

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

W. STREB

Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 50 (1973), p. 127-142

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__127_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Über Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen.

W. STREB (*)

Jennings [4; Theorem 1, p. 595] hat gezeigt, daß jeder Ring R mit nilpotentem assoziierten Lie-Ring ein nils Kommutatorideal R' besitzt. Da die Klasse der Ringe mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen die Klasse der Ringe mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen umfaßt, erhebt sich die Frage, ob auch jeder Ring mit auflösbarem assoziierten Lie-Ring ein nils Kommutatorideal besitzt. Hierzu zeigen wir:

Es gibt eine endliche Algebra A der Charakteristik 2, die

$$e \circ ((d \circ c) \circ (b \circ a)) = 0$$

für alle $a, b, c, d, e \in A$ erfüllt, jedoch kein nils Kommutatorideal A' besitzt.

Hierbei sei für Elemente r und s und Teilmengen A und B eines Ringes R :

$$s \circ r := sr - rs,$$

$$B \circ A := (b \circ a | b \in B \text{ und } a \in A).$$

Dagegen gilt: Jeder schwach hyperkommutative Ring R besitzt ein nils Kommutatorideal R' . Erfüllt R die Maximalbedingung für Ideale, so ist R' nilpotent.

Hierbei heiße ein Ring R schwach hyperkommutativ, wenn $2r \neq 0$ für alle $r \in R$ mit $r \neq 0$, und jedes nicht kommutative epimorphe

(*) Indirizzo dell'A.: Henri-Dunant-Str. 65 - Gesamt Hochschule, Fachbereich 6, Mathematik - D-43 Essen, Germania Occ.

Bild S von R eine Teilmenge M enthält, so daß

$$S \circ M \subseteq |M|, \quad M \circ M \neq 0 \quad \text{und} \quad (M \circ M) \circ (M \circ M) = 0.$$

Die Klasse der schwach hyperkommutativen Ringe umfaßt die Klasse der Ringe R mit auflösbaren assoziierten Lie-Ringen, welche die Bedingung $2r \neq 0$ für alle $r \in R$ mit $r \neq 0$ erfüllen.

Während nach [9; Beispiel] Bedingungen an die Charakteristik eines Ringes alleine nicht ausreichen, damit ein lokalnilpotenter Ring hyperkommutativ [6; S. 401] ist, ist jeder schwach hyperkommutative Ring R mit Primzahlcharakteristik $p \neq 2$ hyperkommutativ.

Über Ringe R der Charakteristik 0 zeigen wir:

R ist nilpotent genau dann, wenn R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt und in R ein Gesetz $g(x) = 0$ [5; S. 562] gilt, welches nicht in die Nullform übergeht, wenn man in jedem Potenzprodukt [5; S. 560] die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet.

Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement gilt:

R ist kommutativ genau dann, wenn R ein Z_2 -Ring ist.

R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring genau dann, wenn R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt und Z_3 -Ring ist.

R besitzt ein nilpotentes Kommutatorideal R' genau dann, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, so daß ${}^n R = 0$ [6; S. 400] und R ein Z_4 -Ring ist.

R ist ein Ring endlicher Klasse [3; p. 343] genau dann, wenn R einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt und Z_3 - und Z_4 -Ring ist.

Hierbei sei Z_2 bzw. Z_3 der Ring der Matrizen

$$\begin{pmatrix} d & a & b \\ 0 & d & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

mit ganzen Zahlen a, b, c und d und Z_4 die kanonische Erweiterung der in [7; S. 137] angegebenen Algebra A über dem Ring R der ganzen Zahlen zu einer Algebra mit Einselement.

Ein Ring R heiße Z_i -Ring genau dann, wenn in R ein nicht in Z_i gültiges Gesetz gilt.

Über schwach hyperkommutative Ringe R mit Einheitengruppe G zeigen wir: Jedes epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen kommutativen oder ordnungsfiniten Normalteiler.

Bezüglich der hier nicht eigens verabredeten Bezeichnungen verweise ich auf [6; S. 399-401 und 8; Einleitung]. Folgende Ergänzung ist notwendig:

Ist M Teilmenge eines Ringes R und n natürliche Zahl, so sei

$$nM := (nr | r \in M).$$

BEISPIEL 1. Die von einem beliebigen kommutativen nicht nilen Ring R der Charakteristik 2 erzeugte Algebra A_R der 2-2-Matrizen erfüllt

$$(a) \quad e \circ ((d \circ c) \circ (b \circ a)) = 0$$

für alle $a, b, c, d, e \in A_R$, besitzt jedoch kein nils Kommutatorideal.

BEWEIS. Man rechnet unmittelbar nach:

$$b \circ a = \begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d \circ c = \begin{pmatrix} u & v \\ w & -u \end{pmatrix},$$

wobei $r, s, t, u, v, w \in R$, also

$$(d \circ c) \circ (b \circ a) = \begin{pmatrix} vt - sw & 2(su - rv) \\ 2(rw - tu) & sw - tv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

mit $x \in R$. Nun folgt unmittelbar (a).

Da R nicht nil ist, besitzt R wenigstens ein nicht nilpotentes Element f . Das Kommutatorideal $(A_R)'$ ist nicht nil, da

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f & 0 \end{pmatrix} \right]^n = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & -f \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} f^n & 0 \\ 0 & f^n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für alle natürlichen Zahlen n . Für R kann speziell der Primkörper der Charakteristik 2 gewählt werden.

LEMMA 1. Sei M Teilmenge des Ringes R . Aus

$$M \circ (R \circ M) = 0 \quad \text{folgt} \quad 2\{r \circ a\}^2 = 0$$

für alle $a \in M$ und $r \in R$.

BEWEIS. Sei $a \in M$ und $r, s, t \in R$. Aus

$$2(s \circ a)(r \circ a) = (a \circ (s \circ a))r + s(a \circ (r \circ a)) - a \circ (sr \circ a) = 0$$

folgt $2(r \circ a)^2 = 0$ und

$$2(r \circ a)t(r \circ a) = 2(r \circ a)(tr \circ a) - 2(r \circ a)(t \circ a)r = 0.$$

LEMMA 2. Sei M Teilmenge des Ringes R . Aus

$$R \circ (M \circ M) = 0 \quad \text{und} \quad R \circ (M \circ (R \circ M)) = 0$$

folgt

$$2\{b \circ a\}^3 = 0$$

für alle $a, b \in M$.

BEWEIS. Seien $a, b \in M$. Die Behauptung folgt wegen $R \circ (M \circ M) = 0$ unmittelbar aus

$$2(b \circ a)^3 = b \circ (b \circ (a^2 b \circ a)) - a(b \circ (b \circ (ab \circ a))) - (b \circ (b \circ a))(ab \circ a) - \\ - 2(b \circ a)a(b \circ (b \circ a)) = 0.$$

LEMMA 3. Ist R schwach hyperkommutativ, so gibt es zu jedem Ideal A mit $A \subset R'$ ein Ideal B , so daß $A \subset B \subseteq R'$ und $2B^3 \subseteq A$.

BEWEIS. Zu dem nicht kommutativen epimorphen Bild $S := R/A$ von R gibt es eine Teilmenge N , so daß

$$S \circ N \subseteq |N|, \quad N \circ N \neq 0 \quad \text{und} \quad (N \circ N) \circ (N \circ N) = 0.$$

Nach [6; Lemma 7.(2).(a), S. 404] angewendet auf $A := B := N$ und $R := S$ gilt $S \circ (N \circ N) \subseteq |N \circ N|$, also

$$(a) \quad (N \circ N) \circ (S \circ (N \circ N)) \subseteq (N \circ N) \circ (|N \circ N|) = 0.$$

Weiterhin gilt

$$(b) \quad S \circ (N \circ (S \circ N)) \subseteq S \circ (N \circ |N|) = 0, \quad \text{falls } S \circ (N \circ N) = 0.$$

Wir treffen eine Fallunterscheidung:

(c) Ist $S \circ (N \circ N) \neq 0$, so wählt man $r \in S$ und $a \in N \circ N$, so daß $r \circ a \neq 0$ und setzt $C := \{r \circ a\}$. Da für $M := N \circ N$ und $R := S$ wegen (a) die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt sind, ist $2C^3 \subseteq 2C^2 = 0$. Wählt man das Ideal B so, daß $C = B/A$, so gilt für B die Behauptung.

(d) Ist $S \circ (N \circ N) = 0$, so wählt man $a, b \in N$ mit $b \circ a \neq 0$ und setzt $C := \{b \circ a\}$. Da für $M := N$ und $R := S$ wegen (b) die Voraussetzungen von Lemma 2 erfüllt sind, gilt $2C^3 = 0$. Wählt man das Ideal B so, daß $C = B/A$, so gilt für B die Behauptung.

SATZ 1. Jeder schwach hyperkommutative Ring R besitzt ein nils Kommutatorideal R' .

BEWEIS. Sei A maximales Element der Menge

$$(J|J \text{ nils Ideal von } R, J \subseteq R').$$

Wir führen die Annahme $A \subset R'$ zum Widerspruch. Nach Lemma 3 gibt es ein Ideal B von R mit $A \subset B \subseteq R'$ und $2B^3 \subseteq A$. Für jedes Element b von B ist $2b^3$ als Element von A nil. Also gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $2^n b^{3n} = (2b^3)^n = 0$. Es folgt $b^n = 0$. Im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von A ist B nil.

SATZ 2. Jeder schwach hyperkommutative Ring R , der die Maximalbedingung für Ideale erfüllt, besitzt ein nilpotentes Kommutatorideal R' .

BEWEIS. Sei A maximales Element der Menge

$$(J|J \text{ nilpotentes Ideal von } R, J \subseteq R').$$

Wir führen die Annahme $A \subset R'$ zum Widerspruch. Nach Lemma 3 gibt es ein Ideal B von R mit $A \subset B \subseteq R'$ und $2B^3 \subseteq A$. Da A nilpotent ist, gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $2^n B^{3n} \subseteq (2B^3)^n \subseteq A^n = 0$. Es folgt $B^{3n} = 0$ im Widerspruch zur Maximaleigenschaft von A .

SATZ 3. Jeder schwach hyperkommutative Ring R mit Primzahlcharakteristik $p \neq 2$ ist hyperkommutativ.

BEWEIS. Sei S nicht kommutatives epimorphes Bild von R . Für alle $s \in S$ folgt aus $2s = 0$ stets $s = ps - 2((p-1)/2)s = 0$. Nach

Lemma 3 gibt es ein von 0 verschiedenes Ideal B von S mit $B \subseteq S'$, so daß $2B^3 = 0$, also $B^3 = 0$. Demnach ist R' hypernilpotent in R und nach [6; Satz 6, S. 407] R hyperkommutativ.

SATZ 4. Jeder Ring R mit auflösbarem assoziierten Lie-Ring, der die Bedingung $2r \neq 0$ für alle $r \in R$ mit $r \neq 0$ erfüllt, besitzt ein lokalnilpotentes Kommutatorideal R' .

BEWEIS. Sei $R_0 := R$ und $R_{i+1} := R_i \circ R_i$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen i . Es gibt eine natürliche Zahl n , so daß $R_n = 0$. Wir haben zu zeigen: Zu jeder endlichen Teilmenge M von R' gibt es natürliche Zahlen p und q , so daß $2^p M^q = 0$. Auf Grund der Voraussetzung über die Charakteristik von R folgt unmittelbar $M^q = 0$. Wegen $R_n = 0$ reicht es zu zeigen:

(a) Für $1 \leq i \leq n-1$ gilt: Ist M Untermodul von $\{R_i\}$ mit endlicher Basis, so gibt es natürliche Zahlen p und q , so daß $2^p M^q \subseteq \{R_{i+1}\}$.

Sei M Untermodul von $\{R_i\}$ mit endlicher Basis. Es gibt eine endliche Teilmenge N von R_i , so daß $M \subseteq \{N\}$. Anwendung von Lemma 2 auf $M := R_{i-1} + \{R \circ R_i\} / \{R \circ R_i\}$ und $R := R / \{R \circ R_i\}$ liefert $2\{r\}^3 \subseteq \{R \circ R_i\}$ für alle $r \in N$. Also gibt es eine natürliche Zahl k , so daß $2\{N\}^k \subseteq \{R \circ R_i\}$. Wegen $M \subseteq \{N\}$ folgt $2M^k \subseteq \{R \circ R_i\}$.

Sei $P := 2M^k$. Da P Modul mit endlicher Basis ist, gibt es eine endliche Teilmenge Q von $R \circ R_i$, so daß $P \subseteq \{Q\}$. Anwendung von Lemma 1 auf $M := R_i + \{R_{i+1}\} / \{R_{i+1}\}$ und $R := R / \{R_{i+1}\}$ liefert $2\{s\}^2 \subseteq \{R_{i+1}\}$ für alle $s \in Q$. Also gibt es eine natürliche Zahl m , so daß $2\{Q\}^m \subseteq \{R_{i+1}\}$. Wegen $P \subseteq \{Q\}$ folgt $2P^m \subseteq \{R_{i+1}\}$. Insgesamt folgt (a).

SATZ 5. Für die Einheitengruppe G eines schwach hyperkommutativen Ringes R gilt: Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild $V = G/N$ von G besitzt einen von 1 verschiedenen kommutativen oder ordnungsfiniten Normalteiler.

BEWEIS. Ist V kommutativ, so sind wir fertig. Sei also V nicht kommutativ und C maximales Element der Menge

$$(J|J \text{ Ideal von } R, J^a \subseteq N).$$

$S := R/C$ ist nicht kommutativ, da aus $R' \subseteq C$ folgen würde, daß $G' \subseteq (R')^a \subseteq C^a \subseteq N$, also V kommutativ wäre. Demnach ist

$$A := C \cap R' \subset R'.$$

Nach Lemma 3 gibt es ein Ideal B von R mit

$$A \subset B \subseteq R' \quad \text{und} \quad 2B^3 \subseteq A, \quad \text{also auch} \quad B \not\subseteq C.$$

Man setzt $D := B$ bzw. $D := B^2$, je nachdem, ob $B^2 \subseteq C$ oder $B^2 \not\subseteq C$. Dann gilt

$$D \not\subseteq C, \quad D \subseteq R' \quad \text{und} \quad 2D^2 \subseteq C.$$

Wir treffen eine Fallunterscheidung: Das Kompositum von Normalteilern U und W von G sei mit UvW bezeichnet.

(a) Gilt $(C + D)^2 \subseteq C$, so ist

$$h \bullet g = 1 + h^{-1}g^{-1}(h - 1 \circ g - 1) \in C^a \subseteq N$$

für alle $g, h \in (C + D)^a$, also $((C + D)^a v N) / N$ kommutativ. Aus $D \not\subseteq C$ folgt $C \subset C + D$, also wegen der Maximaleigenschaft von C auch $N \subset (C + D)^a v N$.

(b) Gilt dagegen $(C + D)^2 \not\subseteq C$, so ist $C \subset C + D^2$, also $N \subset (C + D^2)^a v N$. Aus $2D^2 \subseteq C$ folgt $2(C + D^2) \subseteq C$. Wegen $D^2 \subseteq R'$ ist D^2 nach Satz 1 nil. Sei $1 + c + d \in (C + D^2)^a$ mit $c \in C$ und $d \in D^2$. Da D^2 nil ist, gibt es eine natürliche Zahl n , so daß $d^n = 0$. Es folgt

$$(1 + c + d)^{2^n} \equiv (1 + d)^{2^n} \equiv 1 + d^{2^n} \equiv 1 \text{ modulo } C,$$

also $(1 + c + d)^{2^n} \in C^a \subseteq N$. Insgesamt folgt, daß $((C + D^2)^a v N) / N$ ordnungsfinit ist.

Im folgenden Teil der Untersuchung benütze ich wesentlich die Ergebnisse von Specht [5]. In Abänderung der Notation [5; S. 583] sei

$$x_i \circ x_j := x_i x_j - x_j x_i \quad (= [x_i, x_j])$$

für Unbestimmte x_i und x_j . Wir definieren folgende Formenmengen [5; S. 560]:

$$\begin{aligned} M_1 &:= (x_1 \circ x_2), \\ M_3 &:= ((x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4)), \\ M_4 &:= ((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \\ M_2 &:= M_3 \cup M_4. \end{aligned}$$

Weiter sei F der Formenring [5; S. 560], F^* der erweiterte Formenring [5; S. 563],

T_1 das von M_1 erzeugte T -Ideal [5; S. 565],

T_i das von M_i erzeugte T^* -Ideal [5; S. 565] für $2 \leq i \leq 4$,

$F_1 := F/T_1$ und $F_i := F^*/T_i$ für $2 \leq i \leq 4$.

F_i ist Ring vom Typus T_i [5; S. 562]. Wir nennen einen Ring R der Charakteristik 0 F_i -Ring, wenn in R wenigstens ein nicht in F_i gültiges Gesetz gilt.

LEMMA 4. Für Formen $f(x)$ ist gleichwertig:

(1) $f(x) = 0$ ist nicht Gesetz in F_1 .

(2) $f(x)$ geht nicht in die Nullform über, wenn man in jedem

Potenzprodukt die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet.

BEWEIS. Erfüllt $f(x)$ die Bedingung (2) nicht, so ist $f(x) = 0$ Gesetz in jedem kommutativen Ring, also auch in F_1 . Demnach folgt (2) aus (1). Genügt andererseits $f(x)$ der Forderung (2), so ist $f(x) = 0$ nicht Gesetz im kommutativen Ring der ganzen Zahlen, also auch nicht in F_1 . Somit folgt (1) aus (2).

LEMMA 5. Für jeden Ring R der Charakteristik 0 ist gleichwertig:

(1) R ist F_1 -Ring.

(2) Es gibt eine natürliche Zahl m , so daß für jedes $r \in R$ in $\langle r \rangle$ ein nicht in F_1 gültiges Gesetz $g_r(x) = 0$ der Dimension m_r [5; S. 562] mit $m_r \leq m$ gilt.

(3) R ist beschränkt nil.

(4) Es gibt natürliche Zahlen m und n , so daß $nM^m = 0$ für jede Teilmenge M mit $M \circ M = 0$ jedes epimorphen Bildes S von R .

BEWEIS. Aus (1) folgt unmittelbar (2). Aus (2) folgt (3):

(a) Nach [5; Satz 3, S. 568] und dem zum Beweis dieses Satzes verwendeten Verfahren zur Herleitung mehrfach linearer Gesetze [5; S. 567] gilt für jedes $r \in R$ in $\langle r \rangle$ ein nicht in F_1 gültiges mehrfach lineares Gesetz $h_r(x) = 0$ der Dimension n_r mit $n_r \leq m$.

(b) Indem man die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet entsteht aus $h_r(x)$ das im kommutativen Ring $\langle r \rangle$ gültige Gesetz

$$p_r \prod_{i=1}^{n_r} x_i = 0, \text{ wobei nach Lemma 4 } p_r \neq 0.$$

(c) Da R die Charakteristik 0 besitzt folgt $r^m = 0$ für alle $r \in R$.

Aus (3) folgt (1), da mit dem kommutativen Ring der ganzen Zahlen auch F_1 nicht beschränkt nil ist.

Aus (1) folgt (4): Zu (a) analoge Überlegungen erbringen, daß in R und damit auch in S ein nicht in F_1 gültiges mehrfach lineares Gesetz gilt. (b) entsprechende Überlegungen liefern wegen $M \circ M = 0$ die Behauptung.

Aus (4) folgt (3): Man wendet (4) auf die einelementigen Teilmengen (r) von R an und beachtet, daß R die Charakteristik 0 besitzt.

SATZ 6. Für Ringe R der Charakteristik 0 ist gleichwertig

(1) R ist nilpotent.

(2) R besitzt einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring und es gibt eine natürliche Zahl n , so daß für jedes $r \in R$ in $\langle r \rangle$ ein Gesetz $g_r(x) = 0$ der Dimension n_r mit $n_r \leq n$ gilt, welches nicht zur Nullform wird, wenn man in jedem Potenzprodukt die Unbestimmten nach wachsenden Indizes ordnet.

BEWEIS. Aus (1) folgt unmittelbar (2). Aus (2) folgt (1): Sei $R_0 := R$ und $R_{i+1} := R_i \circ R_i$ für alle nicht negativen ganzen Zahlen i . Wegen $R_i \circ R_i \subseteq \{R_{i+1}\}$ gibt es unter Berücksichtigung von Lemma 4 nach Lemma 5 natürliche Zahlen p und q , so daß $q(R_i)^p \subseteq \{R_{i+1}\}$. Mit $R \circ R_i \subseteq |R_i|$ folgt $q\{R_i\}^p \subseteq \{R_{i+1}\}$. Da R die Charakteristik 0 und einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring besitzt gilt (1).

Unmittelbar aus [5; Satz 3, S. 568, Satz 9, S. 576 und Satz 15, S. 584] folgt

LEMMA 6. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement folgt (2) aus (1) für $2 \leq i \leq 4$:

(1) In R gilt ein nicht in F_i gültiges Gesetz $g(x) = 0$ der Dimension m .

(2) Es gibt eine natürliche Zahl n mit $n \leq m$, so daß in R ein nicht in F_i gültiges Gesetz $f(x) = \sum n_j f_j(x) = 0$ gilt, wobei alle Formen $f_j(x)$ normierte Kommutatorprodukte in n Unbestimmten und n_j ganze Zahlen sind.

SATZ 7. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

- (1) Für alle $r, s \in R$ ist $\langle 1, r, s \rangle$ F_2 -Ring.
- (2) R ist kommutativ.
- (3) Für alle $r, s \in R$ ist $\langle 1, r, s \rangle$ Z_2 -Ring.

BEWEIS. Aus (1) folgt (2): Da in F_2 die Gesetze

$$(a) \quad (x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4) = 0 \quad \text{und} \quad (x_1 \circ x_2) \circ x_3 = 0$$

gelten, ist bei Anwendung von Lemma 6 auf $i = 2$ notwendig $n = 2$. Da $x_1 \circ x_2$ das einzige normierte Kommutatorprodukt in zwei Unbestimmten ist, ist $\langle 1, r, s \rangle$ für alle $r, s \in R$ und damit R kommutativ.

Aus (2) folgt (3), da Z_2 nicht kommutativ ist.

Aus (3) folgt (1), da in Z_2 die Gesetze (a) gelten.

Aus Satz 7 folgt unmittelbar

KOROLLAR 1. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

- (1) R ist F_2 -Ring.
- (2) R ist kommutativ.
- (3) R ist Z_2 -Ring.

Insbesondere besitzen F_2 und Z_2 den gleichen Typus.

SATZ 8. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

(1) Es gibt eine natürliche Zahl d , so daß für alle $r, s \in R$ in $\langle 1, r, s \rangle$ ein nicht in F_3 gültiges Gesetz $g_{r,s}(x) = 0$ der Dimension $d_{r,s}$ mit $d_{r,s} \leq d$ gilt.

(2) R erfüllt die beschränkte Engelbedingung.

(3) Es gibt eine natürliche Zahl d , so daß für alle $r, s \in R$ in $\langle 1, r, s \rangle$ ein nicht in Z_3 gültiges Gesetz $g_{r,s}(x) = 0$ der Dimension $d_{r,s}$ mit $d_{r,s} \leq d$ gilt.

BEWEIS. Aus (1) folgt (2): Nach Lemma 6 gilt für $r, s \in R$ in $S := \langle 1, r, s \rangle$ ein nicht in F_3 gültiges Gesetz

$$(a) \quad f(x) = \sum n_i f_i(x) + \sum m_i g_i(x) = 0,$$

wobei $f_i(x)$ normierte Kommutatorprodukte in n Unbestimmten mit $n \leq d$ sind, welche wenigstens zwei aufbauende (höhere) Kommutatorfaktoren [5; S. 583] besitzen, $g_i(x)$ normierte (höhere) Kommutatoren in n Unbestimmten und n_i und m_i ganze Zahlen sind. Mit Hilfe von

$$(b) \quad \left(\left((x_1 \circ x_2) \circ x_3 \right) \dots \circ x_{i_k} \right) \circ x_{i_{k+1}} \dots \circ x_{i_n} =$$

$$\left(\left((x_1 \circ x_2) \circ x_3 \right) \dots \circ x_{i_{k+1}} \right) \circ x_{i_k} \dots \circ x_{i_n} +$$

$$(c) \quad \left((x_1 \circ x_2) \circ x_3 \right) \dots \circ (x_{i_k} \circ x_{i_{k+1}}) \dots \circ x_{i_n}.$$

werde die Darstellung (a) folgendermaßen abgeändert:

Die Formen g_i sind paarweise verschiedene normierte (höhere) Kommutatoren der Gestalt (b) mit $i_3 < i_4 < \dots < i_n$. Die Formen $f_i(x)$ sind normierte Kommutatorprodukte mit wenigstens zwei (höheren) Kommutatorfaktoren oder Formen der Gestalt (c), wobei $k > 2$.

Da in F_3 alle Gesetze $f_i(x) = 0$ gelten, gibt es wenigstens eine von Null verschiedene ganze Zahl m_j . Für die Form g_j der Gestalt (b) kann o.B.d.A. $i_2 = 2$ angenommen werden. Da durch die Substitutionen

$$x_i \rightarrow x_1 \quad \text{für } i \neq 2 \quad \text{und} \quad x_2 \rightarrow x_1 \circ x_2$$

das in S gültige Gesetz $f(x) = 0$ in ein wiederum in S gültiges Gesetz übergeht und alle Formen in der abgeänderten Darstellung

(a) von $f(x)$ bis auf

$$g_j = \left((x_1 \circ (x_1 \circ x_2)) \circ x_1 \right) \dots \circ x_1 = \left(((x_2 \circ x_1) \circ x_1) \circ x_1 \right) \dots \circ x_1$$

zu Nullformen werden, gilt in S das Gesetz $g_j(x) = 0$.

Die Durchführung dieser Überlegungen für alle $r, s \in R$ erbringt, daß R die d -te Engelbedingung erfüllt.

Aus (2) folgt (3): Wegen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erfüllt Z_3 die beschränkte Engelbedingung nicht.

Aus (3) folgt (1), da in Z_3 das Gesetz $(x_1 \circ x_2)(x_3 \circ x_4) = 0$ gilt.
Man folgert sofort aus Satz 8

KOROLLAR 2. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

- (1) R ist F_3 -Ring.
- (2) R erfüllt die beschränkte Engelbedingung.
- (3) R ist Z_3 -Ring.

Insbesondere besitzen F_3 und Z_3 den gleichen Typus.

Mit [2; Theorem 1, p. 9] folgt aus Satz 8 und Korollar 2

SATZ 9. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement und auflösbaren assoziierten Lie-Ringen ist gleichwertig:

- (1) R ist Z_3 -Ring.
- (2) R besitzt einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring.
- (3) Es gibt eine natürliche Zahl n , so daß für alle $r, s \in R$ in $\langle 1, r, s \rangle$ ein nicht in Z_3 gültiges Gesetz $g_{rs}(x) = 0$ Der Dimension n_{rs} mit $n_{rs} < n$ gilt.

LEMMA 7. Für eigentlich $2n$ -fach lineare Formen $g(x)$ ist gleichwertig:

- (1) $g(x) \notin F_4$.
- (2) $g(x) \equiv m \prod_{i=1}^n (x_{2i-1} \circ x_{2i})$ modulo T mit $m \neq 0$.
- (3) $g(x) \notin Z_4$.

Insbesondere besitzen F_4 und Z_4 den gleichen Typus.

Hierbei sei T das eindeutig bestimmte kleinste Ideal des Formenringes F , welches die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

$$(x_1 \circ x_2) \circ x_3 \in T.$$

Gehört die Form $g(x_1, x_2, \dots, x_l)$ zu T , so gehört auch die Form $h(x) = g(f_1(x), f_2(x), \dots, f_l(x))$ zu T , die aus $g(x)$ durch die formalen Substitutionen $x_i \rightarrow f_i(x)$ für $1 \leq i \leq l$ mit beliebigen Formen $f_i(x)$ aus F erhalten wird.

BEWEIS. Es gilt

$$g(x) = \sum n_i g_i(x) + \sum m_i f_i(x),$$

wobei $g_i(x)$ normierte Kommutatorprodukte in $2n$ Unbestimmten sind, welche nur Kommutatorfaktoren der Länge 2 besitzen, $f_i(x)$ normierte Kommutatorprodukte in $2n$ Unbestimmten sind, welche wenigstens einen Kommutatorfaktor der Länge 3 besitzen und n_i und m_i ganze Zahlen sind. Es folgt unmittelbar

$$g(x) \equiv \sum n_i g_i(x) \text{ modulo } T.$$

Wegen

$$(x_j \circ x_k)(x_p \circ x_q) = -(x_j \circ x_p)(x_k \circ x_q) + (x_j \circ x_p) \circ (x_k \circ x_q) + \\ + (x_j \circ x_k x_p) \circ x_q - ((x_j \circ x_k) \circ x_q) r_p - x_k((x_j \circ x_p) \circ x_q)$$

und

$$(x_j \circ x_k) = -(x_k \circ x_j)$$

können in jedem $g_i(x)$ zwei beliebige formal benachbarte Unbestimmte bei gleichzeitigem Wechsel des Vorzeichens von n_i modulo T vertauscht werden. Hierdurch wird insgesamt (2) erreicht, wobei $m \neq 0$ wegen $T \subseteq T_4$:

Aus (2) folgt (3): Nach [7; S. 137] gilt $g(x)$ nicht in Z_4 , da der Typus von Z_4 das Ideal T umfaßt.

Da in Z_4 das Gesetz $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = 0$ gilt, folgt unmittelbar (1) aus (3).

LEMMA 8. Für jeden Ring R mit ${}^2R = 0$ gilt $\{{}^2R\}^2 = 0$.

BEWEIS. Seien $a, b, c, e, f, g, h \in R$. Indem man in

$$(a \circ b)(c \circ d) = (a \circ bc) \circ d - (b \circ d)(a \circ c) - ((a \circ b) \circ d)c - b((a \circ c) \circ d)$$

für b bzw. d die Kommutatoren $e \circ f$ bzw. $g \circ h$ einsetzt folgt

$$(a \circ (e \circ f))(c \circ (g \circ h)) = 0.$$

SATZ 10. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

- (1) Das Kommutatorideal R' von R ist nilpotent.

(2) Es gibt eine natürliche Zahl k , so daß ${}^kR = 0$ und R ist Z_4 -Ring.

BEWEIS. (2) folgt unmittelbar aus (1). Aus (2) folgt (1): Alle folgenden Überlegungen gelten für $0 \leq i \leq k-2$: Nach Lemma 8 ist $({}_2({}^iR))^2 \subseteq \{{}^{i+2}R\}$. Nach [6; Lemma 7.(3), S. 404] ist $R \circ_2 ({}^iR) \subseteq |{}_2({}^iR)|$ und deshalb weiter

$$(a) \quad \{({}^iR)\}^2 \subseteq \{{}^{i+2}R\}.$$

Nach Lemma 6 gilt in R ein eigentlich mehrfach lineares nicht in F_4 gültiges Gesetz $g(x) = 0$, welches Linearkombination von normierten Kommutatorprodukten ist. Da für eine ungerade Anzahl von Unbestimmten jede Linearkombination von Kommutatorprodukten Gesetz in F_4 ist, muß die Anzahl $2n$ der Unbestimmten von $g(x)$ gerade sein. Nach Lemma 7 gilt

$$g(x) = m \prod_{i=1}^n (x_{2i-1} \circ x_{2i}) + f \text{ mit } f \in T \text{ und } m \neq 0.$$

Also gilt für jeden Unterring S von R $m(S')^n \subseteq S^n$. Speziell gilt $m({}^{i+1}R)^n \subseteq \{({}^iR)\}$, also wegen $R \circ ({}^{i+1}R) \subseteq |{}^{i+1}R|$

$$(b) \quad m\{({}^{i+1}R)\}^n \subseteq \{({}^iR)\}.$$

Aus (a) und (b) folgt

$$m^2\{({}^{i+1}R)\}^{2n} \subseteq \{{}^{i+2}R\}.$$

Da R die Charakteristik 0 besitzt und ${}^kR = 0$ gilt, ist R' nilpotent.

SATZ. 11. Für Ringe R der Charakteristik 0 mit Einselement ist gleichwertig:

- (1) R ist Ring endlicher Klasse.
- (2) R besitzt einen auflösbaren assoziierten Lie-Ring und R ist Z_3 - und Z_4 -Ring.

BEWEIS. (a) Nach [3; Theorem 6.5, S. 353 und Theorem 5.6, S. 350] ist R Ring endlicher Klasse genau dann, wenn R' nilpotent ist und R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring besitzt.

Nach den Sätzen 9 und 10 folgt mit (a) aus (1) unmittelbar (2).

Aus (2) folgt (1): Nach Satz 9 besitzt R einen nilpotenten assoziierten Lie-Ring. Nach [4; Theorem 1, S. 595] ist R'' nilpotent. Also gibt es eine natürliche Zahl k , so daß ${}^k R = 0$. Nach Satz 10 ist R' nilpotent. Insgesamt folgt wegen (a) die Behauptung.

BEISPIEL 2. Wir bezeichnen mit $\beta(i_1, i_2, \dots, i_n)$ das Vorzeichen der Permutation $\begin{pmatrix} 1, 2, \dots, n \\ i_1, i_2, \dots, i_n \end{pmatrix}$. Gilt in einem Ring R ein n -fach lineares Gesetz

$$\sum_{i=1}^{n!} n_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = 0$$

mit $\sum_{i=1}^{n!} n_i \beta(i_1, i_2, \dots, i_n) \neq 0$, so ist R ein Z_4 -Ring, wie man unmittelbar nachprüft.

Da nach [1; Lemma 2.35, p. 117] jede Algebra der Dimension $n - 1$ über einem Körper F der Charakteristik 0 der Standardidentität

$$(a) \quad \sum \beta(i_1, i_2, \dots, i_n) x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}$$

genügt, ist jede dieser Algebren Z_4 -Ring. Hierbei wird in (a) über alle Permutationen von $(1, 2, \dots, n)$ summiert.

LITERATUR

- [1] I. N. HERSTEIN, *Theory of rings*, University of Chicago, Mathematics Lecture Notes, Spring, 1961.
- [2] P. J. HIGGINS, *Lie-Rings satisfying the Engelcondition*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, vol. 50.
- [3] S. A. JENNINGS, *Central chains of ideals in an associative ring*, Duke Mathematical Journal, vol. 9, pp. 341-355.
- [4] S. A. JENNINGS, *On rings whose associated Lie rings are nilpotent*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 53, pp. 593-597.
- [5] W. SPECHT, *Gesetze in Ringen, I*, Mathematische Zeitschrift, Band 52, S. 557-589.

- [6] W. STREB, *Über schwach hyperzentrale Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLIV, S. 399-409.
- [7] W. STREB, *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLVI, S. 137-139.
- [8] W. STREB, *Über Ringe, die von ihren Einheitengruppen erzeugt werden*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLVII.
- [9] W. STREB, *Über die Endlichkeit niler Ringe*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XLVIII.

Manoscritto pervenuto in redazione il 15 ottobre 1972.