RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

WALTHER UNSIN

Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 49 (1973), p. 241-297

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__49__241_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 49 (1973)

Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung.

WALTHER UNSIN (*)

Einleitung.

In der Theorie der unendlichen Gruppen gibt es zwei wichtige Verallgemeinerungen der Nilpotenzeigenschaft: die Hyperzentralität und das Erfüllen der Normalisatorbedingung, zwei Eigenschaften, die bei endlichen Gruppen zur Nilpotenz äquivalent sind. Mit der Definition dieser Begriffe stellt sich sofort die Frage nach ihrer Beziehung untereinander. Während es sehr leicht einzusehen ist, daß eine hyperzentrale Gruppe auch die Normalisatorbedingung erfüllt, ist die Umkehrung dieses Satzes i.allg. falsch, wie H. Heineken und I. J. Mohamed in [5] durch die Konstruktion einer Gruppe mit Zentrum 1, die die Normalisatorbedingung erfüllt, gezeigt haben.

Da sich nun die Begriffe « Normalisatorbedingung » und « hyperzentral » unmittelbar auf Lie-Algebren übertragen lassen (bei Lie-Algebren sprechen wir von « Idealisatorbedingung »), kann man fragen, wie es um die Übertragbarkeit der eben erwähnten gruppentheoretischen Resultate auf Lie-Algebren bestellt ist. Diese Frage ist in zweifacher Hinsicht interessant. Erstens zeigen sich bei ihrer Untersuchung Möglichkeiten und Grenzen für die Übertragbarkeit gruppentheoretischer Sätze in die Theorie der Lie-Algebren. Zweitens ist es, auch bei isolierter ringtheoretischer Betrachtungsweise, wünschenswert zu wissen, welcherart die Zusammenhänge zwischen der « Idealisatorbedingung » und « Hyperzentralität » sind.

(*) Adresse des Verfassers: 85 Nürnberg, Gibitzenhofstraße 108, Germania Occ.

Man erkennt rasch, daß eine hyperzentrale Lie-Algebra die Idealisatorbedingung erfüllt.

Im Hinblick auf die Umkehrung dieses Satzes nehmen wir, geleitet von [5], folgende Konstruktionen vor:

Es sei $p > 2$ eine Primzahl und $\{n_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen. Wir definieren eine assoziative Algebra F über $\mathbf{Z}_p$:

$$F = \left(a,\, x_i \;\middle|\; \begin{array}{ll} a^2 = axa = 0 & \text{für alle } x \in F \\ x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} = x_i + a\,, & i \in \mathbf{N} \\ x_1^{p^{n_1}} = (x_1 + a)^{p^{n_1}} = 0 & \end{array} \right)$$

Mit der Festsetzung $z_i = x_i + a$ erzeugen die Elemente z_i, $i \in \mathbf{N}$, eine Unteralgebra L der Lie-Algebra von F.

Diese Lie-Algebra L hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:

1) $\mathfrak{Z}(L) = 0$, d.h. L ist nicht hyperzentral.

2) L erfüllt die Idealisatorbedingung.

3) $(L')' = 0$.

Damit ist wie in der Gruppentheorie gezeigt, daß eine Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt, nicht notwendig hyperzentral ist.

Mit dieser Definition tritt sofort die «Isomorphiefrage» auf, d.h. die Frage, unter welchen Umständen die durch zwei Folgen natürlicher Zahlen definierten Lie-Algebren isomorph sind. Die Untersuchung zeigt, daß dies — selbstverständlich bei gleichen Skalarenkörpern — nur dann der Fall ist, wenn die definierenden Folgen gleich sind.

Führt man analoge Untersuchungen bei Gruppen durch, so erweist es sich, daß dort bereits unter etwas allgemeineren Voraussetzungen Isomorphie erzielt werden kann.

Der Unterschied entsteht dadurch, daß bei Lie-Algebren nicht jede Potenz einer inneren Derivation wieder eine innere Derivation ist.

Eine weitere Eigenschaft der in [5] angegebenen Gruppe ist die Nilpotenz jeder eigentlichen Untergruppe. Hier treten nun weitere Unterschiede auf. Analog zur Gruppentheorie — dort wurde der entsprechende Satz von Plotkin bewiesen — zeigen wir die lokale Nilpotenz jeder Lie-Algebra, die der Idealisatorbedingung genügt. Damit muß man sich aber im vorliegenden Fall begnügen. Man kann nicht noch überdies die Nilpotenz jeder eigentlichen Unteralgebra fordern.

Dem steht ein Satz in Weg, wonach eine Lie-Algebra K, die der Idealisatorbedingung genügt, für die $K' \neq K$ ist, und in der jede eigentliche Unteralgebra nilpotent ist, stets hyperzentral ist.

Ein Grund für diesen Unterschied ist in folgender Tatsache zu sehen: Der Schluß auf die Hyperzentralität von K wird entscheidend dadurch ermöglicht, daß aus $a \in (x, N)$, $a \notin N$, $K' \subseteq N$, folgt $x \in (a, N)$. Man kann nämlich aus $\alpha x \in (a, N)$, $\alpha \neq 0$, folgern, daß $x \in (a, N)$. Bei Gruppen kann ein entsprechender allgemeiner Satz nicht aufgestellt werden. Dazu wäre nötig, daß man bei einer Gruppe G aus $x^n \in H$, $n > 1$, $G' \subseteq H$, stets auf $x \in H$ schließen könnte. G/H müßte dann torsionsfrei sein, was aber i.allg. nicht zutrifft.

Neben einer Untersuchung der Struktur der einzelnen Lie-Algebren, wie sie in dieser Arbeit definiert werden, taucht ein weiteres Problem auf.

Von Gruppen ist durch die Abhandlung [5] bekannt, daß das direkte Produkt zweier Gruppen die Normalisatorbedingung nicht zu erfüllen braucht, auch wenn die Gruppen selbst sie erfüllen.

Wir stehen deshalb vor der Aufgabe, zu zeigen, wann das direkte Produkt aus zwei der konstruierten Lie-Algebren die Idealisatorbedingung erfüllt.

Zu diesem Zweck wird zunächst unabhängig von den speziallen Konstruktionen ein Kriterium dafür gesucht, daß das direkte Produkt $L_1 \times L_2$ von Lie-Algebren L_1, L_2, die der Idealisatorbedingung genügen, seinerseits die Idealisatorbedingung erfüllt. Als notwendig und hinreichend dafür wird folgende Bedingung erkannt:

> Besitzen L_1 und L_2 Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren, so sind diese Faktoralgebren hyperzentral.

Unter diesem Aspekt werden die konstruierten Lie-Algebren einer verschärften Isomorphiebetrachtung unterworfen. Es wird geprüft, wann Algebren Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren, die nicht hyperzentral sind, besitzen.

Als Ergebnis dieser Kalkulationen erhalten wir, daß das direkte Produkt zweier Lie-Algebren genau dann die Idealisatorbedingung erfüllt, wenn die definierenden Folgen keine «gemeinsamen Endstücke» besitzen.

(Wir sagen, zwei Folgen $\{n_i\}_{i \in \mathrm{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathrm{N}}$ besitzen gemeinsame Endstücke, wenn zwei Zahlen $c_1, c_2 \in \mathrm{N}_0$ existieren mit folgender Eigenschaft: $n_{c_1+i} = m_{c_2+i}$ für alle $i \in \mathrm{N}$).

Definiert man nun zwei Folgen mit gemeinsamen Endstücken als äquivalent, so erhält man eine Klasseneinteilung aller Folgen natürlicher Zahlen. Man überlegt sich leicht, daß es überabzählbar viele Äquivalenzklassen gibt, wobei jede abzählbar viele Folgen enthält.

Dadurch wird für jede Primzahl $p > 2$ offenbar eine Klasseneinteilung der über $\mathbb{Z}_p$ konstruierten Lie-Algebren induziert, wobei es wieder überabzählbar viele Klassen gibt, deren jede abzählbar viele verschiedene Lie-Algebren enthält. Das direkte Produkt zweier Lie-Algebren erfüllt genau dann die Idealisatorbedingung, wenn die beiden Algebren aus verschiedenen Klassen stammen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Dr. H. Heineken herzlich danken für die Unterstützung, die er mir bei der Anfertigung dieser Arbeit zuteil werden ließ.

Bezeichnungen und Begriffe.

$\{a, b, \ldots\}$ bezeichne die *Menge* der Elemente $a, b, \ldots$.

$(a, b, \ldots)$ bezeichne die von den Elementen $a, b, \ldots$ erzeugte *Algebra*, deren Typ wir im Einzelfall angeben.

$\langle a, b, \ldots \rangle$ bezeichne das von $a, b, \ldots$ erzeugte *Ideal* einer Algebra, die im Einzelfall angegeben wird.

Für eine nilpotente Abbildung f wird definiert

$$\operatorname{ord} f = \operatorname{ord}(f) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid f^n = 0\}$$

$U \subseteq V$ $(U \subset V)$ U ist Unteralgebra von V (und $(U \neq V)$,

$U \subseteq\!| V$ U ist Ideal in V .

$[x, y]$ ist das Produkt der Elemente x, y einer Lie-Algebra. Induktiv wird definiert $[x, y^{(0)}] = x$, $[x, y^{(n+1)}] = [[x, y^{(n)}], y]$.

Die Lie-Algebra einer assoziativen Algebra wird bekanntlich durch die Festsetzung $[x, y] = xy - yx$ konstruiert.

Für Teilmengen U, V einer Lie-Algebra L ist $[U, V]$ die von allen Produkten $[u, v]$, $u \in U$, $v \in V$, erzeugte Unteralgebra von L.

Damit erklären wir die Glieder der absteigenden Zentralreihe einer Lie-Algebra L folgendermaßen:

$$L^1 = L\,, \qquad L^{n+1} = [L^n, L]$$

Statt L^2 schreiben wir L'.

Für das Folgende seien U, L Lie-Algebren mit $U \subseteq L$. Dann ist

$\mathfrak{Z}(L)$ Zentrum von L, d.h. Menge aller $z \in L$ mit $L \operatorname{ad} z = 0$

$\mathfrak{C}(U)$ Zentralisator von U, d.h. Menge aller $z \in L$ mit $U \operatorname{ad} z = 0$

$\mathfrak{I}(U)$ Idealisator von U, d.h. Menge aller $z \in L$ mit $u \operatorname{ad} z \in U$ für alle $u \in U$.

Die Oberalgebra L von U, auf die sich die Angaben des Zentralisators bzw. des Idealisators beziehen, wird, wenn Mißverständnisse nicht ausgeschlossen sind, im Einzelfall angegeben werden.

Eine Algebra L heißt *hyperzentral*, wenn gilt:

Für jedes Ideal K von L mit $\mathfrak{Z}(L/K) = 0$ folgt $L/K = 0$.

Eine Algebra L erfüllt die *Idealisatorbedingung*, wenn gilt:

Für jede Unteralgebra U von L mit $\mathfrak{I}(U) = U$ folgt $U = L$.

Wenn L die Idealisatorbedingung erfüllt, ist also jede echte Unteralgebra von L von ihrem Idealisator in L verschieden. Im übrigen folgen wir den Bezeichnungen von Seligman [2].

I. – ALLGEMEINE SÄTZE

1. Hilfsmittel.

Zunächst seien zwei zahlentheoretische Bemerkungen gemacht. Es ist allgemein bekannt, daß für jede Primzahl p gilt

$$\binom{p^n}{i} \equiv 0(p) \quad \text{für } n \in \mathrm{N} \text{ und } 1 < i < p^n, \tag{1.1.1}$$

$$(-1)^i \binom{p^n - 1}{i} \equiv 1(p) \quad \text{für } n \in \mathrm{N} \text{ und } 0 \leqslant i \leqslant p^n - 1\,. \tag{1.1.2}$$

In einer assoziativen Algebra A gilt bekanntlich für zwei beliebige Elemente x, y die Gleichung

$$[x, y^{(n)}] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} y^i x y^{n-i}, \qquad n \in \mathrm{N}\,. \tag{1.1.3}$$

Handelt es sich um eine Algebra über $\mathbb{Z}_p$, so folgt sofort

$$[x, y^{(p^n)}] = xy^{p^n} - y^{p^n}x = [x, y^{p^n}], \qquad n \geqslant 0. \tag{1.1.4}$$

Diese Gleichung gibt Anlaß zu einer Feststellung, die wir noch verwenden werden.

Es seien $u_1, \ldots, u_k \in A$ und $n_1, \ldots, n_k \geqslant 0$. $u_1, \ldots, u_k$ erzeugen eine Unteralgebra L, $u_1^{p^{n_1}}, \ldots, u_k^{p^{n_k}}$ eine Unteralgebra K der Lie-Algebra von A. Dann gilt wegen (1.1.4) $K' \subseteq L'$.

(1.1.3) besitzt ein Analogon für Derivationen. Sei D eine Derivation einer Lie-Algebra L und $x, y \in L$. Dann gilt

$$[x, y]D^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} [xD^i, yD^{n-i}], \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{1.1.5}$$

Im Falle der Charakteristik p folgt wieder

$$[x, y]D^{p^n} = [xD^{p^n}, y] + [x, yD^{p^n}], \qquad n \geqslant 0. \tag{1.1.6}$$

Also ist in diesem Fall auch D^{p^n} eine Derivation. (Siehe auch Zassenhaus [6]).

Nach Jacobson [1], Chap. 5, gilt für Elemente u, v einer assoziativen Algebra A über $\mathbb{Z}_p$

$$(u + v)^p \equiv u^p + v^p (L'). \tag{1.1.7}$$

Dabei ist hier L die von u und v erzeugte Lie-Unteralgebra der Lie-Algebra von A.

Dieses Resultat läßt sich nun verallgemeinern.

Wir betrachten n Elemente $u_1, \ldots, u_n \in A$. Die von ihnen erzeugte Unteralgebra der Lie-Algebra von A sei L. Mit vollständiger Induktion über n folgt aus (1.1.7)

$$(u_1 + \ldots + u_n)^p \equiv u_1^p + \ldots + u_n^p (L'),$$

(1.1.8) bzw.

$$(u_1 + \ldots + u_n)^p = u_1^p + \ldots + u_n^p + g', \qquad g' \in L'.$$

Nun machen wir eine zusätzliche Voraussetzung, die später gerechtfertigt werden wird:

> $u_1, \ldots, u_n$ und L seien wie in (1.1.8). Es soll überdies für alle $g', h' \in L'$ gelten $g'h' = 0$. Dann folgt

$$(u_1 + \ldots + u_n)^{p^m} \equiv u_1^{p^m} + \ldots + u_n^{p^m}(L'), \qquad m \geqslant 0,$$

(1.1.9) bzw.

$$(u_1 + \ldots + u_n)^{p^m} = u_1^{p^m} + \ldots + u_n^{p^m} + g'_m, \qquad g'_m \in L'.$$

Der Beweis geht mit vollständiger Induktion über m unter Berücksichtigung der Bemerkung im Anschluß an (1.1.4) und mit (1.1.8).

Später werden wir noch folgenden Satz benötigen.

Satz 1.1.1. *Sei U Unteralgebra der nilpotent Lie-Algebra V. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, so daß für die durch*

$$U_0 = U, \qquad U_{i+1} = \mathfrak{J}(U_i)$$

definierte aufsteigende Folge gilt: $U_n = V$.

Beweis. V ist nilpotent. Daher endet die durch

$$Z_0 = 0, \qquad Z_{i+1}/Z_i = \mathfrak{Z}(V/Z_i)$$

definierte austeigende Zentralreihe nach endlich vielen Schritten bei V.

Ferner gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$: $Z_i \subseteq U_i$.

Für $i = 0$ ist dies zweifellos richtig.

Wenn nun die Behauptung für ein beliegibes i richtig ist, folgt für jedes $v_{i+1} \in Z_{i+1}$

$$[x, v_{i+1}] \in Z_i \quad \text{für alle } x \in V,$$

insbesondere

$$[x, v_{i+1}] \in U_i \quad \text{für alle } x \in U_i,$$

d.h.

$$Z_{i+1} \subseteq \mathfrak{J}(U_i) = U_{i+1}.$$

Insgesamt ist damit die Behauptung bewiesen.

2. Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung.

Wir stellen nun einige Grundtatsachen über Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung zusammen. Die Beweise verlaufen im allgemeinen analog zu denen entsprechender Sätze in der Gruppentheorie und werden daher zum Teil dem Leser überlassen.

Zunächst soll die Frage untersucht werden, ob Unter- und Faktoralgebren einer Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung ebenfalls der Idealisatorbedingung genügen.

Die Frage wird durch die folgenden zwei Sätze beantwortet.

SATZ 1.2.1. *Jede Unteralgebra einer Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung erfüllt ebenfalls die Idealisatorbedingung.*

SATZ 1.2.2. *Jede Faktoralgebra einer Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung erfüllt ebenfalls die Idealisatorbedingung.*

Weiter gilt

SATZ 1.2.3. *Es seien L_1 und L_2 Lie-Algebren, die folgenden Bedingungen genügen:*

1) $L_1 \cong L_2 \neq 0$;

2) $\mathfrak{Z}(L_1) \cong \mathfrak{Z}(L_2) = 0$.

Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ nicht die Idealisatorbedingung.

Dieses Ergebnis läßt sich nun sofort verallgemeinern.

SATZ. 1.2.4. *Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren. Es existiere ferner ein Quadrupel (X_1, U_1, X_2, U_2) von Lie-Algebren, die folgende Bedingungen erfüllen:*

1) $X_i \subseteq\!| \; U_i \subseteq L_i$, $i = 1, 2$;

2) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$;

3) $\mathfrak{Z}(U_1/X_1) \cong \mathfrak{Z}(U_2/X_2) = 0$.

Dann genügt $L_1 \times L_2$ nicht der Idealisatorbedingung.

BEWEIS. Wir wollen annehmen, $L_1 \times L_2$ erfülle die Idealisatorbedingung.

Nach Satz 1.2.1 erfüllt dann auch $U_1 \times U_2 \subseteq L_1 \times L_2$ die Idealisatorbedingung.

Es gilt $(U_1 \times U_2)/(X_1 \times X_2) \cong U_1/X_1 \times U_2/X_2$ und diese Algebra müßte nach Satz 1.2.2 ebenfalls die Idealisatorbedingung erfüllen. Wegen der Bedingungen 2) und 3) und wegen Satz 1.2.3 ist dies jedoch unmöglich. Die Annahme führt auf einen Widerspruch und die Behauptung ist bewiesen.

Äquivalent dazu ist folgender

Satz 1.2.4′. *Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren. $L_1 \times L_2$ genüge der Idealisatorbedingung.*

Wenn dann ein Quadrupel (X_1, U_1, X_2, U_2) von Unteralgebren existiert mit

1) $X_i \trianglelefteq U_i \subseteq L_i, \quad i = 1, 2$

2) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$

so ist notwendigerweise

$$\mathfrak{Z}(U_1/X_1) \cong \mathfrak{Z}(U_2/X_2) \neq 0 .$$

Für die weiteren Überlegungen treffen wir folgende Definition:

L_1 und L_2 seien Lie-algebren. (Wieder über demselben Grundkörper.) Wir erklären Abbildungen

$$\pi_i \colon L_1 \times L_2 \to L_i , \qquad i = 1, 2$$

durch

$$(u_1 + u_2)\pi_i = u_i , \qquad u_i \in L_i$$

Mit Hilfe dieser Definition können wir nun einige Ergebnisse über die Unteralgebren von $L_1 \times L_2$ formulieren, die uns zur Umkehrung der Sätze 1.2.4 bzw. 1.2.4′ verhelfen sollen.

Satz 1.2.5. *Seien L_1 und L_2 Lie-Algebren.*

$$U \subseteq L_1 \times L_2 , \qquad U_i = U\pi_i , \qquad X_i = U \cap L_i , \qquad i = 1, 2 .$$

Dann gilt:

1) *Die U_i sind Unteralgebren von L_i;*

2) $X_i \trianglelefteq U_i$ *(folglich $X_i = U \cap U_i$)*

3) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2$

Beweis. 1) ist unmittelbar einsichtig.

Wir zeigen 2) für den Fall $i = 1$, der Fall $i = 2$ geht analog. Offenbar ist $X_1 \subseteq U_1$. Sei $u_1 \in U_1$, $x_1 \in X_1$. Dann ist $[x_1, u_1] \in L_1$. Zu u_1 existiert ein $u_2 \in L_2$ mit $u_1 + u_2 \in U$. Dann ist wegen $X_1 \subseteq U$ sogar $[x_1, u_1] = [x_1, u_1 + u_2] \in U$. Da u_1 keiner Einschränkung unterlag, ist 2) gezeigt.

3) folgt so: Sei $u_0 + X_1 \in U_1/X_1$: Dann existiert ein $v \in U_2$ mit $u_0 + v \in U$. Sei $v' \in U_2$ ein weiteres Element mit $u_0 + v' \in U$.

Dann ist $(u_0 + v) - (u_0 + v') = v - v' \in U \cap U_2 = X_2$.

Zu jedem $u_0 + X_1 \in U_1/X_1$ existiert also genau eine Nebenklasse $v_0 + X_2 \in U_2/X_2$ mit $u_0 + v_0 \in U$.

Wir erhalten so in natürlicher Weise eine injektive Abbildung σ von U_1/X_1 nach U_2/X_2. Man sieht sofort, daß σ auch surjektiv ist.

Wir wollen nachweisen, daß σ ein Isomorphismus ist.

Sei nun $u_i + X_1 \in U_1/X_1$ beliebig, $(u_i + \;)\sigma = v_i + X_2$, $i = 0, 1$.

Ferner sei α ein beliebiges Element aus dem gemeinsamen Skalarenkörper von L_1 und L_2.

Dann ist $u_i + v_i \in U$, $i = 0, 1$, und damit $u_0 + u_1 + v_0 + v_1 \in U$, $\alpha u_0 + \alpha v_0 \in U$, $[u_0, u_1] + [v_0, v_1] = [u_0 + v_0, u_1 + v_1] \in U$. D.h.

$$(\alpha u_0 + X_1)\sigma = \alpha v_0 + X_2 = \alpha\big((u_0 + X_1)\sigma\big)\,,$$

$$(u_0 + u_1 + X_1)\sigma = v_0 + v_1 + X_2 = (u_0 + X_1)\sigma + (u_1 + X_1)\sigma\,,$$

$$\big([u_0, u_1] + X_1\big)\sigma = [v_0, v_1] + X_2 = [(u_0 + X_1)\sigma, (u_1 + X_1)\sigma]\,.$$

Somit ist σ in der Tat ein Isomorphismus.

Wir sind jetzt in der Lage, unsere Überlegungen zu vervollständigen. Es gilt der folgende

Satz 1.2.6. L_1 *und* L_2 *seien Lie-Algebren, die der Idealisatorbedingung genügen. Für jedes Quadrupel* (X_1, U_1, X_2, U_2) *mit*

1) $X_i \subseteq\!| \; U_i \subseteq L_i$, $i = 1, 2$,

2) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$,

gelte

$$\mathfrak{Z}(U_1/X_1) \cong \mathfrak{Z}(U_2/X_2) \neq 0\,.$$

Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ *die Idealisatorbedingung.*

Beweis. Sei $U \subseteq L_1 \times L_2$ beliebig.

Mit den Bezeichnungen von Satz 1.2.5 gilt $U_1/X_1 \cong U_2/X_2$. Wäre etwa $U_1/X_1 = 0$, so wäre $X_1 = U_1$, $X_2 = U_2$, also $U = U_1 \times U_2$. Dann wäre auch $\mathfrak{J}(U) = (\mathfrak{J}(U_1) \cap L_1) \times (\mathfrak{J}(U_2) \cap L_2)$.

Da nach Voraussetzung $U = U_1 \times U_2 \subset L_1 \times L_2$, wäre etwa $U_1 \subset L_1$. Dann ergäbe sich weiter $\mathfrak{J}(U_1) \cap L_1 \supset U_1$ (und $\mathfrak{J}(U_2) \cap L_2 \supseteq U_2$).

Somit wäre $\mathfrak{J}(U) = (\mathfrak{J}(U_1) \cap L_1) \times (\mathfrak{J}(U_2) \cap L_2) \supset U_1 \times U_2 = U$.

Wir können also weiter annehmen, daß $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$.

Nach Voraussetzung ist dann $\mathfrak{Z}(U_1/X_1) \neq 0$. Das bedeutet, daß ein $u_0 \in U_1$, $u_0 \notin X_1$, existiert, derart daß für alle $u \in U_1$ gilt: $[u, u_0] \in X_1$. Wegen $u_0 \notin X_1$ gilt überdies $u_0 \notin U$.

Sei nun $u + v \in U$ beliebig.

Dann gilt:

$$[u + v, u_0] = [u, u_0] \in X_1 \subseteq U .$$

Also $U \subset \mathfrak{J}(U)$.

Damit ist Satz 1.2.6 vollständig bewiesen.

Abschließend wollen wir diese Ergebnisse zusammenfassen in

Satz 1.2.7. *L_1 und L_2 seien Lie-Algebren, die der Idealisatorbedingung genügen. Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ genau dann die Idealisatorbedingung, wenn gilt:*

Für je 4 Unteralgebren X_1, U_1, X_2, U_2 mit

1) $X_i \trianglelefteq U_i \subseteq L_i$, $i = 1, 2$;

2) $U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0$

ist

$$\mathfrak{Z}(U_1/X_1) \cong \mathfrak{Z}(U_2/X_2) \neq 0 .$$

Da die X_i keinen weiteren Einschränkungen unterliegen, läßt sich dieser Satz auch so formulieren:

Satz 1.2.8. *L_1 und L_2 seien Lie-Algebren, die der Idealisatorbedingung genügen.*

Dann erfüllt $L_1 \times L_2$ genau dann die Idealisatorbedingung, wenn gilt:

Besitzen L_1 und L_2 Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren, so sind diese Faktoren hyperzentral.

Über die Beziehung zwischen Idealisatorbedingung und Hyperzentralität bei Lie-Algebren gibt der folgende Satz Auskunft, der sich wieder direkt aus der Gruppentheorie übertragen läßt.

Satz 1.2.9. *Jede hyperzentrale Lie-Algebra genügt der Idealisatorbedingung.*

Die Konstruktionen von Abschnitt II werden zeigen, daß die Umkehrung dieses Satzes, wie in der Gruppentheorie, i. allg. falsch ist.

3. Nilpotenz-Eigenschaften von Lie-Algebren mit Idealisatorbedingung.

Ehe wir uns dem eigentlichen Ziel der Arbeit zuwenden, soll noch geklärt werden, in welchem Umfang sich die gruppentheoretischen Ergebnisse günstigstenfalls in die Theorie der Lie-Algebren übertragen lassen.

Die Beweise der meisten Sätze können wieder wegen ihrer Analogie zu den entsprechenden gruppentheoretischen Sätzen, wie sie etwa bei Kurosh [4]; § 63, ausgeführt sind, dem Leser überlassen bleiben.

Bei unseren Betrachtungen kommt es uns auf die folgenden vier Eigenschaften von Lie-Algebren an:

I) Das Zentrum der Algebra ist 0.

II) Jede echte Unteralgebra ist nilpotent.

III) Die Lie-Algebra erfüllt die Idealisatorbedingung.

IV) Die Kommutatoralgebra der Lie-Algebra ist abelsch.

Wir werden sehen, daß eine von der Nullalgebra verschiedene Liealgebra nicht alle vier Eigenschaften zugleich besitzen kann, wie es bei völliger Übertragbarkeit der Sätze aus der Gruppentheorie zu erwarten wäre.

Zunächst benötigt man

Lemma 1.3.1. *Sei H Ideal einer Lie-Algebra L, die der Idealisatorbedingung genügt. Es sei $\mathfrak{Z}(H) \neq 0$. Ferner existiere ein $a \in L$ mit $L = (H, a)$. Dann ist $\mathfrak{Z}(L) \neq 0$.*

Dieses Lemma kann man benutzen, um eine Verallgemeinerung zu zeigen, die wieder ihr gruppentheoretisches Analogon hat.

Lemma 1.3.2. *Sei H ein hyperzentrales Ideal einer Lie-Algebra L, die die Idealisatorbedingung erfüllt. Ferner existiere ein $a \in L$ mit $L = (H, a)$. Dann ist auch L hyperzentral.*

Mit diesen Lemmata ausgestattet, können wir nun zeigen

Satz 1.3.1. *Sei L eine Lie-Algebra mit den Eigenschaften II und III, sowie $L' \neq L$. Dann ist L hyperzentral.*

Beweis. Wegen $L' \neq L$ existiert ein $a \in L$, $a \notin L'$.

Nach Zorns Lemma existiert weiter eine maximale Unteralgebra B von L mit $L' \subseteq B \subsetneq L$ und $a \notin B$.

Sei $x \in L$ ein beliebiges Element, das nicht in B liegt. Wegen der Maximalität von B ist dann mit geeignetem α aus dem Skalarenkörper von L und $b \in B$

$$a = \alpha x + b .$$

Wegen $a \notin B$ ist $\alpha \neq 0$. Damit ergibt sich

$$x = \alpha^{-1} a - \alpha^{-1} b .$$

Also ist $x \in (B, a)$ und man hat $L = (B, a)$.

Wegen $B \neq L$ ist B nach Voraussetzung nilpotent und damit hyperzentral. Nach Lemma 1.3.2 ist dann auch L hyperzentral. w.z.b.w.

An dieser Stelle tritt ein entscheidender Unterschied zur Gruppentheorie auf:

> Sei G eine Gruppe, $G' \neq G$, $x \in G$, $x \notin G'$. Dann existiert zwar ebenfalls ein maximaler Normalteiler F von G mit $G' \subseteq F$ und $x \notin F$. Das Erzeugnis (F, x) ist aber im allgemeinen von G verschieden.

Für eine nichttriviale Lie-Algebra L mit den Eigenschaften I, II, III kann nach dem eben bewiesenen Satz L' nicht abelsch sein.

Beim Versuch, die gruppentheoretischen Resultate auf Lie-Algebren zu übertragen, muß man also auf wenigstens eine der vier Eigenschaften verzichten.

Es wird sich herausstellen, daß man unter Verzicht auf II die übrigen Eigenschaften erhalten kann.

Nilpotenzeigenschaften gehen aber keineswegs völlig verloren. Wie in der Gruppentheorie ist nämlich jede Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung lokal nilpotent.

Dieses Ergebnis kann man, wie in der Gruppentheorie, schrittweise aus folgenden Sätzen erhalten.

Satz 1.3.2. *Jede Unteralgebra einer hyperzentralen Lie-Algebra ist hyperzentral.*

Satz 1.3.3. *Jede hyperzentrale Lie-Algebra ist lokal nilpotent.*

Man benötigt ferner.

Lemma 1.3.3. *Sei L eine Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung und $a, x \in L$. Sei ferner $x_0 = x$, $x_{i+1} = [x_i, a]$, $i \in \mathrm{N}_0$.*
Dann existiert ein $i \in \mathrm{N}_0$ mit $x_i = 0$.

Daraus kann man folgern

Lemma 1.3.4. *Sei H ein lokal nilpotentes Ideal einer Lie-Algebra L mit Idealisatorbedingung und $L = (H, a)$. Dann ist L lokal nilpotent.*

Damit sind wir angelangt bei

Satz 1.3.4. *Jede Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung ist lokal nilpotent.*

Beweis. Sei L eine Lie-Algebra mit Idealisatorbedingung. Die Nullalgebra ist eine lokal nilpotente Unteralgebra von L. Nach dem Zorn'schen Lemma existiert eine maximale lokal nilpotente Unteralgebra H von L.

Sei $a \in \mathfrak{J}(H)$ beliebig.

Nach Satz 1.2.1 erfüllt (H, a) die Idealisatorbedingung. Nach Lemma 1.3.4 ist daher (H, a) lokal nilpotent. Da H maximal war, folgt $H = (H, a)$, d.h. $a \in H$. Da $a \in \mathfrak{J}(H)$ beliebig war, hat man $\mathfrak{J}(H) = H$. Also ist, da L die Idealisatorbedingung erfüllt, $H = L$, d.h. L ist lokal nilpotent. w.z.b.w.

Die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch keineswegs richtig. Es lassen sich-leicht lokal nilpotente Lie-Algebren angeben, die die Idealisatorbedingung nicht erfüllen.

Wir nehmen dazu eine der in II. § 1 konstruierten Lie-Algebren L und bilden das direkte Produkt $L \times L$. Es ist $L \neq 0$ und nach Satz 2.2.2 überdies $\mathfrak{Z}(L) = 0$. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 1.2.3 erfüllt und $L \times L$ genügt nicht der Idealisatorbedingung.

Auf der anderen Seite ist aber wegen Satz 2.4.2 die lokale Nilpotenz von L und damit auch von $L \times L$ sichergestellt.

II. – LIE-ALGEBREN MIT TRIVIALEM ZENTRUM UND IDEALISATORBEDINGUNG

1. Konstruktion.

Wir wenden uns jetzt dem eigentlichen Ziel zu, Lie-Algebren über $\mathbb{Z}_p$ zu konstruieren, deren Zentrum 0 ist, die die Idealisatorbedingung erfüllen und deren Kommutatoralgebra abelsch ist.

Dabei werden wir von assoziativen Algebren über $\mathbb{Z}_p$ ausgehen. Gewisse Unteralgebren der Lie-Algebren dieser assoziativen Algebren werden dann die gewünschten Eigenschaften haben.

Generelle Voraussetzung wird sein $p > 2$.

Es sei eine beliebige Folge natürlicher Zahlen $\{n_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ gegeben. Mit ihrer Hilfe definieren wir eine assoziative Algebra F:

1) F werde von den Elementen a, x_i, $i \in \mathbf{N}$, erzeugt.

2) Dabei werden die Relationen gefordert:

$$a^2 = axa = 0 \qquad \text{für alle } x \in F ,$$

$$x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} = x_i + a \qquad \text{für alle } i \in \mathbf{N} ,$$

$$x_1^{p^{n_1}} = (x_1 + a)^{p^{n_1}} = 0 .$$

Wir führen folgende Abkürzung ein:

Es sei

$$z_i = x_i + a \qquad \text{für alle } i \in \mathbf{N} .$$

Die Elemente z_i erzeugen eine Unteralgebra L der Lie-Algebra von F.

In den folgenden Paragraphen werden wir zeigen, daß mit der Angabe von L das gewünschte Ziel erreicht ist.

Bevor wir den Nachweis der verlangten Eigenschaften vollziehen, seien einige sehr wichtige Beziehungen in F bzw. in L zusammengestellt.

Auf Grund der Relationen $a^2 = axa = 0$ in F gilt $[a, \ldots, a, .] = 0$ und folglich $[a, \ldots, x_i, .] = [a, \ldots, z_i, .]$ für alle i. Damit und mit (1.1.2) und (1.1.3) folgt

$$(2.1.1)\qquad \begin{aligned} z_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} &= (x_{i+1}+a)^{p^{n_{i+1}}} = x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} + \left[a, x_{i+1}^{(p^{n_{i+1}}-1)}\right] = z_i + \left[a, z_{i+1}^{(p^{n_{i+1}}-1)}\right], \\ z_i &= z_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} - \left[a, z_{i+1}^{(p^{n_{i+1}}-1)}\right]. \end{aligned}$$

Hieraus findet man unter Ausnutzung von (1.1.2), (1.1.3) und (1.1.4) durch vollständige Induktion leicht folgende Verallgemeinerung von (2.1.1):

Für beliebige $i, k \in \mathbf{N}$ ist

$$(2.1.2)\qquad \begin{aligned} z_i = z_{i+k}^{p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}} &- \left[a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}-p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+2}})}\right] \\ &- \left[a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}-p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+3}})}\right] \\ &\ \ \vdots \\ &- \left[a, z_{i+k}^{(n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}-1)}\right]. \end{aligned}$$

Wegen (1.1.4) bedeutet dies für die inneren Derivationen von L folgendes:

$$(2.1.3)\qquad \begin{aligned} \operatorname{ad} z_i = (\operatorname{ad} z_{i+k})^{p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}} &- \operatorname{ad}\left[a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}-p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+2}})}\right] \\ &- \operatorname{ad}\left[a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}-p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+3}})}\right] \\ &\ \ \vdots \\ &- \operatorname{ad}\left[a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}}-1)}\right]. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir noch in F

$$-[z_i, z_{i+1}] = [z_{i+1}, x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}}] = [a, x_{i+1}^{p^{n_{i+1}}}] = [a, z_i].$$

Also gilt

$$(2.1.4)\qquad \begin{aligned} &[a, z_i] = [z_{i+1}, z_i] && \text{für alle } i \in \mathbf{N}, \\ &\text{d.h.} \\ &[a, z_i] \in L' && \text{für alle } i \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Aus (2.1.3) folgt unmittelbar

$$(2.1.5)\qquad [a, z_i] = \left[a, z_{i+k}^{(p^{n_{i+k}+\cdots+n_{i+1}})}\right] \quad \text{für alle } i, k \in \mathbf{N}.$$

Die Relationen $a^2 = axa = 0$ und $x_1^{p^{n_1}} = (x_1 + a)_1^{p^{n_1}} = 0$ liefern wegen (1.1.3)

$$[a, x_1^{(p^{n_1}-1)}] = 0$$

(2.1.6) bzw.

$$[a, z_1^{(p^{n_1}-1)}] = 0 .$$

2. Nachweis von $\mathfrak{Z}(L) = 0$.

Wir zeigen zunächst

LEMMA 2.2.1. *Sei*

$$j_i = p^{n_i + \dots + n_2}(p^{n_1} - 1) \qquad \text{für } i \geqslant 2 ,$$

$$j_1 = p^{n_1} - 1 .$$

Dann sind für jedes $i \in \mathbf{N}$ *die Elemente* $[a, z_i^{(j)}]$ *mit* $j < j_i$ *linear unabhängig.*

BEWEIS. Wegen der Relationen von F und L ist $[a, z_i^{(j)}] \neq 0$ für $j < j_i$.

Sei

$$\sum_{1 \leqslant j < j_i} \alpha_j [a, z_i^{(j)}] = 0 , \qquad \alpha_j \in \mathbf{Z}_p .$$

Durch sukzessive Anwendung der Abbildungen $(\operatorname{ad} z_i)^{j_i - 1}$, $(\operatorname{ad} z_i)^{j_i - 2}$, $\dots, \operatorname{ad} z_i$ auf die obige Summe erhält man

$$\alpha_j = 0 \qquad \text{für } 1 \leqslant j < j_i \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Um $\mathfrak{Z}(L) = 0$ zu beweisen, betrachten wir Unteralgebren L_i von L, die folgendermaßen definiert sind:

$$L_i = (z_i, \dots, z_i, [a, z_i], \dots, [a, z_1]) , \qquad i \in \mathbf{N}$$

Offenbar gilt $L_i \subseteq L_j$ genau dann, wenn $i \leqslant j$, und

$$L = \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i .$$

Wir betrachten zunächst nur L_i mit $i \geqslant 2$.

Vermöge (2.1.2) und (2.1.3) lassen sich alle Elemente von L_i durch z_i und $[a, z_i]$ ausdrüchen.

Zieht man noch (2.1.5) und (2.1.6) heran, so erkennt man, daß sich jedes Element $z \in L_i$ in der folgenden Form schreiben läßt:

$$z = \sum_{j=1}^{j_i-1} \alpha_j[a, z_i^{(j)}] + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j z_i^{p^{n_i+\dots+n_{j+1}}} + \beta_i z_i ,$$

$a_j, \beta_j, \beta_i \in \mathbb{Z}_p$, j_i wie in Lemma 2.2.1 definiert.

Nun behaupten wir

SATZ 2.2.1.

$$\mathfrak{Z}(L_i) = ([a, z_i^{(p^{n_i+\dots+n_2}(p^{n_1}-1)-1)}]) , \qquad i \geqslant 2 .$$

BEWEIS. Sei $z \in \mathfrak{Z}(L_i)$ beliebig. Dann ist z von der oben angegebenen Gestalt.

Weiter muß sein $[[a, z_i], z] = 0$.

Wegen (1.1.4) bedeutet dies

$$y = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j[a, z_i^{(p^{n_i+\dots+n_{j+1}}+1)}] + \beta_i[a, z_i^{(2)}] = 0 .$$

Da wegen $p > 2$ auch $p^{n_i+\dots+n_2}(p^{n_1}-1) > p^{n_i+\dots+n_2}+1$, folgt nach Lemma 2.2.1

$$\beta_j = 0 , \qquad 1 \leqslant j \leqslant i .$$

Somit gilt für ein Zantrumselement z mit geeigneten $\alpha_j \in \mathbb{Z}_p$

$$z = \sum_{j=1}^{j_i-1} \alpha_j[a, z_i^{(j)}] .$$

Da $[z, z_i] = 0$, folgt wieder wegen Lemma 2.2.1

$$\alpha_j = 0 , \qquad 1 \leqslant j < j_i .$$

Anderseits folgt aus (2.1.5) bzw. (2.1.6) aber

$$[a, z_i^{(p^{n_i+\dots+n_2}(p^{n_1}-1)-1)}] \in \mathfrak{Z}(L_i) .$$

Damit ist Satz 2.2.1 bewiesen.

Wenn man berücksichtigt, daß wegen $p > 2$ gilt $p^{n_1} - 2 > 0$, erhält man analog

$$\mathfrak{Z}(L_1) = ([a, z_1^{(p^{n_1}-2)}]) .$$

Aus Satz 2.2.1 folgt unmittelbar

SATZ. 2.2.2.

$$\mathfrak{Z}(L) = 0 .$$

BEWEIS. j_i sei wieder wie in Lemma 2.2.1 definiert. (2.1.3) bzw. (2.1.5) liefern für alle $i \in \mathrm{N}$

$$[a, z_i^{(j_i-1)}] = [a, z_{i+1}^{(j_{i+1}-p^{n_{i+1}})}] .$$

Nach Satz 2.2.1 ergibt sich daraus

$$\mathfrak{Z}(L_i) \cap \mathfrak{Z}(L_{i+1}) = 0 \qquad \text{für alle } n \in \mathrm{N} .$$

Sei $i \in \mathrm{N}$ beliebig und $x \in \mathfrak{Z}(L) \cap L_i$ beliebig.
Wegen $L_i \subseteq L_{i+1}$ ist dann auch $x \in \mathfrak{Z}(L) \cap L_{i+1}$.
Damit ergibt sich $x \in \mathfrak{Z}(L_i) \cap \mathfrak{Z}(L_{i+1})$.

Also

$$x = 0$$

D.h.

$$\mathfrak{Z}(L) \cap L_i = 0 \qquad \text{für alle } i \in \mathrm{N}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{Z}(L) = \mathfrak{Z}(L) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathfrak{Z}(L) \cap L_i) = 0 \qquad \text{w.z.b.w.}$$

3. Kommutativität von L'.

L erfüllt auch die Bedingung IV von I. § 3.
Es gilt

SATZ 2.3.1. *L' ist kommutativ.*

Beweis. Nach (2.1.4) ist $[a, z_i] \in L'$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Ideal

$$A = \langle [a, z_1], [a, z_2], .. \rangle \subseteq\!| \, L$$

Trivialerweise gilt

$$A \subseteq L' .$$

Uns interessiert die Faktoralgebra L/A.

Sei $z_i + A$, $z_j + A \in L/A$ mit $i > j$.

Dann gilt nach (2.1.3)

$$\begin{aligned}
[z_i + A, z_j + A] = [z_i, z_j] + A &= \left[z_i, z_i^{(p^{n_i + \dots + n_{j+1}})}\right] \\
&\quad - \left[z_i, \left[a, z_i^{(p^{n_i + \dots + n_{j+1}} - p^{n_i + \dots + n_{j+2}})}\right]\right] \\
&\quad - \left[z_i, \left[a, z_i^{(p^{n_i + \dots + n_{j+1}} - 1)}\right]\right] + A \\
&= 0 + A .
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß L/A kommutativ ist, d.h. $L' \subseteq A$.

Insgesamt ergibt sich so

$$L' = A .$$

Die Relationen $a^2 = axa = 0$ in F liefern die gewünschte Kommutativität von A und damit von L'.

4. Die Idealisatorbedingung in L.

Wir wollen schließlich nachweisen, daß L die Idealisatorbedingung erfüllt. Tatsächlich werden wir sogar eine Verschärfung dieser Eigenschaft zeigen. Es wird sich nämlich herausstellen, daß gilt:

> Zu jeder Unteralgebra $U \subseteq L$ existieren ein (von U abhängiges) $n \in \mathbb{N}$ und Unteralgebren $U_1, \dots, U_n$ von L mit
>
> $$U \subseteq\!| \, U_1 \subseteq\!| \dots \subseteq\!| \, U_n \subseteq\!| \, L .$$

Um das zu zeigen, führen wir eine Fallunterscheidung durch. Sei U eine beliebige Unteralgebra von L. Dann trifft sicher eine der folgenden drei Aussagen auf U zu.

1) $U \subseteq L'$

2) $(U + L')/L' \neq 0$ ist endlich erzeugbar

3) $(U + L')/L' \neq 0$ ist nicht endlich erzeugbar.

Im ersten Fall ergibt sich wegen der Kommutativität von L' sofort

SATZ 2.4.1. *Ist U Unteralgebra von L und $U \subseteq L'$, so gilt*

$$U \subseteq\!| \, L' \subseteq\!| \, L .$$

Ehe wir die beiden anderen Fälle behandeln, zeigen wir zunächst, daß alle inneren Derivationen von L nilpotent sind.

Sei K die von a und L erzeugte Unteralgebra der Lie-Algebra von F. Ferner sei B das Ideal $\langle a \rangle$ von K.

Offenbar ist $B = (a, A)$, wobei A das in § 3 definierte Ideal von L ist.

Wenn $u \in K$ ist, so wollen wir die Restriktion der durch u induzierten inneren Derivation von K auf B mit $\bar{u}$ bezeichnen.

Die Abbildungen $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots$ erzeugen eine assoziative Algebra D über $\mathbb{Z}_p$.

Wegen der definierenden Relationen von F und wegen $L' = A$ ist D offenbar kommutativ. Darüber hinaus gelten wegen (2.1.5) und (2.1.6) die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} &\bar{z}_{i+1}^{p^{n_{i+1}}} = \bar{z}_i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} , \\ &\bar{z}_1^{p^{n_1-1}} = 0 . \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Daraus erhält man

LEMMA 2.4.1. *Jede Abbildung $\bar{u} \in D$ ist nilpotent.*

BEWEIS. Sei $\bar{u} \in D$ beliebig. Wegen (2.4.1) existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\bar{u} = \sum_{j \geq 1} \alpha_j \bar{z}_k^j , \qquad \alpha_j \in \mathbb{Z}_p .$$

Hieraus folgt, wieder wegen (2.4.1),

$$\bar{u}^{p^{n_k + \cdots + n_2(p^{n_1}-1)}} = \sum_{j \geq 0} \beta_j \bar{z}^{p^{n_k + \cdots + n_2(p^{n_1}-1)+j}} = 0 , \qquad \beta_j \in \mathbb{Z}_p .$$

Also ist $\bar{u}$ nilpotent. w.z.b.w.

Hieraus ergibt sich sofort das angekündigte Resultat:

KOROLLAR 2.4.1. *Jede innere Derivation von L ist nilpotent.*

BEWEIS. Seien x und z beliebige Elemente von L.
Für jedes $n \geqslant 2$ gilt dann

$$x(\operatorname{ad} z)^n = [x, z^{(n)}] = [x, z]\bar{z}^{n-1}.$$

Wegen der Nilpotenz von $\bar{z}$ ist dann für genügend großes n

$$x(\operatorname{ad} z)^n = 0 .$$

Da x und z beliebig waren, folgt die Behauptung.

Wir können jetzt Fall 2) behandeln. Zunächst zeigen wir

SATZ. 2.4.2. *Ist U Unteralgebra von L und $(U + L')/L'$ endlich erzeugbar, so ist $U + L'$ nilpotent.*

BEWEIS. Es existieren endlich viele Elemente $u_1, \ldots, u_n \in U$ mit

$$U + L' = (u_1, \ldots, u_n) + L' .$$

Dann muß es ein $i \in \mathrm{N}$ geben mit

$$U + L' = (u_1, \ldots, u_n) + L' \subseteq (z_1, \ldots, z_i) + L' .$$

Zum Beweis des Satzes genügt es dann, die Nilpotenz von $(z_1, \ldots, z_i) + L'$ nachzuweisen.
Wir setzen

$$k_0 = p^{n_i + \ldots + n_1} + 2$$

Weiter betrachten wir ein beliebiges Element

$$v = [v_1, \ldots, v_{k_0}] , \qquad v_k \in (z_1, \ldots, z_i) + L' \qquad \text{für } 1 \leqslant k \leqslant k_0 .$$

Von Interesse sind für uns lediglich die v_k mit $k > 2$.
Ist ein solches $v_k \in L'$, so ist $v = 0$, da L' abelsch ist. Es genügt also offenbar, solche v_k zu betrachten, die sich als Summen der Elemente $z_1, \ldots, z_i$ schreiben lassen.

Mit (2.4.1) erhält man nun

$$v = \sum_{j \geqslant 1} \alpha_j [v_1, v_2] \bar{z}_i^{k_j}, \qquad \alpha_j \in \mathbb{Z}_p, \ k_j \geqslant k_0 - 2 \text{ für alle } j \in \mathrm{N}$$

(2.4.1) liefert jetzt $v = 0$.

Also ist $(z_1, \ldots, z_i) + L'$ und damit $U + L'$ nilpotent von einer Klasse, die nicht größer als k_0 ist. w.z.b.w.

Natürlich ist $U + L' \subseteq| L$. Damit und mit Satz 1.1.1 folgt jetzt aus Satz 2.4.2 das gewünschte Resultat:

Satz 2.4.3. *Ist U Unteralgebra von L und $(U + L')/L' \neq 0$ endlich erzeugbar, so existieren endlich viele Unteralgebren $U_1, \ldots, U_n$ von L, $U_n = U + L'$,* mit

$$U \subseteq| U_1 \subseteq| \ldots \subseteq| U_n \subseteq| L .$$

In Fall 3) gilt der folgende

Satz 2.4.4. *Wenn U Unteralgebra von L und $(U + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, dann ist U Ideal von L.*

Beweis. Sei $U \subseteq L$ und $(U + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar.

Der Beweis wird in mehreren Schritten verlaufen.

Zunächst werden wir zeigen, daß $\mathfrak{I}(U) + L' = L$. Daraus erbigt sich dann $\mathfrak{I}(U) \cap L' \subseteq| L$ und schließlich $L' \subseteq \mathfrak{I}(U)$. Das liefert $\mathfrak{I}(U) = L$.

Die von den Abbildungen $\operatorname{ad} u$, $u \in U$, erzeugte Unteralgebra von A_L heiße V.

Wenn dann $\operatorname{ad} x \in V$ für ein $x \in L$, so folgt offenbar $x \in \mathfrak{I}(U)$. Sei nun $k \in \mathrm{N}$ beliebig vorgegeben.

Da $(U + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, existieren ein $i \geqslant k$ und ein Element

$$y = \alpha_i z_i + \ldots + \alpha_1 z_1 + w \in U , \qquad w \in L', \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbb{Z}_p , \qquad \alpha_i \neq 0$$

Vermöge (2.1.3) gilt

$$\operatorname{ad} y = \alpha_i \operatorname{ad} z_i + \ldots + \alpha_1 (\operatorname{ad} z_i)^{p^{n_i + \ldots + n_2}} + \operatorname{ad} v , \qquad v \in L'.$$

Da $(\operatorname{ad} y)^k \in V$ für alle $k \in \mathrm{N}$ und da $\operatorname{ad} y$ und $\operatorname{ad} z_i$ nach Korollar 2.4.1

nilpotent sind, erhält man mit (1.1.9) schließlich

$$\operatorname{ad} z_i + \operatorname{ad} v_i \in V \quad \text{mit } v_i \in L'$$

d.h.

$$u_i = z_i + v_i \in \mathfrak{J}(U)$$

Falls $i > k$ sein sollte, folgt nach (1.1.9) und (2.1.3)

$$(\operatorname{ad} u_i)^{p^{n_i+\dots+n_{k+1}}} = \operatorname{ad} z_k + \operatorname{ad} v_k \in V \quad \text{mit } v_k \in L'$$

d.h.

$$u_k = z_k + v_k \in \mathfrak{J}(U) .$$

Wir gelangen so zu der Erkenntnis, daß zu jedem $n \in \mathbf{N}$ ein Element

$$u_n = z_n + v_n \in \mathfrak{J}(U) , \quad v_n \in L'$$

existiert. Damit hat man

$$\mathfrak{J}(U) + L' = L .$$

Sei nun $x \in \mathfrak{J}(U) \cap L'$ beliebig.

Da L' kommutativ ist, folgt

$$x \operatorname{ad} z_n = x \operatorname{ad} u_n \in \mathfrak{J}(U) \cap L' \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}$$

Das aber bedeutet

$$\mathfrak{J}(U) \cap L' \trianglelefteq L$$

Sei nun ein $i \in \mathbf{N}$ beliebig vorgegeben. Es existiert ein $i_1 \in \mathbf{N}$ mit

$$v_i = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k [a, z_{i_1}^{(k)}] , \quad \gamma_k \in \mathbf{Z}_p .$$

Wir wählen ein $l > k_0$ beliebig aber fest.

Dann existiert ein $j \geqslant \max\{i + l, i_1\}$ mit

$$v_{i+1} = \sum_{k \geqslant 1} \delta_k [a, z_j^{(k)}] , \quad \delta_k \in \mathbf{Z}_p .$$

Wir betrachten das Element

$$q = [u_{i+l}, u_i] = [z_{i+l}, z_i] + [v_{i+l}, z_i] - [v_i, z_{i+l}] \in \Im(U) \cap L'.$$

Nach (2.1.3) besteht $[z_{i+l}, z_i]$ aus l verschiedenen Summanden der Form

$$[a, z_{i+l}^{(k)}] \qquad \text{mit } 1 \leqslant k \leqslant p^{n_{i+l}+\dots+n_{i+1}}$$

bzw.

$$[a, z_j^{(k)}] \qquad \text{mit } k \leqslant p^{n_j+\dots+n_{i+1}}.$$

Da $k_0 < l$, können nicht alle Summanden von $[z_{i+l}, z_i]$ durch die Sum manden von $[v_i, z_{i+l}]$ weggehoben werden.

$[v_{i+l}, z_i]$ setzt sich zusammen aus Summanden der Form

$$\left[a, z_j^{(k+p^{n_j+\dots+n_{i+1}})}\right],$$

d.h. die Summanden von $[z_{i+l}, z_i]$ und $[v_{i+l}, z_i]$ sind alle paarweise verschieden.

Aufgrund dieser Überlegungen kann man schreiben

$$q = \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k [a, z_j^{(k)}], \qquad \varepsilon_k \in \mathbf{Z}_p,$$

wobei $\varepsilon_{l_0} \neq 0$ für mindestens ein $l_0 \leqslant p^{n_j+\dots+n_{i+1}}$.

Da $\Im(U) \cap L' \trianglelefteq L$, folgt

$$q\,(\operatorname{ad} z_j)^k \in \Im(U) \qquad \text{für alle } k \in \mathbf{N},$$

und da $\operatorname{ad} z_j$ nilpotent ist, erhält man

$$[a, z_j^{(l_0)}] \in \Im(U)$$

und weiter

$$\left[a, z_j^{(p^{n_j+\dots+n_{i+1}})}\right] = [a, z_i] \in \Im(U).$$

Da i beliebig war, haben wir

$$[a, z_i] \in \Im(U) \qquad \text{für alle } i \in \mathbf{N}$$

Mit $\mathfrak{J}(U) \cap L' \subseteq| L$ ergibt sich

$$L' = \langle [a, z_i] | i \in \mathbf{N} \rangle \subseteq \mathfrak{J}(U) .$$

Ziehen wir $\mathfrak{J}(U) + L' = L$ heran, so erhalten wir

$$\mathfrak{J}(U) = L . \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Satz 2.4.1, 2.4.3 und 2.4.4 lassen sich zusammenfassen in

Satz 2.4.5. *Die in* II. § 1 *konstruierten Lie-Algebren erfüllen die Idealisatorbedingung.*

Satz 2.4.4 gestattet eine Verschärfung, die bei späteren Beweisen willkommene Vereinfachungen bringen wird.

Satz 2.4.6. *Wenn U Unteralgebra von L und $(U + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, dann gilt $L' \subseteq U$.*

Beweis. Sei $i \in \mathbf{N}$ beliebig vorgegeben. Da $(U + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, existiert ein $j > i$ mit

$$u_j = \alpha_j z_j + \ldots + \alpha_1 z_1 + w \in U , \qquad w \in L', \ \alpha_1, \ldots, \alpha_j \in \mathbb{Z}_p, \ \alpha_j \neq 0 .$$

Wegen $U \subseteq| L$ hat man dann $u = [a, z_j, u_j] \in U$.
(2.1.3) liefert

$$u = \alpha_j [a, z_j^{(2)}] + \alpha_{j-1} [a, z_j^{(p^{n_j}+1)}] + \ldots + \alpha_1 [a, z_j^{(p^{n_j}+\ldots+u_2+1)}] .$$

Da nach Korollar 2.4.1 ad z_j nilpotent ist, $[u, z_j^{(k)}] \in U$ für alle $k \in \mathbf{N}$ und $\alpha_j \neq 0$ vorausgesetzt wurde, erhalten wir

$$[a, z_j^{(2)}] \in U .$$

$U \subseteq| L$ zieht nun

$$[a, z_j^{(2)}, z_j^{(p^{n_j}+\ldots+n_{i+1}-2)}] = [a, z_i] \in U$$

nach sich.
Da i beliebig war, folgt die Behauptung.

Die Unteralgebren vom Typ 3) haben noch weitere wichtige Eigenschaften.

Zunächst gilt

LEMMA 2.4.2. *Wenn U Unteralgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar ist, dann ist A_L schon aus allen inneren Derivationen an u mit $u \in U$ erzeugbar.*

BEWEIS. Es genügt offenbar zu zeigen, daß für jedes $i \in \mathrm{N}$ die Derivation $\mathrm{ad}\, z_i$ durch Derivationen $\mathrm{ad}\, u$ mit $u \in U$ ausgedrückt werden kann.

Sei $i \in \mathrm{N}$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $j > i$ mit

$$z = \alpha_j z_j + \ldots + \alpha_1 z_1 \in U\,, \qquad \alpha_1, \ldots, \alpha_j \in \mathbb{Z}_p,\ \alpha_j = 1\,.$$

Nach (2.1.3) ist

$$\mathrm{ad}\, z = \mathrm{ad}\, z_j + \ldots + \alpha_1 (\mathrm{ad}\, z_j)^{p^{n_j + \ldots + n_2}} + \mathrm{ad}\, v\,, \qquad v \in L'.$$

Da $L' \subseteq U$, folgt $y = z - v \in U$.

$$\mathrm{ad}\, y = \mathrm{ad}\, z_j + \ldots + \alpha_1 (\mathrm{ad}\, z_j)^{p^{n_j + \ldots + n_2}}$$

läßt sich daher durch Derivationen $\mathrm{ad}\, u$ mit $u \in U$ ausdrücken.

Da $\mathrm{ad}\, y$ nach Korollar 2.4.1 nilpotent ist, kann man $\mathrm{ad}\, z_j$ jetzt als Summe von Potenzen von $\mathrm{ad}\, y$ schreiben:

$$\mathrm{ad}\, z_j = \sum_{k \geq 1} \beta_k (\mathrm{ad}\, y)^k, \qquad \beta_k \in \mathbb{Z}_p\,.$$

Daher liegt auch $\mathrm{ad}\, z_j$ in der von den $\mathrm{ad}\, u$, $u \in U$, erzeugten Unteralgebra von A_L.

Nach (2.1.3) ist

$$\mathrm{ad}\, z_i = (\mathrm{ad}\, z_j)^{p^{n_j + \ldots + n_{i+1}}} - \mathrm{ad}\, w\,, \qquad w \in L' \subseteq U\,.$$

Diese Beziehung liefert den Abschluß des Beweises.

Eine unmittelbar einsichtige Konsequenz aus Lemma 2.4.2 ist

SATZ 2.4.7. *Sei U Unteralgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar. Ferner sei X ein Ideal von U. Dann ist X auch Ideal von L.*

Weiter können wir Lemma 2.4.2 verwenden, um zwei Sätze zu beweisen, die wir später noch benötigen werden.

Satz 2.4.8. *Sei Unteralgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar. Dann ist $U'=L'$.*

Beweis. Wir haben zu zeigen, daß $[a, z_i] \in U'$ für alle $i \in \mathrm{N}$. Nach Lemma 2.4.2 gilt dann für das Ideal $L' = \langle [a, z_1], [a, z_2], \ldots \rangle$ von L sicher $L' \subseteq U'$. Da ohnehin $U' \subseteq L'$, wäre die Behauptung gezeigt.

Sei also $i \in \mathrm{N}$ beliebig vorgegeben.

Wegen $L' \subseteq U$ gilt $[a, z_{i+1}] \in U$.

Weiter kann man nach Lemma 2.4.2 $(\mathrm{ad}\, z_{i+1})^{p^{n_{i+1}-1}}$ durch Derivationen $\mathrm{ad}\, u$, $u \in U$, ausdrücken.

Wir haben dann:

$$[a, z_i] = [a, z_{i+1}](\mathrm{ad}\, z_{i+1})^{p^{n_{i+1}-1}} \in U' \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Satz 2.4.9. *Sei U Unteralgebra von L und $(U+L')/L'$ nicht endlich erzeugbar. Dann ist $\mathfrak{Z}(U)=0$.*

Beweis. Seien $x \in L$ und $z \in \mathfrak{Z}(U)$ beliebig.

Nach Lemma 2.4.2 ist $\mathrm{ad}\, x$ durch Derivationen $\mathrm{ad}\, u$, $u \in U$, ausdrückbar.

Damit ergibt sich

$$[z, x] = z\, \mathrm{ad}\, x = 0 \,.$$

D.h.

$$z \in \mathfrak{Z}(L) \,.$$

Da $\mathfrak{Z}(L)=0$ ist, folgt $z=0$ und da z beliebig war

$$\mathfrak{Z}(U) = 0 \,. \qquad \text{w.z.b.w.}$$

III. – ISOMORPHIEBETRACHTUNGEN

1. Isomorphie der konstruierten Lie-Algebren.

Alle in diesem Paragraphen betrachteten Algebren sollen denselben Skalarenkörper $\mathbb{Z}_p$ haben.

In II. wurde jeder Folge natürlicher Zahlen eine Lie-Algebra über $\mathbb{Z}_p$ zugeordnet. Dabei ist es natürlich sehr wichtig zu wissen, «wieviel» wesentlich verschiedene Lie-Algebren man auf diese Weise erhalten hat, d.h. unter welchen Voraussetzungen zwei der erhaltenen Lie-Algebren isomorph sind.

Da die Glieder der definierenden Folgen die definierenden Relationen entscheidend bestimmen und diese wiederum die Ordnungen der inneren Derivationen festlegen, kann man hoffen, die Isomorphiefrage dadurch zu lösen, daß man die Ordnungen der inneren Derivationen bestimmt. Für isomorphe Lie-Algebren müssen die Mengen dieser Ordnungen ja gleich sein.

Sei also L durch die Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ definiert.

Sehr leicht ist die Frage für Elemente aus L' beantworten. Sei $g \in L'$, $g \neq 0$.

Da $\mathfrak{Z}(L) = 0$, ist $\operatorname{ord}(\operatorname{ad} g) > 1$.

Da L' kommutativ ist, $\operatorname{ord}(\operatorname{ad} g) \leqslant 2$.

Insgesamt gilt also $\operatorname{ord}(\operatorname{ad} g) = 2$.

Schwieriger ist die Frage für die übrigen Elemente von L. Wir betrachten ein Element

$$y = \varepsilon_i z_i + \ldots + \varepsilon_1 z_1 + w \in L\,, \qquad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i \in \mathbb{Z}_p,\ \varepsilon_i \neq 0,\ w \in L'.$$

Offensichtlich ist $\operatorname{ord}(\operatorname{ad} y) = \operatorname{ord}(\operatorname{ad} \varepsilon_i^{-1} y)$. Wir können also den Koeffizienten von z_i zu 1 normieren, d.h. wir können von vornherein annehmen, daß $\varepsilon_i = 1$ ist.

Zunächst sei $i > 1$. Wegen (2.4.1) ergibt sich schnell

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} y) \leqslant p^{n_i + \ldots + n_2}(p^{n_1} - 1) + 1\,. \tag{3.1.1}$$

Wir setzen zur Abkürzung $\omega_i = p^{n_i + \ldots + n_2}(p^{n_1} - 1) + 1$, $i \in \mathbb{N}$.

Wir werden sehen, daß $\operatorname{ord}(\operatorname{ad} y)$ tatsächlich gleich der angegebenen Schranke ist.

Nach (2.3.1) existiert ein $j > i$, $j \in \mathbb{N}$, mit

$$\operatorname{ad} y = (\operatorname{ad} z_j)^{p^{n_j + \ldots + n_{i+1}}} + \ldots + \varepsilon_1 (\operatorname{ad} z_j)^{p^{n_j + \ldots + n_2}} + \sum_{r \geqslant 1} \alpha_r \operatorname{ad}[a, z_j^{(r)}]\,, \qquad \alpha_r \in \mathbb{Z}_p\,.$$

Die nähere Untersuchung zeigt, daß z.B. für alle $i \in \mathbb{N}$

$$[z_{i+1}, z_i^{(\omega_i - 1)}] = 0 \qquad \text{aber} \qquad [z_{i+2}, z_i^{(\omega_i - 1)}] \neq 0\,,$$

also in der Tat $\operatorname{ord}(\operatorname{ad} z_i) = \omega_i$ ist.

Deshalb drücken wir auch $\operatorname{ad} y$ in Abhängigkeit von z_{j+2} aus. Das geht wieder vermöge (2.1.3). Im einzelnen ist:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ad} z_j)^{p^{n_j+\dots+n_{i+1}}} &= \Big((\operatorname{ad} z_{j+2})^{p^{n_{j+2}+n_{j+1}}} - \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+n_{j+1}}-p^{n_{j+2}})}\big] - \\
&\qquad - \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+n_{j+1}}-1)}\big]\Big)^{p^{n_j+\dots+n_{i+1}}} = \\
&= (\operatorname{ad} z_{j+2})^{p^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}}} - \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}}-p^{n_{j+2}})}\big] - \\
&\qquad - \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}}-1)}\big] \\
&\ \vdots \\
(\operatorname{ad} z_j)^{p^{n_j+\dots+n_2}} &= (\operatorname{ad} z_{j+2})^{p^{n_{j+2}+\dots+n_2}} - \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_2}-p^{n_{j+2}})}\big] - \\
&\qquad - \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_2}-1)}\big]
\end{aligned}
$$

$$\sum_{r\geqslant 1} \alpha_r \operatorname{ad}[a, z_j^{(r)}] = \sum_{r\geqslant 1} \alpha_r \operatorname{ad}\big[a, z_{j+2}^{(rp^{n_{j+2}+n_{j+1}})}\big].$$

Ziel ist es jetzt, zu zeigen, daß $[z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] \neq 0$ ist.

Dazu rechnen wir zunächst $(\operatorname{ad} y)^{\omega_i-1}$ aus.

Bei genauer Durchrechnung ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ad} y)^{\omega_i-1} &= \sum_{r\geqslant 1} \beta_r (\operatorname{ad} z_{j+2})^{rp^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}}} - \\
&\qquad - \sum_{r\geqslant 0} \gamma_r \operatorname{ad}[a, z_{j+2}^{(\varrho(r))}] + \sum_{s\geqslant 1}\sum_{t\geqslant 0} \delta_{s,t} \operatorname{ad}[a, z_{j+2}^{(\sigma(s,t))}].
\end{aligned}
$$

Dabei ist im einzelnen:

$$
\begin{aligned}
&\beta_r, \quad \gamma_r, \quad \delta_{s,t} \in \mathbf{Z}_p, \\
&\varrho(r) = p^{n_{j+2}+\dots+n_2}(p^{n_1}-1) - p^{n_{j+2}} + r, \qquad r \in \mathbf{N}_0, \\
&\sigma(s,t) = sp^{n_{j+2}+n_{j+1}} + tp^{n_{j+2}+\dots+n_{i+1}}, \qquad s \in \mathbf{N},\ t \in \mathbf{N}_0.
\end{aligned}
$$

Speziell für γ_0 erhält man $\gamma_0 = 1$.

Damit hat man

$$z_{j+2}(\operatorname{ad} y)^{\omega_i-1} = \sum_{r\geqslant 0} \gamma_r [a, z_{j+2}^{(\varrho(r)+1)}] - \sum_{s\geqslant 1}\sum_{t\geqslant 0} \delta_{s,t}[a, z_{j+2}^{(\sigma(s,t)+1)}].$$

Wichtig ist für uns der Term

$$\gamma_0[a, z_{j+2}^{(\varrho(0)+1)}].$$

Auf Grund der definierenden Relationen ist

$$[a, z_{j+2}^{(\varrho(0)+1)}] = [a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_2(p^{n_1}-1)}-p^{n_{j+1}}+1)}] \neq 0 .$$

Ferner ist $\varrho(0)+1 \neq \sigma(s, t)+1$ für alle in Frage kommenden r, s, t. Dies folgt so:

Es ist

$$\varrho(0) \equiv p^{n_{j+2}}(p^{n_{j+1}}-1)(p^{n_{j+2}+n_{j+1}}) ,$$

$$\sigma(s, t) \equiv 0(p^{n_{j+2}+n_{j+1}}) \qquad \text{für all } s, t ,$$

also

$$\varrho(0) \not\equiv \sigma(s, t)(p^{n_{j+2}+n_{j+1}}) \qquad \text{für alle } s, t .$$

Also ist insbesondere $\varrho(0) \neq \sigma(s, t)$ für alle s, t.

Wir können daher auch schreiben

$$[z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] = \gamma_0[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2}+\dots+n_2(p^{n_1}-1)}-p^{n_{j+2}}+1)}] + \\ + \sum_{r=1}^{\varrho(0)} \mu_r[a, z_{j+2}^{(r)}] + \sum_{r \geqslant \varrho(0)+2} \mu_r[a, z_{j+2}^{(r)}] , \qquad \mu_r \in \mathbb{Z}_p .$$

Nach Lemma 2.2.1 sind die Elemente $[a, z_{j+2}^{(r)}] \neq 0$ linear unabhängig.

Wäre daher $[z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] = 0$, so folgte $\gamma_0 = 0$ wegen

$$[a, z_{j+2}^{(\varrho(0)+1)}] \neq 0 .$$

Da aber $\gamma_0 = 1$ ist, hat man

$$[z_{j+2}, y^{(\omega_i-1)}] \neq 0 ,$$

(3.1.2) d.h.

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} y) > \omega_i - 1$$

(3.1.1) und (3.1.2) ergeben zusammen

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} y) = \omega_i$$

Abschließend sei noch der Fall $i = 1$ behandelt.

Sei

$$z = z_1 + v \in L\,, \qquad v \in L'\,.$$

(O.B.d.A. ist der Koeffizient von z_1 wieder 1.)

Wir setzen

$$\omega_1 = p^{n_1}\,.$$

(2.4.1) liefert

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} z) \leqslant \omega_1 \tag{3.1.3}$$

Wie im Fall $i > 1$ existiert ein $j \in \mathbb{N}$, $j > 1$, mit

$$\operatorname{ad} z = (\operatorname{ad} z_j)^{p^{n_j + \dots + n_2}} + \sum_{r \geqslant 1} \zeta_r [a, z_j^{(r)}]\,, \qquad \zeta_r \in \mathbb{Z}_p\,,$$

$$(\operatorname{ad} z_j)^{p^{n_j + \dots + n_2}} = (\operatorname{ad} z_{j+2})^{p^{n_{j+2} + \dots + n_2}} - \operatorname{ad}\left[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_2} - p^{n_{j+2}})}\right] - \\ - \operatorname{ad}\left[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_2} - 1)}\right]$$

$$\sum_{r \geqslant 1} \zeta_r \operatorname{ad}[a, z_j^{(r)}] = \sum_{r \geqslant 1} \zeta_r \operatorname{ad}\left[a, z_{j+2}^{(r p^{n_{j+2} + n_{j+1}})}\right],$$

$$(\operatorname{ad} z)^{\omega_1 - 1} = (\operatorname{ad} z_{j+2})^{p^{n_{j+2} + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1)}} - \operatorname{ad}\left[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1)} - p^{n_{j+2}})}\right] - \\ - \operatorname{ad}\left[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1)} - 1)}\right] + \sum_{r \geqslant 1} \zeta_r \operatorname{ad}\left[a, z_{j+2}^{(r p^{n_{j+2} + n_{j+1}} + p^{n_{j+2} + \dots + n_2 (p^{n_1} - 2)})}\right].$$

Genau wie im Fall $i > 1$ ergibt sich wieder wegen

$$\left[a, z_{j+2}^{(p^{n_{j+2} + \dots + n_2 (p^{n_1} - 1)} - p^{n_{j+2}} + 1)}\right] \neq 0\,,$$

$$z_{j+2} (\operatorname{ad} z)^{\omega_1 - 1} \neq 0\,.$$

D.h.

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} z) > \omega_1 - 1 \tag{3.1.4}$$

(3.1.3) und (3.1.4) liefern

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} z) = \omega_1\,.$$

Wir wollen diese Ergebnisse zusammenfassen in

SATZ 3.1.1. *Sei L durch die Folge $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ definiert. Sei ferner*

$$\omega_i = p^{n_i+\dots+n_2}(p^{n_1}-1)+1 \qquad i\in\mathbf{N}\,,\ i>1$$
$$\omega_1 = p^{n_1}.$$

Dann gilt für ein Element

$$y=\alpha_i z_i+\dots+\alpha_1 z_1+u\in L\,,\qquad \alpha_1,\dots,\alpha_i\in\mathbf{Z}_p\,,\qquad \alpha_i\neq 0\,,\qquad u\in L'$$
$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} y)=\omega_i\,.$$

Für ein Element $v\in L'$, $v\neq 0$, gilt

$$\operatorname{ord}(\operatorname{ad} v)=2\,.$$

Damit läßt sich nun die Isomorphiefrage ganz leicht beantworten. Es gilt

SATZ 3.1.2. *Seien zwei Lie-Algebren L_1 und L_2 durch die Folgen $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ und $\{m_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ definiert. Dann ist $L_1\cong L_2$ genau dann, wenn die definierenden Folgen gleich sind.*

BEWEIS. Es sei $L_1\cong L_2$. Die Menge aller Ordnungen von inneren Derivationen von L_1 ist $\{1, 2, \omega_1, \omega_2, \dots\}$ mit $2<\omega_1<\omega_2<\dots$, die der inneren Derivationen von L_2 ist $\{1, 2, \bar\omega_1, \bar\omega_2, \dots\}$ mit $2<\bar\omega_1<\bar\omega_2<\dots$.

Beide Mengen müssen gleich sein. Das bedeutet

$$\omega_i=\bar\omega_i \qquad \text{für alle } i\in\mathbf{N}$$

oder $p^{n_i+\dots+n_2}(p^{n_1}-1)=p^{m_i+\dots+m_2}(p^{m_1}-1) \qquad$ für alle $i\in\mathbf{N}$, $i>1$

$$p^{n_1}=p^{m_1}.$$

Durch Induktion folgt hieraus unmittelbar

$$n_i=m_i \qquad \text{für alle } i\in\mathbf{N}\,.$$

Daß gleiche Folgen isomorphe Algebren definieren, ist klar. Damit ist der Satz bewiesen.

Mit diesem letzten Satz ist nunmehr sichergestellt, daß die von uns definierten Lie-Algebren tatsächlich alle wesentlich voneinander verschieden sind.

Wir zeigen schließlich noch einen Satz, der im nächsten Paragraphen wertvolle Hilfe leisten wird.

SATZ 3.1.3. *Die Lie-Algebren* L_1 *und* L *seien nach* II. § 1 *durch die Folgen* $\{n_i\}_{i\in \mathrm{N}}$ *und* $\{n_{c+i}\}_{i\in \mathrm{N}}$, $c\in \mathrm{N}_0$, *definiert. Dann existiert ein Ideal* $X_1 \subseteq| L_1$ *mit*

$$L_1/X_1 \cong L\,.$$

BEWEIS. L_1 werde von den Elementen z_i erzeugt, L von den Elementen y_i. An die Stelle des Elementes a bei der Definition von L_1 trete bei der Definition von L das Element b.

Sei

$$X_1 = \langle [a, z_{c+1}^{(p^{n_{c+1}}-1)}],\ z_j \,|\, j\in \mathrm{N},\ j\leqslant c\rangle \subseteq| L_1\,.$$

Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon L_1/X_1 \to L$ folgendermaßen:

$$\Big(\sum_{i\geqslant 1}\alpha_i z_{c+i} + \sum_{k\geqslant 1}\beta_k[a, z_{c+i_k}^{(l_k)}] + X_1\Big)\varphi =$$
$$= \sum_{i\geqslant 1}\alpha_i y_i + \sum_{k\geqslant 1}\beta_k[b, y_{i_k}^{(l_k)}] \qquad \alpha_i, \beta_k \in \mathbf{Z}_p,\ i_k, l_k \in \mathrm{N}\,.$$

Wir wollen zeigen, daß φ ein Isomorphismus ist.

Zunächst zeigen wir, daß φ eine Bijektion ist.

Es ist $[b, y_{i_k}^{(l_k)}] = 0$ genau dann, wenn

$$l_k \geqslant p^{n_{c+i_k}+\dots+n_{c+2}}(p^{n_{c+1}}-1)\,,$$

$$[a, z_{c+i_k}^{(l_k)}] + X_1 = 0 + X_1 \qquad \text{genau dann, wenn}$$

$$l_k \geqslant p^{n_{c+i_k}+\dots+n_{c+2}}(p^{n_{c+1}}-1)\,.$$

Ferner ist $z_j + X_1 = 0 + X_1$ für $j\leqslant c$.

Damit ist die Injektivität von φ nachgewiesen. Die Surjektivität ist auf Grund der Definition von φ trivial.

Es bleibt noch zu zeigen, daß φ ein Homomorphismus ist.

Die Linearität von φ ist offensichtlich.

Da L_1/X_1 von den Elementen $z_{c+i} + X_1$ erzeugt werden kann, genügt es zur Vervollständigung des Beweises zu zeigen, daß

$$\begin{aligned}([z_{c+i_1}, z_{c+i_2}] + X_1)\varphi = [(z_{c+i_1} + X_1)\varphi, (z_{c+i_2} + X_1)\varphi] = \\ = [y_{i_1}, y_{i_2}] \quad \text{für alle } i_1, i_2 \in \mathbf{N}\,.\end{aligned}$$

Betrachtet man die Beziehung (2.1.3), die definierenden Folgen von L_1 und L, sowie die Definition von φ, so ist diese gewünschte Eigenschaft von φ sofort zu verifizieren.

Satz 3.1.3 ist damit bewiesen.

2. Direkte Produkte von Lie-Algebren.

Wieder sei generell vorausgesetz, daß alle in diesem Paragraphen behandelten Algebren denselben Skalarenkörper $\mathbb{Z}_p$ haben.

Ehe wir uns dem eigentlichen Ziel zuwenden, wollen wir eine Definition treffen, die uns viele Formulierungen erleichtern wird.

L sei eine beliebige in II. § 1 definierte Lie-Algebra über $\mathbb{Z}_p$ mit der definierenden Folge $\{n_i\}_{i\in\mathbf{N}}$. X sei ein Ideal von L.

Unser Ziel ist es, in $(L/X)'$ eine Ordnungsrelation einzuführen.

Sei $h_1 + X$, $h_2 + X \in (L/X)'$ beide Elemente ungleich $0 + X$. Dann existieren Zahlen $j, k_1, k_2 \in \mathbf{N}$ mit

$$h_1 + X = \sum_{i\geqslant 0} \alpha_i[a, z_j^{(k_1+i)}] + X\,, \qquad \alpha_i \in \mathbb{Z}_p,\ \alpha_0 \neq 0\,,$$

$$h_2 + X = \sum_{i\geqslant 0} \beta_i[a, z_j^{(k_2+i)}] + X\,, \qquad \beta_i \in \mathbb{Z}_p,\ \beta_0 \neq 0\,.$$

Wir schreiben dann

$$h_1 + X \sqsubseteq h_2 + X \text{ genau dann}, \quad \text{wenn } k_1 \leqslant k_2\,,$$

$$h_1 + X \sqsubset h_2 + X \text{ genau dann}, \quad \text{wenn } k_1 < k_2\,,$$

$$h_1 + X \sim h_2 + X \text{ genau dann}, \quad \text{wenn } k_1 = k_2\,.$$

Wegen

$$[a, z_j^{(k+i)}] = \left[a, z_{j+l}^{(p^{n_{j+1}+\cdots+n_{j+l}}(k+i))}\right]$$

hängen diese Definitionen nicht von der speziellen Wahl von j ab und sind darum erst sinnvoll.

Wenn wir überdies noch setzen

$$h + X \sqsubseteq 0 + X \qquad \text{für alle } h + X \in (L/X)'$$

bzw.

$$h + X \sqsubset 0 + X\,, \qquad \text{falls } h + X \neq 0 + X\,,$$

wird durch « $\sqsubseteq$ » in $(L/X)'$ eine Totalordnung definiert. «$\sqsubset$» definiert die zugehörige strikte Ordnung.

Folgende Eigenschaften ergeben sich unmittelbar aus der Definition der Ordnungsrelation:

Wenn $h_1 + X$, $h_2 + X \in (L/X)'$, $h_1 + X \sqsubseteq h_2 + X$, $u + X \in L/X$, dann ist

$$\begin{array}{ll}
h_1 + X \sqsubseteq [h_1, u] + X & \\
[h_1, u] + X \sqsubseteq [h_2, u] + X & \\
h_1 + X \sqsubset [h_1, u] + X & \text{falls } h_1 + X \neq 0 + X \\
[h_1, u] + X \sqsubset [h_2, u] + X & \text{falls } [h_1, u] + X \neq 0 + X \\
 & \text{und } h_1 + X \sqsubset h_2 + X \\
h_1 + h_2 + X \sim h_1 + X & \text{falls } h_1 + X \sqsubset h_2 + X \\
[h_1, u] + X \sim [h_2, u] + X & \text{falls } h_1 + X \sim h_2 + X
\end{array}$$

Wie die Struktur des Verbandes der Hauptideale von L/X, die in $(L/X)'$ liegen, mit der eben definierten Ordungsrelation zusammenhängt, zeigt

Lemma 3.2.1. *Seien $u + X$, $v + X \in (L/X)'$ beliebig. Dann ist*

$$\begin{array}{ll}
\langle u + X\rangle \subseteq \langle v + X\rangle \text{ genau dann}\,, & \text{wenn } u + X \sqsupseteq v + X\,, \\
\langle u + X\rangle \subset \langle v + X\rangle \text{ genau dann}\,, & \text{wenn } u + X \sqsupset v + X\,, \\
\langle u + X\rangle = \langle v + X\rangle \text{ genau dann}\,, & \text{wenn } u + X \sim v + X\,.
\end{array}$$

Die Beweise für diese Beziehungen sind an der Definition der Ordnung unmittelbar abzulesen.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir uns der Frage zuwenden, wann direkte Produkte der konstruierten Lie-Algebren ebenfalls den gestellten Forderungen genügen.

Die Zentrumsfreiheit und die Kommutativität der Kommutatoralgebra vererben sich offensichtlich auf die direkten Produkte. Schwieriger ist die Frage nach Erfüllung der Idealisatorbedingung zu beantworten.

In I.§ 2 haben wir gesehn, daß das direkte Produkt zweier Lie-Algebren genau dann ungeeignet ist, wenn die Algebren Unteralgebren mit isomorphen Faktoralgebren ungleich 0 und Zentrum 0 haben.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann zwei der konstruierten Lie-Algebren diese Eigenschaft haben.

Zunächst zeigen wir

Lemma 3.2.2. *L sei die nach* II.§ 1 *durch die Folge* $\{n_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ *definierte Lie-Algebra. U sei Unteralgebra von L, X Ideal von U mit*

$$U/X \neq 0\,, \qquad \mathfrak{Z}(U/X) = 0$$

Sei

$$u + X = \alpha_i z_i + \ldots + \alpha_1 z_1 + u' + X \in U/X\,,$$

$$\alpha_i, \ldots, \alpha_1 \in \mathbf{Z}_p,\ \alpha_i \neq 0,\ u' \in L'$$

$$v + X = \beta_j z_j + \ldots + \beta_1 z_1 + v' + X \in U/X\,,$$

$$\beta_j, \ldots, \beta_1 \in \mathbf{Z}_p,\ \beta_j \neq 0,\ v' \in L'$$

mit

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(u + X) \geqslant 2\,.$$

Dann ist

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(v + X) < \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(u + X)$$

genau dann, wenn

$$j < i\,.$$

Beweis. In II. § 4 wurden drei Typen von Unteralgebra unterschieden. U muß vom Typ 3) sein, da Unteralgebren vom Typ 1) oder 2) nilpotent sind und daher keine Faktoralgebren ungleich 0 mit Zentrum 0 besitzen können.

X kann wiederum nicht vom Typ 3) sein, da dann nach Satz 2.4.6 und Satz 2.4.8 gelten würde $U' = L' \subseteq X$. U/X wäre demnach kommutativ.

Also ist X vom Typ 1) oder 2).

Da $X \subseteq| U$, gilt $X \subseteq| L$ nach Satz 2.4.7.

Wir wollen das benutzen, um näheren Aufschluß über X zu erhalten.

Zunächst sei der Fall betrachtet, daß ein Element der Form

$$x = \varrho_k z_k + \dots + \varrho_1 z_1 + x' \in X , \qquad x' \in L', \ \varrho_k, \dots, \varrho_1 \in \mathbb{Z}_p, \ \varrho_k \neq 0$$

existiert. Dann existiert ein $c \in \mathbf{N}_0$ mit

$$x = \varrho_k z_k + \dots + \varrho_1 z_1 + \sum_{n \geqslant 1} \sigma_n [a, z_{k+c}^{(n)}] , \qquad \sigma_n \in \mathbb{Z}_p .$$

Sei $l \in \mathbf{N}$ so gewählt, daß $l \geqslant c + 1$.

Wegen $X \subseteq| L$ ist dann $[z_{k+l}, x] \in X$.

Berechnet man mit (2.1.3) den Term $[z_{k+l}, x]$ explizit, so erhält man

$$[z_{k+l}, x] = \sum_{r \geqslant r_0} \gamma_r [a, z_{k+l}^{(r)}] , \qquad \gamma_r \in \mathbb{Z}_p$$

wobei $r_0 \leqslant p^{n_{k+l}+\dots+n_{k+1}}$ und $\gamma_{r_0} \neq 0$ ist.

Durch wiederholtes Anwenden der nilpotenten Abbildung ad z_{k+l} erhält man zunächst

$$[a, z_{k+l}^{(r_0)}] \in X ,$$

Da $r_0 \leqslant p^{n_{k+l}+\dots+n_{k+1}}$, folgt weiter

$$[a, z_{k+l}^{(p^{n_{k+l}+\dots+n_{k+1}})}] = [a, z_k] \in X .$$

Daraus ergibt sich sofort

$$[a, z_\varkappa] \in X \qquad \text{für alle } \varkappa \leqslant k .$$

Da, wie wir schon sahen, $L' \subseteq X$ nicht sein darf kann auch nicht $[a, z_r] \in X$ für alle $r \in \mathbf{N}$ gelten.

Es existiert daher ein $i_0 \in \mathbf{N}$ derart, daß $[a, z_r] \in X$ genau dann, wenn $r < i_0$.

Ferner folgt dann aus

$$\delta_r z_r + \ldots + \delta_1 z_1 + d \in X\,, \qquad d \in L',\ \delta_1, \ldots, \delta_r \in \mathbf{Z}_p,\ \delta_r \neq 0$$

stets $r < i_0$.

Damit läßt sich der Durchschnitt $X \cap L' = X \cap U'$ folgendermaßen charakterisieren:

Es existiert eine Folge $\{k_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ natürlicher Zahlem mit

$$\begin{aligned} &k_i = 1 && \text{für } i < i_0 \\ &2 \leqslant k_{i_0} \leqslant p^{n_{i_0}} && \\ &(k_i - 1)p^{n_{i+1}} + 1 \leqslant k_{i+1} \leqslant k_i p^{n_{i+1}} && \text{für } i \geqslant i_0 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

derart, daß für alle $i \in \mathbf{N}$ genau dann $[a, z_i^{(n)}] \in X$, wenn $n \geqslant k_i$.

Zur letzten Bedingung von (3.2.1) ist äquivalent:

$$(k_i - 1)p^{n_j + \ldots + n_{i+1}} + 1 \leqslant k_j \leqslant k_i p^{n_j + \ldots + n_{i+1}} \tag{3.2.2}$$

$$\text{für alle } i, j \in \mathbf{N} \text{ mit } i_0 \leqslant i < j\,.$$

Sei nun ein beliebiges Element der Form

$$w + X = \gamma_r z_r + \ldots + \gamma_1 z_1 + w' + X \in U/X\,,$$

$$\gamma_r, \ldots, \gamma_1 \in \mathbf{Z}_p,\ \gamma_r \neq 0,\ w' \in L'$$

gegeben.

Wir wollen die Ordnung der Abbildung $\operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(w + X)$ abschätzen.

Stets ist 1 eine untere Schranke der Ordnungen.

Man rechnet sofort nach, daß gilt:

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(w + X) \leqslant k_r\,.$$

Für $r < i_0$ folgt daraus

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(w + X) = 1\,. \tag{3.2.3}$$

Ist $k_r > 2$, so erhält man rasch

$$[[a, z_r] + X, (w + X)^{(k_r-2)}] = \gamma_r [a, z_r^{(k_r-1)}] + X \neq 0 + X .$$

Das führt zu

$$(3.2.4) \qquad k_r - 1 \leqslant \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(w + X) \leqslant k_r \quad \text{für alle } r \geqslant i_0 .$$

Sei nun

$$O_i = \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(u + X) ,$$
$$O_j = \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X')} \operatorname{ad}(v + X)$$

Da nach Voraussetzung $O_i \geqslant 2$, ist auf jeden Fall $i_0 \leqslant i$.

Wir zeigen zuerst die eine Richtung der Behauptung des Lemmas. Sei $j < i$.

Es werden 2 Fälle unterschieden.

a) $i_0 = i$: Dann ist wegen $j < i$ notwendig $k_j = 1$ und $O_j = 1$. Also

$$O_i - O_j \geqslant 2 - 1 = 1 > 0.$$

b) $i_0 < i$: Wegen (3.2.1) und (3.2.2) ist dann $k_i > 2$. Mit (3.2.4) erhält man so

$$O_i - O_j \geqslant k_i - 1 - k_j \geqslant k_i - 1 - (k_i - 1) p^{-(n_i + \dots + n_{j+1})} - 1 =$$
$$= (k_i - 1)(1 - p^{-(n_i + \dots + n_{j+1})}) - 1 .$$

Generelle Voraussetzung ist $p > 2$, also $1 - p^{-(n_i + \dots + n_{j+1})} > \frac{1}{2}$. Daher

$$O_i - O_j > 2 \cdot \tfrac{1}{2} - 1 = 0 .$$

Man rechnet leicht nach, daß

$$O_i = \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(z_i + X) ,$$
$$O_j = \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{(U/X)'} \operatorname{ad}(z_j + X) .$$

Daraus ergibt sich für $i = j$ sofort $O_i = O_j$.

Wir betrachten den letzten Fall: $i<j$.
Hier ergibt sich

$$O_j - O_i \geqslant k_j - 1 - k_i \geqslant (k_i - 1)p^{n_j + \dots + n_{i+1}} + 1 - k_i >$$
$$> (k_i - 1)2 + 1 - k_i = k_i - 1 \geqslant k_{i_0} - 1 > 0 .$$

Damit ist Lemma 3.2.2 bewiesen.

Weiter werden wir benötigen

Lemma 3.2.3. *L_1 und L_2 seien in* II. § 1 *konstruierte Lie-Algebren mit den definierenden Folgen $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. (Zur Definition mögen bei L_1 die Elemente a, z_i, $i\in\mathbb{N}$, dienen bei L_2 die Elemente b, y_i, $i\in\mathbb{N}$).*

Für $i=1,2$ sei U_i Unteralgebra von L_i, X_i Ideal von U_i derart, daß die U_i Unteralgebran vom Typ 3) *sind und*

$$U_1/X_1 \cong U_2/X_2 .$$

(Der Isomorphismus $U_1/X_1 \to U_2/X_2$ heiße σ.)
Ferner seien Elemente

$$u + X_1 = \alpha_i z_i + \dots + \alpha_1 z_1 + u' + X_1 \in U_1/X_1 ,$$
$$\alpha_i, \dots, \alpha_1 \in \mathbb{Z}_p,\ \alpha_i \neq 0,\ u' \in U_1'$$

$$v + X_2 = \beta_j y_j + \dots + \beta_1 y_1 + v' + X_2 \in U_2/X_2 ,$$
$$\beta_j, \dots, \beta_1 \in \mathbb{Z}_p,\ \beta_j \neq 0,\ v' \in U_2'$$

gegeben mit

$$(u + X_1)\sigma = v + X_2$$
$$[a, z_i] \notin X_1 , \qquad [b, y_j] \notin X_2$$

Dann gilt

$$([a, z_i] + X_1)\sigma \sim [b, y_j] + X_2 .$$

Beweis. Nach Satz 2.4.8 ist $U_1' = L_1'$ und $U_2' = L_2'$, d.h. $(U_1/X_1)' = (L_1/X_1)'$ und $(U_2/X_2)' = (L_2/X_2)'$.

Wir betrachten nun die Mengen

$$I_1 = (U_1/X_1)' \operatorname{ad}(u + X_1) ,$$
$$J_1 = (U_2/X_2)' \operatorname{ad}(v + X_2) .$$

Aus der Kommutativität von $(U_1/X_1)'$ und $(U_2/X_2)'$ folgt, daß die Mengen I_1 und J_1 Ideale von U_1/X_1 bzw. U_2/X_2 sind, für die überdies gilt

$$I_1\sigma = J_1 .$$

Da $[a, z_i] \notin$ d.h. $[a, z_i] + X_1 \neq 0 + X_1$, folgt:

I_1 besteht aus genau denjenigen Elementen $h_1 + X_1 \in (U_1/X_1)'$, für die gilt

$$[a, z_i] + X_1 \sqsubset h_1 + X_1 .$$

Sei weiter J ein beliebiges Ideal von U_1/X_1 mit

$$I_1 \subset I \subseteq (U_1/X_1)' .$$

Es muß dann ein $h + X_1 \in I$ existieren mit

$$[a, z_i] + X_1 \sqsupseteq h + X_1 .$$

Dann aber folgt auch

$$[a, z_i] + X_1 \in I ,$$

bzw.

$$\langle [a, z_i] + X_1 \rangle \subseteq I .$$

Da auch

$$I_1 \subset \langle [a, z_i] + X_1 \rangle$$

erhalten wir

$$\bigcap_{\substack{I_1 \subset I \subseteq (U_1/X_1)' \\ I \,\underline{\cap}\, | \, U_1/X_1}} I = \langle [a, z_i] + X_1 \rangle .$$

Analog gilt

$$\bigcap_{\substack{J_1 \subset J \subseteq (U_2/X_2)' \\ J \,\underline{\cap}\, | \, U_2/X_2}} J = \langle [b, y_j] + X_2 \rangle .$$

Daraus folgt

$$\langle [a, z_i] + X_1 \rangle \sigma = \langle [b, y_j] + X_2 \rangle .$$

Lemma 3.2.1 liefert nun die Behauptung. w.z.w.b.

Eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.2.3 und Lemma 3.2.1 ist

KOROLLAR 3.2.1. *Es seien die gleichen Voraussetzungen wie bei Lemma 3.2.3 gemacht.*

Dann gilt für alle $n \in \mathbf{N}$:

$$([a, z_i^{(n)}] + X_1)\sigma \sim [b, y_j^{(n)}] + X_2 .$$

Damit ausgestattet, können wir einen Satz beweisen, der bei der Lösung des gestellten Problems willkommene Vereinfachungen bringt.

SATZ 3.2.1. *L_1 und L_2 seien in* II. § 1 *konstruierte Lie-Algebren. Für $i = 1, 2$ sei U_i Unteralgebra von L_i, X_i Ideal von U_i mit*

$$U_1/X_1 \cong U_2/X_2 \neq 0 ,$$

$$\mathfrak{Z}(U_1/X_1) \cong \mathfrak{Z}(U_2/X_2) = 0 .$$

Dann existieren Lie-Algebren L_3 und L_4, die nach II. § 1 *konstruiert wurden, sowie Unteralgebren $U_3 \subseteq L_3$, $U_4 \subseteq L_4$ mit*

$$U_3 \cong U_4 \neq 0 ,$$

$$\mathfrak{Z}(U_3) \cong \mathfrak{Z}(U_4) = 0 .$$

Die definierenden Folgen von L_1 und L_3 bzw. von L_2 und L_4 besitzen gemeinsame Endstücke.

BEWEIS. Die definierenden Folgen von L_1 und L_2 seien $\{n_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$.

Zur Definition mögen bei L_1 die Elemente $a, z_i, i \in \mathbf{N}$, dienen, bei L_2 die Elemente $b, y_i, i \in \mathbf{N}$.

Der Isomorphismus $U_1/X_1 \to U_2/X_2$ heiße σ.

Die Vorausetzungen über $U_i, X_i, i = 1, 2$, bewirken wie in Lemma 3.2.2, daß die U_i Unteralgebren vom Typ 3), die X_i vom Typ 1) oder 2) sind. Da also $(U_i + L_i')/L_i'$ nicht endlich erzeugt ist und Zahlen $i_0, j_0 \in \mathbf{N}$ existieren mit

$$[a, z_i] \notin X_1 \text{ für alle } i \geqslant i_0 , \quad [b, y_j] \notin X_2 \text{ für alle } j \geqslant j_0 ,$$

gibt es Elemente

$$u_1 + X_1 = \alpha_{i_1} z_{i_1} + \ldots + \alpha_1 z_1 + X_1 \in U_1 , \qquad \alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_1 \in \mathbb{Z}_p , \ \alpha_{i_1} \neq 0$$
$$u_2 + X_2 = \beta_{i_2} y_{i_2} + \ldots + \beta_1 y_1 + X_2 \in U_2/X_2 , \qquad \beta_{1_2}, \ldots, \beta_1 \in \mathbb{Z}_p , \ \beta_{i_2} \neq 0$$

mit

$$(u_1 + X_1)\sigma = u_2 + X_2 ,$$

ord $\mathrm{Rest}_{(U_1/X_1)'}$ ad $(u_1 + X_1) =$ ord $\mathrm{Rest}_{(U_2/X_2)'}$ ad $(u_2 + X_2) \geqslant 2$
und

$$[a, z_{i_1-1}] \notin X_1 , \qquad [b, y_{i_2-1}] \notin X_2 .$$

(D.h. u.a.

$$[a, z_{i_1}] \notin X_1 , \qquad [b, y_{i_2}] \notin X_2) .$$

Wir betrachten die Ideale

$$Y_1 = \langle [a, z_{i_1}^{(p^{n_{i_1}}-1)}], z_i \,|\, i \in \mathrm{N},\ i < i_1 \rangle \subseteq\!| \, L_1$$
$$Y_2 = \langle [b, y_{i_2}^{(p^{m_{i_2}}-1)}], y_i \,|\, i \in \mathrm{N},\ i < i_2 \rangle \subseteq\!| \, L_2$$

und die Faktoralgebren

$$L_3 = L_1/Y_1 ,$$
$$L_4 = L_2/Y_2 .$$

Nach Satz 3.1.3 sind L_3 und L_4 Lie-Algebren, wie sie in II.§ 1 konstruiert wurden. Ihre definierenden Folgen haben gemeinsame Endstücke mit den definierenden Folgen von L_1 und L_2.

Auf Grund des Baus von X_1 und X_2, wie er im Beweis von Lemma 3.2.2 beschrieben wurde, ergibt sich

$$X_1 \subseteq Y_1 , \qquad X_2 \subseteq Y_2 .$$

Wir wollen nachweisen, daß

$$(Y_1/X_1 \cap U_1/X_1)\sigma = Y_2/X_2 \cap U_2/X_2 .$$

Nach Korollar 3.2.1 ist

$$\left([a, z_{i_1}^{(p^{n_{i_1}}-1)}] + X_1\right)\sigma = \left[b, y_{i_2}^{(p^{m_{i_2}}-1)}\right] + X_2 .$$

Sei

$$u + X_1 = \gamma_i z_i + \dots + \gamma_1 z_1 + u' + X_1 \in U_1/X_1 ,$$
$$\gamma_i, \dots, \gamma_1 \in \mathbb{Z}_p,\ \gamma_i \neq 0,\ u' \in L_1'$$

$$v + X_2 = \delta_j y_j + \dots + \delta_1 y_1 + v' + X_2 \in U_2/X_2 ,$$
$$\delta_j, \dots, \delta_1 \in \mathbb{Z}_p,\ \delta_j \neq 0,\ v' \in L_2'$$
$$(u + X_1)\sigma = v + X_2 .$$

Nach Lemma 3.2.2 ist $i < i_1$ genau dann, wenn $j < i_2$.

Daraus folgt, wie verlangt,

$$(Y_1/X_1 \cap U_1/X_1)\sigma = Y_2/X_2 \cap U_2/X_2 .$$

Sei

$$U_3 = U_1/X_1 / (Y_1/X_1 \cap U_1/X_1) ,$$
$$U_4 = U_2/X_2 / (Y_2/X_2 \cap U_2/X_2) .$$

Dann ist offenbar

$$U_3 \cong U_4 .$$

Vermöge

$$U_3 \subseteq L_1/X_1 / Y_1/X_1 \cong L_1/Y_1 = L_3$$
$$U_4 \subseteq L_2/X_2 / Y_2/X_2 \cong L_2/Y_2 = L_4$$

lassen sich U_3 in L_3 und U_4 in L_4 isomorph einbetten.

Es ist klar, daß

$$U_3 \cong U_4 \neq 0 .$$

Da offenbar auch $(U_3 + L_3')/L_3'$ und $(U_4 + L_4')/L_4'$ nicht endlich erzeugbar sind, folgt nach Satz 2.4.9

$$\mathfrak{Z}(U_3) \cong \mathfrak{Z}(U_4) = 0 .$$

Satz 3.2.1 ist damit bewiesen.

Wir sind jetzt imstande, unser erstes wichtiges Ergebnis beweisen zu können.

Satz 3.2.2. *L_1 und L_2 seien in* II. § 1 *konstruierte Lie-Algebren. U_1 sei Unteralgebra von L_1, U_2 Unteralgebra von L_2 mit*

$$U_1 \cong U_2 \neq 0\ .$$

$$\mathfrak{Z}(U_1) \cong \mathfrak{Z}(U_2) = 0\ .$$

Dann besitzen die definierenden Folgen von L_1 und L_2 gemeinsame Endstücke.

Beweis. Die definierenden Folgen von L_1 und L_2 seien $\{n_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ und $\{m_i\}_{i \in \mathbf{N}}$.

Zur Definition mögen bei L_1 die Elemente $a, z_i, i \in \mathbf{N}$, dienen, bei L_2 die Elemente $b, y_i, i \in \mathbf{N}$.

Der Isomorphismus $U_1 \to U_2$ heiße σ.

σ induziert einen Isomorphismus $\tau: A_{U_1} \to A_{U_2}$.

Anmerkung. Die entscheidenden Kalkulationen werden wir in A_{U_1} und A_{U_2} ausführen. Für jedes $x \in L_1$ bezeichnet $\operatorname{ad} x$ die innere Derivation von L_1: Ist überdies $x \in U_1$, so bezeichnen wir mit $\operatorname{ad}' x$ die innere Derivation von U_1, d.h.

$$\operatorname{ad}' x = \operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} x \quad \text{für alle } x \in U_1\ .$$

Nach Lemma 2.4.2 wissen wir überdies, daß

$$\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} x \in A_{U_1} \quad \text{für alle } x \in L_1\ .$$

Entsprechend sei in U_2

$$\operatorname{ad}' y = \operatorname{Rest}_{U_2} \operatorname{ad} y \quad \text{für alle } y \in U_2$$

und es gilt $\operatorname{Rest}_{U^2} \operatorname{ad} y \in A_{U_2}$ für alle $y \in L_2$.

Wir wissen bereits, daß $(U_1 + L_1')/L_1'$ und $(U_2 + L_2)/L_2'$ nicht endlich erzeugbar sein können. Deshalb existieren eine streng monoton wachsende Folge $\{i_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ und eine Folge $\{j_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ natürlicher Zahlen mit

$$u_{i_n} = \alpha_{n,i_n} z_{i_n} + \dots + \alpha_{n,1} z_1 + p_n \in U_1\ ,$$

$$v_{j_n} = \beta_{n,j_n} y_{j_n} + \dots + \beta_{n,1} y_1 + q_n \in U_2$$

$$\alpha_{n,i_n}, \dots, \alpha_{n,1}\ , \quad \beta_{n,j_n}, \dots, \beta_{n,1} \in \mathbf{Z}_p\ , \quad \alpha_{n,i_n}, \beta_{n,j_n} \neq 0\ , \quad p_n \in L_1', q_n \in L_2',$$

$$u_{i_n}\sigma = v_{j_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N}\ .$$

Die letzte Gleichung bedeutet

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{U_1'} \operatorname{ad}' u_{i_n} = \operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{U_2'} \operatorname{ad}' v_{j_n} .$$

Man bestätigt ohne Schwierigkeit mit Hilfe von (2.4.1)

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{U_1'} \operatorname{ad}' u_{i_n} = p^{n_{i_n} + \dots + n_2}(p^{n_1} - 1) ,$$

$$\operatorname{ord} \operatorname{Rest}_{U_2'} \operatorname{ad}' v_{j_n} = p^{m_{j_n} + \dots + m_2}(p^{m_1} - 1) \quad \text{für alle } n \in \mathbf{N} .$$

Einmal ergibt sich aus diesen Beziehungen, daß die Folge $\{j_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ streng monoton wachsend ist. Weiter bewiesen sie die Gültigkeit folgender Identitäten:

$$p^{n_{i_1} + \dots + n_2}(p^{n_1} - 1) = p^{m_{j_1} + \dots + m_2}(p^{m_1} - 1) ,$$

$$(3.2.5) \qquad p^{n_{i_{r+1}} + \dots + n_{i_r+1}} = p^{m_{j_{r+1}} + \dots + m_{j_r+1}}$$

bzw.

$$n_{i_{r+1}} + \dots + n_{i_r+1} = m_{j_{r+1}} + \dots + m_{j_r+1} \qquad \text{für alle } r \in \mathbf{N}.$$

Diese ersten Gleichungen über die definierenden Folgen von L_1 und L_2 sollen noch weiter präzisiert werden.

Das geschieht durch nachstehende Definitionen.

Zu jedem $r \in \mathbf{N}$ existiert ein maximales $k_r \in \mathbf{N}_0$ mit

$$n_{i_r+k} = m_{j_r+k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbf{N},\ k \leqslant k_r ,$$

und

$$i_r + k_r \leqslant i_{r+1} , \qquad j_r + k_r \leqslant j_{r+1} .$$

Wir setzen

$$s_r = i_r + k_r , \qquad t_r = j_r + k_r .$$

Zieht man (3.2.5) heran, so erkennt man, daß $s_r = i_{r+1}$ offenbar genau dann, wenn $t_r = j_{r+1}$. Es kann auch nicht zugleich $s_r = i_{r+1} - 1$ und $t_r = j_{r+1} - 1$ sein, da, wieder nach (3.2.5), dann $n_{i_{r+1}} = m_{j_{r+1}}$ wäre, im Widerspruch zur Maximalität von k_r.

Wir haben also für $s_r < i_{r+1}$, d,h, $t_r < j_{r+1}$, und nur dieser Fall wird für uns interessant sein,

$$(3.2.6) \qquad \begin{aligned} & n_{i_{r+1}} + \dots + n_{s_r+1} = m_{j_{r+1}} + \dots + m_{t_r+1} , \\ & n_{i_r+k} = m_{j_r+k} \qquad \text{für alle } k \in \mathbf{N},\ k \leqslant k_r . \end{aligned}$$

Weiter

$$(3.2.7)\qquad \begin{aligned} &1 \neq p^{m_{j_{r+1}}+\dots+m_{t_r+2}} && \text{für } s_r = i_{r+1}-1\,, \\ &p^{n_{i_{r+1}}+\dots+n_{s_r+2}} \neq 1 && \text{für } t_r = j_{r+1}-1\,, \\ &p^{n_{i_{r+1}}+\dots+n_{s_r+2}} \neq p^{m_{j_{r+1}}+\dots+m_{t_r+2}} && \text{sonst}\,. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$(3.2.8)\qquad \begin{aligned} &E_r = p^{m_{j_{r+1}}+\dots+m_{t_r+2}}(p^{m_{t_r+1}}-1) && \text{für } s_r = i_{r+1}-1\,, \\ &E_r = p^{n_{i_{r+1}}+\dots+n_{s_r+2}}(p^{n_{s_{r+1}}}-1) && \text{für } t_r = j_{r+1}-1\,, \\ &E_r = \min\{p^{n_{i_{r+1}}+\dots+n_{s_r+2}}(p^{n_{s_r+1}}-1),\ p^{m_{j_{r+1}}+\dots+m_{t_r+2}}(p^{m_{t_r+1}}-1)\} \\ &\text{sonst}\,. \end{aligned}$$

Wenn wir setzen

$$(3.2.9)\qquad \begin{aligned} &N_r = n_{i_{r+1}}+\dots+n_{s_r+2} && \text{für } s_r < i_{r+1}-1\,, \\ &N_r = 0 && \text{für } s_r = i_{r+1}-1\,, \end{aligned}$$

$$(3.2.9')\qquad \begin{aligned} &M_r = m_{j_{r+1}}+\dots+m_{j_r+2} && \text{für } t_r < j_{r+1}-1\,, \\ &M_r = 0 && \text{für } t_r = j_{r+1}-1\,, \end{aligned}$$

haben wir wegen (3.2.7) zunächst

$$(3.2.10)\qquad p^{N_r}(p^{n_{s_r+1}}-1) \neq p^{M_r}(p^{m_{t_r+1}}-1)\,.$$

Diese Ungleichung wird noch eine entscheidende Rolle spielen.

Ferner lassen sich die 3 Fälle von (3.2.8) zusammenfassen zu

$$(3.2.11)\qquad E_r = \min\{p^{N_r}(p^{n_{s_r+1}}-1),\ p^{M_r}(p^{m_{t_r+1}}-1)\}\,.$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir zum Kern des Beweises kommen.

Der Beweis wird indirekt geführt. Wir nehmen also an, die definierenden Folgen von L_1 und L_2 besäßen keine gemeinsamen Endstücke.

Dann ist $s_r < i_{r+1}$ für unendlich viele $r \in \mathrm{N}$.

Es wird sich zeigen, daß dann Widersprüche unvermeidlich sind. Aus

$$u_{i_1}\sigma = v_{j_1}$$

folgt

$$\mathrm{ad}'\, u_{i_1}\tau = \mathrm{ad}'\, v_{j_1}\,.$$

Daraus ergibt sich, wie man leicht machrechnet,

$$\begin{gathered}\mathrm{Rest}_{U_1}\mathrm{ad}\, z_{i_1}\tau = \sum_{k\geqslant 0}\gamma_{i_1,k}\,\mathrm{Rest}_{U_2}(\mathrm{ad}\, y_{j_1})^{p^k} + \mathrm{ad}'\, g_{i_1}\\ \gamma_{i_1,k}\in\mathbb{Z}_p,\ \gamma_{i_1,0}\neq 0,\ g_{i_1}\in L_2'\,.\end{gathered}\tag{3.2.12}$$

Weiter existiert ein $r_1 \geqslant j_1$ mit

$$g_{i_1} = \sum_{k\geqslant 1}\delta_{i_1,k}[b, y_{r_1}^{(k)}]\,,\qquad \delta_{i_1,k}\in\mathbb{Z}_p \tag{3.2.12'}$$

und

$$[a, z_{i_1}]\sigma = \sum_{k\geqslant 1}\vartheta_{i_1,k}[b, y_{r_1}^{(k)}]\,,\qquad \vartheta_{i_1,k}\in\mathbb{Z}_p\,. \tag{3.2.13}$$

Wir werden sehn, daß die notwendige Existenz einer solchen Zahl r_1 mit der Annahme, die definierenden Folgen von L_1 und L_2 besäßen keine gemeinsamen Endstücke, kollidiert.

Unter dieser Annahme existiert ein $l\in\mathrm{N}$ mit

$$r_1 < t_l < j_{l+1}\,.$$

Analog zu (3.2.12) ergibt sich

$$\begin{gathered}\mathrm{Rest}_{U_1}\mathrm{ad}\, z_{i_{l+1}}\tau = \sum_{k\geqslant 0}\gamma_{i_{l+1},k}\,\mathrm{Rest}_{U_2}(\mathrm{ad}\, y_{j_{l+1}})^{p^k} + \mathrm{ad}'\, g_{i_{l+1}}\\ \gamma_{i_{l+1},k}\in\mathbb{Z}_p,\ \gamma_{i_{l+1},0}\neq 0,\ g_{i_{l+1}}\in L_2'\,.\end{gathered}$$

Mit (3.2.6) folgt hieraus

$$\begin{gathered}\mathrm{Rest}_{U_1}(\mathrm{ad}\, z_{i_{l+1}})^{n_{i_{l+1}}+\dots+n_{s_{l+1}}}\tau = \sum_{k\geqslant 0}\gamma_{i_{l+1},k}\,\mathrm{Rest}_{U_2}(\mathrm{ad}\, y_{j_{l+1}})^{p^{k+m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_{l+1}}}} + \mathrm{ad}'\, h_{i_{l+1}}\\ h_{i_{l+1}} \sim [g_{i_{l+1}}, y_{j_{l+1}}^{(p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_{l+1}}}-1)}]\,.\end{gathered}$$

Nach (2.1.3), Korollar 3.2.1, (3.2.9) und (3.2.9′) hat man nun

$$\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{s_l} \tau = \sum_{k \geqslant 0} \gamma_{i_{l+1},k} \operatorname{Rest}_{U_2} (\operatorname{ad} y_{t_l})^{p^k} + (\operatorname{ad}' h_{i_{l+1}} + \operatorname{ad}' d_1 + \operatorname{ad}' d_2$$

wobei

$$d_1 \sim \left[b, y_{j_{l+1}}^{(p^{N_l}(p^{n_{s_l+1}}-1))}\right],$$

$$d_2 \sim \left[b, y_{j_{l+1}}^{(p^{M_l}(p^{m_{t_l+1}}-1))}\right].$$

Man sieht, daß

$$d_1 \sqsubset h_{i_{l+1}}, \qquad d_2 \sqsubset h_{i_{l+1}}.$$

Die Beziehung (3.2.11) liefert dann (vgl. Anmerkung (3.2.10)):

$$\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{s_l} \tau = \sum_{k \geqslant 0} \gamma_{i_{l+1},k} \operatorname{Rest}_{U_2} (\operatorname{ad} y_{t_l})^{p^k} + \operatorname{ad}' g_{s_l} \tag{3.2.14}$$

mit

$$g_{s_l} \sim [b, y_{j_{l+1}}^{(E_l)}], \qquad \gamma_{i_{l+1},0} \neq 0 .$$

Nachdem wir jetzt in (3.2.14) eine Formel für $\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{s_l} \tau$ haben, werden wir $\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{i_1} \tau$ durch $\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{s_l} \tau$ ausdrücken. Es wird sich zeigen, daß dieses Ergebnis mit den Formeln (3.2.12) und (3.2.12′) für $\operatorname{Rest}_{U_1} \operatorname{ad} z_{i_1} \tau$ nicht zu vereinbaren ist. Dies wird der gewünschte Widerspruch sein.

Im wesentlichen werden wir also mit (2.1.3) den Ausdruck

$$\operatorname{Rest}_{U_1} (\operatorname{ad} z_{i_1} - (\operatorname{ad} z_{s_l})^{p^{n_{s_l}+\cdots+n_{i_{l+1}}}}) \tau$$

zu berechnen haben. Das bedeutet, daß wir zunächst über den Term $[a, z_{s_l}]\sigma$ Informationen gewinnen müssen, die über den Inhalt von Korollar 3.2.1 beträchtlich hinausgehen.

Nach Korollar 3.2.1 ist

$$[a, z_{i_{l+1}}^{(k)}]\sigma \sim [b, y_{j_{l+1}}^{(k)}].$$

Da nach (3.2.6)

$$n_{i_{l+1}} + \dots + n_{s_l+1} = m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_l+1},$$

folgt

$$[a, z_{s_l}]\sigma = \left[a, z_{i_{l+1}}^{(p^{n_{i_{l+1}}+\cdots+n_{s_l+1}})}\right]\sigma \sim \left[b, y_{j_{l+1}}^{(p^{m_{j_{l+1}}+\cdots+m_{t_l+1}})}\right] = [b, y_{t_l}].$$

Das Element $[a, z_{s_l}]\sigma$ läßt sich dann auf die folgende Normalform bringen:

$$[a, z_{s_l}]\sigma = \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k [b, y_{t_l}^{(k)}] + \sum_{k \geqslant k_0} \zeta_k [b, y_{t_l}, y_{j_{l+1}}^{(k)}] + \sum_{k \geqslant 1} \eta_k [b, y_{r_l}^{(k)}] .$$

Dabei soll gelten: $\varepsilon_1, \zeta_{k_0} \neq 0,\ j_{l+1} < r_l,$

$$k_0 \not\equiv 0(p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_l+1}}) ,$$

$$\eta_k \neq 0 \quad \text{höchstens für } k \not\equiv 0(p^{m_{r_l} + \dots + m_{j_{l+1}+1}}) .$$

Die Möglichkeit, daß $[b, y_{t_l}, y_{j_{l+1}}^{(k_0)}] = 0$, ist nicht ausgeschlossen.

Zunächst soll eine Abschätzung für k_0 angegeben werden. Wegen (3.2.14) ist

$$[a, z_{t_1}]\sigma = [a, z_{s_l}, z_{s_l}^{(p^{n_{s_l}} + \dots + n_{t_1+1} - 1)}]\sigma = \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon_k' [b, y_{t_l}^{(k)}] +$$
$$+ \sum_{k \geqslant k_0} \zeta_k' [b, y_{j_1}, y_{j_{l+1}}^{(k)}] + \sum_{k \geqslant 1} \eta_k' [b, y_{r_l}^{(k)}]$$

$$\zeta_{k_0}' \neq 0,\ \eta_k' \neq 0 \text{ höchstens für } k \not\equiv 0((p^{m_{r_l} + \dots + m_{j_{l+1}+1}}) .$$

Damit nicht schon jetzt ein Widerspruch mit (3.2.13) entsteht, muß wegen $\zeta_{k_0}' \neq 0,\ r_1 < t_l < j_{l+1}$ und $k_0 \neq 0\ (p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_l+1}})$ gelten:

$$[b, y_{j_1}, y_{j_{l+1}}^{(k_0)}] = [b, y_{j_{l+1}}^{(p^{m_{j_{l+1}}} + \dots + m_{j_1+1} + k_0)}] = 0 .$$

Das bedeutet

$$k_0 + p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{j_1+1}} \geqslant p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_2}(p^{m_1} - 1)$$

bzw. wegen (3.2.5)

$$k_0 + p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_{t_1+1}} \geqslant p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_2}(p^{n_1} - 1) ,$$

$$k_0 \geqslant p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_2}(p^{n_1} - 1) - p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_{t_1+1}} \geqslant 2p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_2} - p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_{t_1+1}} \geqslant$$
$$\geqslant p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_2} > p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_{t_1+2}} > p^{n_{t_{l+1}} + \dots + n_{t_1+2}} + E_l - p^{m_{j_{l+1}} + \dots + m_{t_l+1}} .$$

Unter nochmaliger Verwendung von (3.2.5) erhalten wir

$$(3.2.15)\qquad k_0 + p^{n_{i_{l+1}}+\dots+n_{i_1+2}}(p^{n_{i_1+1}} - 1) > \\ > E_l + p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{j_1+1}} - p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_{l+1}}}.$$

Wir wenden uns dem aufgezeigten Ziel zu,

$$P = \mathrm{Rest}_{U_1}\left(\mathrm{ad}\, z_{i_1} - (\mathrm{ad}\, z_{s_l})^{p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+1}}}\right)\tau = \\ = -\mathrm{ad}'\left([a, z_{s_l}^{(p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+1}} - p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+2}})}] + \dots + [a, z_{s_l}^{(p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+1}}-1)}]\right)\tau$$

zu berechnen.

Für jedes $k > 1$ ist

$$\mathrm{ad}'[a, z_{s_l}^{(k)}]\tau = \left(\mathrm{ad}'\left([a, z_{s_l}]\,\mathrm{Rest}_{U_1}(\mathrm{ad}\, z_{s_l})^{k-1}\right)\right)\tau = \\ = \mathrm{ad}'\left([a, z_{s_l}]\,\sigma\,\mathrm{Rest}_{U_1}\mathrm{ad}\, z_{s_l}\tau)^{k-1}\right).$$

Das führt mit (3.2.14) auf

$$(3.2.16)\qquad \begin{aligned} &P = \sum_{k\geqslant 1}\vartheta_k\,\mathrm{ad}'[b, y_{t_l}^{(k)}] + \sum_{k\geqslant 1}\mu_k\,\mathrm{ad}'[b, y_{r_l}^{(k)}] + \mathrm{ad}'\, d_{i_1, s_l} \\ &d_{i_1,s_l} \sim [b, y_{t_l}^{(p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+1}} - p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+2}})}, y_{j_{l+1}}^{(k_0)}] \\ &\vartheta_k, \mu_k \in \mathbb{Z}_p,\ \mu_k \neq 0 \text{ höchstens für } k \not\equiv 0(p^{m_{r_l}+\dots+m_{j_{l+1}}+1}) \end{aligned}$$

(2.1.3), (3.2.5) und (3.2.14) bewirken

$$(3.2.17)\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Rest}_{U_1}(\mathrm{ad}\, z_{s_l}\tau)^{p^{n_{s_l}+\dots+n_{i_1+1}}} = \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\gamma_{i_{l+1},k}\,\mathrm{Rest}_{U_2}(\mathrm{ad}\, y_{t_l})^{p^{k+m_{t_l}+\dots+m_{j_1+1}}} + \mathrm{ad}'\, h_{s_l} = \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\gamma_{i_{l+1},k}(\mathrm{Rest}_{U_2}(\mathrm{ad}\, y_{t_l})^{p^{m_{t_l}+\dots+m_{j_1+1}}})^{p^k} + \mathrm{ad}'\, h_{s_l} = \\ &= \sum_{k\geqslant 0}\gamma_{i_{l+1},k}\,\mathrm{Rest}_{U_2}(\mathrm{ad}\, y_{j_1})^{p^k} + \sum_{k\geqslant 1}\gamma_k\,\mathrm{ad}'[b, y_{t_l}^{(k)}] + \mathrm{ad}'\, h_{s_l} \end{aligned}$$

$$\gamma_k \in \mathbb{Z}_p,\ h_{s_l} \sim [b, y_{t_l}^{(p^{m_{t_l}+\dots+m_{j_1+1}}-1)}, y_{j_{l+1}}^{(E_l)}].$$

Berücksichtigt man (3.2.15), so erhält man

(3.2.18) $$h_{s_l} \sqsubset d_{i_1, s_l}$$

(3.2.16), (3.2.17) und (3.2.18) ergeben zusammen schließlich

(3.2.19) $$\begin{aligned}\mathrm{Rest}_{U_1} \mathrm{ad}\, z_{i_1} \tau = \sum_{k \geqslant 0} \gamma_{i_{l+1},k} \mathrm{Rest}_{U_2} (\mathrm{ad}\, y_{j_1})^{p^k} + \\ + \sum_{k \geqslant 1} (\gamma_k + \vartheta_k) \mathrm{ad}' [b, y_{t_l}^{(k)}] + \\ + \sum_{k \geqslant 1} \mu_k \mathrm{ad}' [b, y_{r_l}^{(k)}] + \mathrm{ad}' h_{i_1, s_l},\end{aligned}$$

wobei für h_{i_1, s_l} gilt

$$h_{i_1, s_l} \sim [b, y_{t_l}^{(p^{m_{t_l}+\dots+m_{j_1+1}}-1)}, y_{j_{l+1}}^{(E_l)}] .$$

Wir haben jetzt das gesteckte Ziel erreicht, für $\mathrm{Rest}_{U_1} \mathrm{ad}\, z_{i_1} \tau$ zwei auf verschiedenen Wegen erhaltene Darstellungen zu haben.

Vergleicht man (3.2.12) und (3.2.12′) mit (3.2.19), so erkennt man, daß

$$\begin{aligned}D = \sum_{k \geqslant 0} (\gamma_{i_{l+1},k} - \gamma_{i_1,k}) \mathrm{Rest}_{U_2} (\mathrm{ad}\, y_{j_1})^{p^k} - \sum_{k \geqslant 1} \delta_{i_1,k} \mathrm{ad}' [b, y_{r_1}^{(k)}] + \\ + \sum_{k \geqslant 1} (\gamma_k + \vartheta_k) \mathrm{ad}' [b, y_{t_l}^{(k)}] + \sum_{k \geqslant 1} \mu_k \mathrm{ad}' [b, y_{r_l}^{(k)}] + \mathrm{ad}' h_{i_1, s_l}\end{aligned}$$

die Nullabbildung ist.

Hieraus folgt weiter, daß auch $[D, \mathrm{Rest}_{U_2} \mathrm{ad}\, y_{j_1}]$ die Nullabbidlungist.

Da $\mathfrak{Z}(U_2) = 0$ ist, folgt aus $\mathrm{ad}' u = 0$ notwendig $u = 0$. In unserem Fall führt das zu folgender Gleichung:

(3.3.30) $$\begin{aligned}0 = \sum_{k \geqslant 1} (\gamma_k + \vartheta_k) [b, y_{t_l}^{(k)}, y_{j_1}] + \sum_{k \geqslant 1} \mu_k [b, y_{r_l}^{(k)}, y_{j_1}] - \\ - \sum_{k \geqslant 1} \delta_{i_1,k} [b, y_{r_1}^{(k)}, y_{j_1}] + [h_{i_1, s_l}, y_{j_1}] .\end{aligned}$$

In dieser Gleichung gilt:

$$[h_{i_1, s_l}, y_{j_1}] \sim [b, y_{l+1}^{(C)}]$$

mit

$$C = E_1 + p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_l+1}}(p^{m_{t_l}+\dots+m_{j_1+1}} - 1) + p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{j_1+1}}.$$

Man hat

$$C < 2p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{j_1+1}} \leqslant p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_2}(p^{m_1} - 1) .$$

Daraus folgt

$$[b, y_{j_{l+1}}^{(C)}] \neq 0 .$$

Weiter ist für alle $k \in \mathbf{N}$

$$kp^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{r_1+1}} + p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{j_1+1}} \equiv 0(p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_l+1}}) ,$$

$$kp^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_l+1}} + p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{j_1+1}} \equiv 0(p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_l+1}}) ,$$

$$C \equiv E_l \not\equiv 0(p^{m_{j_{l+1}}+\dots+m_{t_l+1}}) .$$

Daraus folgt

$$[b, y_{j_{l+1}}^{(C)}] \neq [b, y_{r_1}^{(k)}, y_{j_1}] \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N} ,$$

$$[b, y_{j_{l+1}}^{(C)}] \neq [b, y_{t_l}^{(k)}, y_{j_1}] \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N} .$$

Da $\mu_k \neq 0$ höchstens für $k \not\equiv 0$ $(p^{m_{r_l}+\dots+m_{j_{l+1}+1}})$ war, ist ferner

$$[b, y_{j_{l+1}}^{(C)}] \neq \mu_k[b, y_{r_l}^{(k)}, y_{j_1}] \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N} .$$

Damit aber ergibt sich, daß Gleichung (3.2.20) falsch ist.

Wir haben so den gewünschten Widerspruch erreicht. Die Annahme, die definierenden Folgen von L_1 und L_2 besäßen keine gemeinsamen Endstücke, ist nicht haltbar.

Satz 3.2.2 ist damit bewiesen.

Satz 1.2.7, Satz 3.2.1 und Satz 3.2.2 lassen sich zusammenfassen in

Satz 3.2.3. *L_1 und L_2 seien in* II. § 1 *konstruierte Lie-Algebren. Wenn $L_1 \times L_2$ nicht die Idealisatorbedingung erfüllt, besitzen die definierenden Folgen von L_1 und L_2 gemeinsame Endstücke.*

Die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls richtig.

Satz 3.2.4. *Wenn die definierenden Folgen zweier in II.§ 1 konstruierter Lie-Algebren L_1, L_2 gemeinsame Endstücke besitzen, erfüllt $L_1 \times L_2$ nicht die Idealisatorbedingung.*

Beweis. Die definierenden Folgen von L_1 und L_2 seien $\{n_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ $\{m_i\}_{i\in\mathrm{N}}$. Dann existieren Zahlen $c_1, c_2 \in \mathrm{N}_0$ mit

$$n_{c_1+i} = m_{c_2+i} \quad \text{für alle } i \in \mathrm{N}.$$

Sei L die durch die Folge $\{n_{c_1+i}\}_{i\in\mathrm{N}} = \{m_{c_2+i}\}_{i\in\mathrm{N}}$ definierte Lie-Algebra über $\mathbf{Z}_p$.

Nach Satz 3.1.3 existieren Ideale X_1 von L_1 und X_2 von L_2 mit

$$L_1/X_1 \cong L_2/X_2 \cong L.$$

Da $L \neq 0$ und $\mathfrak{Z}(L) = 0$, liefert Satz 1.2.7 die Behauptung.

Wir können das Erreichte zusammenfassen:

Das direkte Produkt zweier Lie-Algebren, die nach II. §1 *über* $\mathbf{Z}_p$ *konstruiert sind, erfüllt genau dann die Idealisatorbedingung, wenn die definierenden Folgen der Lie-Algebren keine gemeinsamen Endstücke besitzen.*

Wir wollen schließlich noch untersuchen, ob etwa ein direktes Produkt von Lie-Algebren zu einer der ursprünglich konstruierten Algebren isomorph sein kann und wann direkte Produkte untereinander isomorph sind.

Dazu haben wir

Satz 3.2.5. *Die in* II. § 1 *konstruierten Lie-Algebren sind unzerlegbar.*

Beweis. L sei eine beliebige der konstruierten Lie-Algebren. Angenommen, es existiere eine direkte Zerlegung

$$L = H_1 \times H_2, \quad H_1 \neq 0, \quad H_2 \neq 0$$

Da $\mathfrak{Z}(L) = 0$, muß auch $\mathfrak{Z}(H_1) = \mathfrak{Z}(H_2) = 0$ sein.

Also ist $(H_1 + L')/L'$ und $(H_2 + L')/L'$ nicht endlich erzeugbar und nach Satz 2.4.6 folgt $L' \subseteq H_1$, $L' \subseteq H_2$.

D.h.

$$L' \subseteq H_1 \cap H_2 \neq 0.$$

Wir haben einen Widerspruch und der Satz ist bewiesen.

Damit haben wir zunächst gewonnen, daß für Lie-Algebren L_1, L_2, L_3 aus II. § 1 niemals gelten kann

$$L_1 \cong L_2 \times L_3.$$

Seien nun vier Lie-Algebren L_1, L_2, L_3, L_4 aus II. § 1 gegeben und sei

$$L_1 \times L_2 \cong L_3 \times L_4 .$$

Dann folgt nach dem Satz von Remak-Schmidt-Fitting entweder

$$L_1 \cong L_3 , \quad L_2 \cong L_4 ,$$

oder

$$L_1 \cong L_4 , \quad L_2 \cong L_3 .$$

Ein Beweis hierfür soll noch angegeben werden.

Der Isomorphismus $L_1 \times L_2 \to L_3 \times L_4$ heiße φ.

Es gilt $L_1\varphi \trianglelefteq L_3 \times L_4$ und $L_2\varphi \trianglelefteq L_3 \times L_4$. Mit den Bezeichnungen aus I. § 2 ergibt sich $L_1\varphi\pi_3 \trianglelefteq L_3$, $L_2\varphi\pi_3 \trianglelefteq L_3$. Da φ surjektiv ist, hat man weiter $(L_1\varphi\pi_3, L_2\varphi\pi_3) = L_3$.

Sei ein beliebiges Element $u \in L_1\varphi\pi_3 \cap L_2\varphi\pi_3$ gegeben. Dann existieren Elemente $u_1 \in L_1$, $u_2 \in L_2$ mit $u = u_1\varphi\pi_3 = u_2\varphi\pi_3$.

Sei weiter $x \in L_1\varphi\pi_3$ beliebig. Es existiert ein $x_1 \in L_1$ mit $x = x_1\varphi\pi_3$. Dann gilt

$$[x, u] = [x_1\varphi\pi_3, u_2\varphi\pi_3] = [x_1\varphi, u_2\varphi]\pi_3 = [x_1, u_2]\varphi\pi_3 = 0 .$$

D.h. $u \in \mathfrak{Z}(L_1\varphi\pi_3)$. Analog erhält man $u \in \mathfrak{Z}(L_2\varphi\pi_3)$.

Damit ergibt sich $u \in \mathfrak{Z}((L_1\varphi\pi_3, L_2\varphi\pi_3)) = \mathfrak{Z}(L_3)$.

Wegen $\mathfrak{Z}(L_3) = 0$ ist daher $L_1\varphi\pi_3 \cap L_2\varphi\pi_3 = 0$ und

$$L_3 = L_1\varphi\pi_3 \times L_2\varphi\pi_3 .$$

Da L_3 unzerlegbar ist, muß wenigstens eines der Ideale $L_1\varphi\pi_3$ und $L_2\varphi\pi_3$ das Nullideal sein.

Analog ergibt sich, daß wenigstens eines der beiden Ideale $L_1\varphi\pi_4$ und $L_2\varphi\pi_4$ Nullideal sein muß.

Nehmen wir an

$$L_1\varphi\pi_3 = 0 ,$$

so folgt

$$L_1\varphi = L_1\varphi\pi_4 \subseteq L_4 .$$

Daraus ergibt sich $L_2\varphi\pi_4 = 0$, d.h. $L_2\varphi \subseteq L_3$.

Da $L_1\varphi \times L_2\varphi = L_3 \times L_4$, folgt $L_1\varphi = L_4$, $L_2\varphi = L_3$.
Wenn $L_2\varphi\pi_3 = 0$ wäre, folgte entsprechend $L_1\varphi = L_3$, $L_2\varphi = L_4$.
Damit ist die Behauptung gezeigt.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] N. JACOBSON, *Lie Algebras*, Interscience Publishers, New York - London - Sydney, 1962.

[2] G. B. SELIGMAN, *Modular Lie Algebras*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1967.

[3] W. SPECHT, *Gruppentheorie*, Springer-Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1956.

[4] A. G. KUROSH, *Theory of Groups*, English transl. from the second Russian edition, (Chelsea, ed.), New York, 1961.

[5] H. HEINEKEN - I. J. MOHAMED, *A group with trivial centre satisfying the normalizer condition*, Journal of Algebra, **10** (1968), 368-376.

[6] H. ZASSENHAUS, *Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik*, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, **13** (1939), 1-100.

[7] A. G. KUROSH - S. N. ČERNIKOV, *Solvable and nilpotent groups*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.), **2**, no. 3 (19) (1947), 18-59. [English transl.: Amer. Math. Soc. Translations series 1, **1**, 283-338.]

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1972.