusätzlich finit. Nun folgt unmittelbar die Behauptung.

Mit Satz 2.(b) folgt für jeden nilen Ring R aus (5) unmittelbar, daß R nilpotent und endlich ist.

SATZ 3. Erfüllt ein niler Ring R die Maximalbedingung für Links-ideale, so ist er nilpotent und besitzt ein endliches Ideal C , so daß R/C die Charakteristik 0 hat.

BEWEIS. Bekanntlich ist R nilpotent. Sei C das Ideal der finiter Elemente von R . Da R/C die Charakteristik 0 besitzt, bleibt zu beweisen, daß C endlich ist. R besitzt wegen der Maximalbedingung für Links-ideale ein maximales endliches nilpotentes Ideal B mit $B \subseteq C$. Wir führen die Annahme $B \subset C$ zum Widerspruch und zeigen somit die Behauptung. Da R nilpotent ist, gibt es ein Ideal D von R , so daß $B \subset D \subseteq C$ und $RD + DR \subseteq B$. Sei $d \in D$, jedoch $d \notin B$ beliebig aber fest gewählt. Wir setzen $A := |d| + B$. Wegen $RD + DR \subseteq B$ ist A ein Ideal. Da mit C auch D finit ist, ist A/B endlich. Mit B ist also auch A nilpotent und endlich. Dies widerspricht wegen $B \subset A \subseteq C$ der Maximaleigenschaft von B .

Mit Satz 3 folgt unmittelbar, daß jeder nile Ring R der (6) erfüllt, nilpotent und endlich ist.

LEMMA 4. Ist R ein nilpotenter Ring und R/R^2 endlich, so ist R endlich erzeugt.

BEWEIS. Da R/R^2 endlich ist, gibt es eine endliche Teilmenge M von R , so daß $R = \langle M \rangle + R^2$. Hierbei sei

$$A + B := (a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B)$$

für Teilmengen A und B von R . Es folgt

$$\langle M \rangle + R^i = \langle M \rangle + (\langle M \rangle + R^2)^i \subseteq \langle M \rangle + R^{i+1}$$

für alle natürlichen Zahlen i . Da R nilpotent ist, ergibt sich weiter $R = \langle M \rangle$. Also ist R endlich erzeugt.

Erfüllt nun ein niler Ring R die Bedingung (7), so ist er bekanntlich nilpotent, also nach Lemma 4 endlich erzeugt und weiter nach Satz 2.(b) endlich.

Wir zeigen schließlich, daß ein niler Ring R , der (8) erfüllt, nilpotent und endlich ist.

BEWEIS. Sei A der endliche Annihilator von R und B das nach Satz 3 endliche Ideal der finiten Elemente von R . Wir zeigen:

* Aus $R^{i+1} \subseteq B$ folgt $R^i \subseteq B$ für alle natürlichen Zahlen i .

Hierzu sei für natürliche Zahlen j und Teilmengen M von R definiert:

$$jM = \{jr \mid r \in M\}.$$

Gilt $RR^i = R^{i+1} \subseteq B$, so gibt es wegen der Endlichkeit von B eine natürliche Zahl m , so daß

$$R(mR^i) = m(RR^i) = 0.$$

Also ist $mR^i \subseteq A$. Wegen der Endlichkeit von A gibt es eine natürliche Zahl n , so daß

$$(nm)R^i = n(mR^i) = 0.$$

Also ist $R^i \subseteq B$.

Da R nilpotent ist, gibt es eine natürliche Zahl k , so daß $R^k = 0 \subseteq B$. Also ist wegen * auch $R = R^1 \subseteq B$ und damit R endlich.

BIBLIOGRAFIA

- [1] HERSTEIN, I. N.: *Noncommutative rings*, Published by the Mathematical Association von America.
- [2] STREB, W.: *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLIV (1970), S. 399-409.
- [3] STREB, W.: *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLVI (1971), S. 137-139.
- [4] STREB, W.: *Über Ringe, die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XLVII (1972).

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 giugno 1972.