RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

PAOLO DENTONI
MICHELE SCE

Funzioni regolari nell'algebra di Cayley

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 50 (1973), p. 251-267
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1973__50__251_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 50 (1973)

Funzioni regolari nell'algebra di Cayley.

PAOLO DENTONI e MICHELE SCE (*)

1. Alcune considerazioni portano a ritenere che una teoria delle funzioni che conservi le caratteristiche essenziali di quella classica di una variabile complessa, possa svolgersi solo nelle algebre con divisione (1). Come è noto, tra le algebre reali alternative di dimensione finita risultano con divisione solo l'algebra dei numeri reali $\boldsymbol{R}$, dei numeri complessi $\boldsymbol{C}$, dei quaternioni Q e l'algebra di Cayley C (2). Nei quaternioni è stata da tempo sviluppata, ad opera di G. C. Moisil, R. Fueter e altri Autori, una teoria basata su una generalizzazione della condizione di Cauchy-Riemann $\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y = 0$ (*funzioni regolari*). Questa teoria, sebbene carente della parte differenziale classica (derivate, primitive), ha ottenuto un notevole successo per quanto riguarda le proprietà integrali (teoremi di tipo Cauchy) e il collegamento con le funzioni armoniche. Scopo di questo lavoro è di estendere all'algebra di Cayley i risultati ottenuti da G. C. Moisil e R. Fueter nei quaternioni.

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto Matematico - Via dell'Università, 12 - 43100 Parma.

Lavoro eseguito con contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo G.N.S.A.G.A.

(1) As es., per un risultato di M. SCE [12], le algebre con divisione sono le sole algebre associative nelle quali le componenti delle funzioni regolari soddisfano a equazioni di tipo ellittico.

(2) Vedi p. es., R. D. SCHAFER [14], p. 48. Le algebre sopra elencate sono precisamente le *algebre reali con composizione* (Teorema di Hurwitz). Ciascuna di esse può ottenersi dalla precedente in modo analogo a quello che conduce dall'algebra $\boldsymbol{R}$ all'algebra $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}i$ (processo di Cayley-Dickson). Vedi p. es. N. JACOBSON [8].

La definizione di funzione regolare (D_1, n. 3) e alcuni risultati, come per esempio *il collegamento tra le funzioni regolari e le funzioni armoniche* (P_1, n. 3), si estendono al caso dell'algebra di Cayley C senza modifiche di rilievo. Più spesso, invece, sorgono difficoltà, dovute alla mancanza della proprietà associativa. Questa circostanza conduce in modo naturale ad introdurre in C una particolare classe di funzioni regolari f, caratterizzate dalla proprietà, banale nel caso associativo, che la funzione cf ($c \in C$) risulta regolare a destra (*funzioni biregolari*) (T_1, n. 3).

Questa classe di funzioni appare strettamente legata ad altre importanti classi di funzioni considerate nelle algebre (*funzioni primarie, funzioni intrinseche*) (3), le quali comprendono come caso particolare la serie di potenze a coefficienti scalari. In primo luogo si estende all'algebra C un risultato di R. F. Rinehart relativo ai quaternioni; precisamente, *nell'algebra di Cayley le funzioni primarie e le funzioni intrinseche risultano coincidenti* (T_2, n. 4). Si ottiene poi l'estensione all'algebra C di un teorema stabilito da R. Fueter per i quaternioni Q; precisamente risulta che *per ogni funzione intrinseca analitica f, la funzione $\Delta^3 f$ è biregolare* (T_3, n. 6). In particolare, *nell'algebra di Cayley per ogni serie di potenze convergente $f(x) = \sum a_n x^n$ ($a_n \in C$) la funzione $\Delta^3 f$ risulta regolare a destra* (C_1, n. 6).

L'interesse delle funzioni biregolari si rivela soprattutto in relazione al *teorema integrale*. Diversamente dal caso dei quaternioni, non sussiste nell'algebra di Cayley C un teorema integrale con riferimento ad una coppia di funzioni f, g regolari rispettivamente a destra, sinistra. Per la validità del teorema, *occorre che una delle due funzioni sia biregolare* (T_4, n. 7). Il teorema integrale consente però ugualmente di ottenere una *formula integrale di tipo Cauchy per le funzioni regolari nell'algebra C* (T_5, n. 8), assumendo come nucleo una opportuna funzione biregolare.

Dalla formula integrale discendono le classiche conseguenze. In particolare, *le componenti delle funzioni regolari sono di classe C^∞*.

2. L'algebra di Cayley.

Come è noto, l'algebra di Cayley C sul corpo $\boldsymbol{R}$ dei numeri reali è l'insieme delle coppie ordinate di quaternioni, con la legge di mol-

---

(3) Per queste funzioni, vedi p. es., R. F. Rinehart [10].

tiplicazione

$$(q_1, q_1') \cdot (q_2, q_2') = (q_1 q_2 - \bar{q}_2' q_1', q_2' q_1 + q_1' \bar{q}_2) \tag{1}$$

essendo $\bar{q}_2$, $\bar{q}_2'$ il quaternione *coniugato* di q_2, q_2' ([4]).

Denotata con $i_0 = 1, i_1, i_2, i_3$ la base ordinaria nel corpo Q dei quaternioni, conviene considerare in C la base costituita dagli elementi

$$u_h = \begin{cases} (i_h, 0) & \text{per } h = 0, \dots, 3, \\ (0, i_{h-4}) & \text{per } h = 4, \dots, 7. \end{cases}$$

L'elemento u_0 funge da *elemento neutro* in C, e sarà nel seguito identificato con l'elemento neutro scalare 1.

L'algebra C risulta *non associativa.* Essa è però un'algebra alternativa ([5]), cioè in C l'*associatore* $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ è una funzione trilineare *alternante* nelle variabili $x, y, z \in C$. In particolare, sussistono le *leggi alternative sinistra, destra*

$$a(ax) = a^2 x, \qquad (xa)a = xa^2 \tag{2}$$

e la *legge flessibile*

$$a(xa) = (ax)a. \tag{3}$$

Considerato l'elemento generico $x = \sum_{h=0}^{7} \xi_h u_h$ di C, si denotano poi con $\bar{x} = \xi_0 u_0 - \xi_1 u_1 - \dots - \xi_7 u_7$ l'elemento *coniugato* di x, con $\mathrm{Tr}\, x = x + \bar{x}$ la *traccia* di x, e con $|x|^2 = \sum_{h=0}^{7} \xi_h^2 = N(x)$ la *norma* di x.

Il coniugio $x \to \bar{x}$, come nel caso dei quaternioni, riesce intrinsecamente caratterizzato dall'essere l'unico *antiautomorfismo involutorio* di C tale che per ogni $x \in C$ si abbia $x + \bar{x}$, $x\bar{x} \in \boldsymbol{R}.1$ ([6]).

([4]) Per le proprietà essenziali dell'algebra di Cayley, vedi p. es., N. JACOBSON [8], R. D. SCHAFER [14].

([5]) Per le nozioni fondamentali sulle algebre non associative e in particolare alternative, vedi p. es., R. D. SCHAFER [14].

([6]) Vedi p. es., R. D. SCHAFER [14], p. 45-49.

Risulta poi

$$xx̄ = x̄x = |x|^2 , \qquad |xy| = |x| \cdot |y| \ (^7) \tag{4}$$

e quindi ogni elemento $x \in C$ ammette inverso $x^{-1} = \bar{x}/|x|^2$ (8).

La norma N risulta una forma quadratica definita positiva su C. La sua forma bilineare associata

$$(x, y) = \tfrac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}) \tag{5}$$

si dice *prodotto scalare* degli elementi $x, y \in C$, e dà all'algebra C la struttura di uno spazio di Hilbert reale. Rispetto al prodotto scalare (5), la base $u_0, \dots, u_7$ scelta in C risulta *ortonormale.*

Dalle (4), (5) appare immediatamente che le nozioni di norma e prodotto scalare risultano *indipendenti dalla scelta di una base* in C.

3. Funzioni regolari.

Sia U un aperto di C, ed f: $U \to C$ una funzione di classe C^1 in U. Denotato con D l'operatore di Fueter e Moisil

$$D = u_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0} + \dots + u_7 \frac{\partial}{\partial \xi_7}, \tag{6}$$

si introduce la definizione:

D_1 – *Una funzione f, di classe C^1 in un aperto U di C, si dice regolare a sinistra, destra in U, se ivi risulta rispettivamente*

$$Df = \sum_{h=0}^{7} u_h \frac{\partial f}{\partial \xi_h} = 0 , \qquad fD = \sum_{h=0}^{7} \frac{\partial f}{\partial \xi_h} u_h = 0 \ (^9) . \tag{7}$$

La definizione D_1 dipende dalla base scelta $u_0, \dots, u_7$ in C. Tuttavia *l'insieme delle funzioni regolari a destra, sinistra rimane inalterato se*

---

(7) Vedi p. es., R. D. SCHAFER [14], p. 45-46.

(8) L'unicità dell'inverso può provarsi come nel caso associativo, servendosi delle relazioni $a(\bar{a}x) = (a\bar{a})x$, $(xa)\bar{a} = x(a\bar{a})$, equivalenti alle (2).

(9) Sulle funzioni regolari in un'algebra associativa, vedi p. es., G. C. MOISIL [9], R. FUETER [4, 6]. Un'ampia bibliografia in V. IFTIMIE [7].

nelle (7) *in luogo di* $\{u_h\}$ *si assume un'altra arbitraria base ortonormale* $\{v_h\}$ *di* C (n. 2). Invero, la matrice del cambiamento di base $\{u_h\}$, $\{v_h\}$ risulta ortogonale. Segue facilmente l'asserto ([10]).

Considerato poi l'*operatore coniugato* di D

$$\bar{D} = u_0 \frac{\partial}{\partial \xi_0} - u_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} - \dots - u_7 \frac{\partial}{\partial \xi_7},$$

sussistono le relazioni

$$D\bar{D} = \bar{D}D = \Delta \tag{8}$$

essendo Δ il Laplaciano in otto variabili. Ne segue la proposizione:

P_1 – *Ogni funzione* f *regolare a destra, sinistra in un aperto* U *di* C, *è ivi armonica, cioè risulta in* U:

$$\Delta f = 0 .$$

Per la dimostrazione, basta utilizzare la (8), tenendo presente che le funzioni regolari, come si vedrà al n. 8, sono di classe C^∞.

Una estesa classe di funzioni regolari a destra e a sinistra si costruisce utilizzando la proposizione:

P_2 – *Per ogni funzione* α *armonica in un aperto* U *di* C *e a valori scalari, la funzione* $f = \bar{D}\alpha = \alpha\bar{D}$ *riesce regolare a destra e a sinistra in* U.

L'asserto segue immediatamente dalla (8).

Le funzioni regolari f ottenute, in base alla proposizione P_2, a partire da una funzione armonica scalare α, si dicono *funzioni biregolari*. Esse sono caratterizzate dalle seguenti proprietà:

P_3 – *Una funzione* $f = \varphi_0 u_0 + \dots + \varphi_7 u_7$, *di classe* C^1 *in un aperto* U *di* C, *risulta biregolare in* U, *se e solo se riescono ivi soddisfatte le relazioni*

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} + \dots + \frac{\partial \varphi_7}{\partial \xi_7}; \qquad \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_h} + \frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_0} = 0 \qquad (h = 1, \dots, 7), \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial \xi_k} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_h} \qquad (h, k = 1, \dots, 7). \tag{10}$$

([10]) Vedi M. Sce [11], p. 32, nota ([8]). Vedi anche P. Dentoni [3].

Invero, le (9), (10) sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè esista una funzione scalare α con

$$\Delta\alpha = 0\,; \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_0} = \varphi_0\,, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_1} = -\varphi_1, \dots, \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_7} = -\varphi_7\,.$$

P$_4$ – *Una funzione f regolare a sinistra* (*a destra*) *in un aperto U di C, risulta in U biregolare se e solo se riesce ivi soddisfatta la* (10).

P$_4$ discende immediatamente dalla relazione

$$Df = \sum_{i,j=0}^{7} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i} u_i u_j = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 7} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi_i} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi_j}\right) u_i u_j + \\ + \sum_{h=1}^{7} \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi_h} + \frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_0}\right) u_h + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial\xi_0} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1} - \dots - \frac{\partial\varphi_7}{\partial\xi_7}\right) u_0\,.$$

Un'altra caratterizzazione delle funzioni biregolari nell'algebra C è data dal teorema:

T$_1$ – *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione f, di classe C^1 in un aperto U di C, sia biregolare in U, è che per ogni elemento $c \in C$ la funzione fc risulti regolare a sinistra in U* ([11]).

Invero, sia $f = \sum_h \varphi_h u_h$. Tenuto presente il carattere alternante dell'associatore può scriversi

$$(11) \qquad D(fc) = \sum_h u_h \left(\frac{\partial f}{\partial\xi_h} c\right) = (Df)\,c - \sum_h \left(u_h, \frac{\partial f}{\partial\xi_h}, c\right) = \\ = (Df)\,c + \sum_{1\leqslant h<k\leqslant 7} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_h}\right) (u_h, u_k, c)\,.$$

Sia ora f biregolare in U. Per la proposizione P_4, l'ultimo membro di (11) è nullo, onde fc riesce regolare a sinistra. Inversamente, se fc è regolare a sinistra per ogni c (e quindi anche per $c = u_0$) si ha $D(fc) = Df = 0$ onde la (11) si riduce a

$$\sum_{1\leqslant h<k\leqslant 7} \left(\frac{\partial\varphi_h}{\partial\xi_k} - \frac{\partial\varphi_k}{\partial\xi_h}\right) (u_h, u_k, c) = 0$$

([11]) Il teorema può anche enunciarsi con riferimento alla regolarità destra della funzione cf.

per ogni $c \in C$. Tenuto conto della proposizione P_4, per giungere all'asserto basta provare il lemma

L_1 – *Nell'algebra C, le trasformazioni lineari*

$$L_{h,k}(x) = (u_h, u_k, x) \qquad 1 \leqslant h < k \leqslant 7$$

sono fra loro linearmente indipendenti.

Ora, se nella relazione

$$\sum_{1 \leqslant h < k \leqslant 7} \lambda_{hk}(u_h, u_k, x) = 0 \qquad (\lambda_{hk} \in \boldsymbol{R}),$$

si pone successivamente $x = u_4$, $x = u_1$, $x = u_5$, si ottiene

$$\lambda_{12} - \lambda_{56} = 0 , \qquad \lambda_{56} - \lambda_{47} = 0 , \qquad \lambda_{47} + \lambda_{12} = 0$$

e quindi $\lambda_{12} = 0$. Per gli altri coefficienti λ_{hk} ci si riconduce al caso ora considerato, operando una conveniente permutazione sugli elementi della base (12).

Una notevole classe di funzioni regolari a destra e a sinistra, che rientra in quella delle funzioni biregolari, si ottiene partendo dalla considerazione delle *funzioni intrinseche* dell'algebra C. Ad esse è dedicato il n. 4.

4. Funzioni intrinseche nell'algebra di Cayley.

In un'arbitraria algebra A, si dicono *intrinseche* le funzioni f che risultino *permutabili con gli automorfismi dell'algebra*, cioè tali che si abbia

$$f(\omega x) = \omega f(x)$$

per ogni automorfismo ω di A (13).

---

(12) Si consideri in C una base ausiliaria del tipo $v_0 = u_0$, $v_1 = u_h$, $v_2 = u_k$ $v_3 = u_h u_k$, $v_4 = u_s$, $v_5 = u_s u_h$, $v_6 = u_s u_k$, $v_7 = u_s(u_h u_k)$ Si riconosce facilmente, che le basi $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ hanno le stesse tavole di moltiplicazione.

(13) Sulle funzioni intrinseche nelle algebre, vedi R. F. RINEHART [10]. Per il caso dei quaternioni, vedi anche C. G. CULLEN [2].

Esempi di funzioni intrinseche sono forniti dalle *serie di potenze* $\sum \alpha_n x^n$, *a coefficienti* α_n *scalari.*

La classe più interessante di funzioni intrinseche, che comprende l'esempio ora citato, è costituito dalle *funzioni primarie*, che possono riguardarsi come ottenute per prolungamento all'algebra di ordinarie funzioni della variabile complessa $\zeta = \xi + i\eta$. Nell'algebra di Cayley, la definizione è la seguente ([14]).

Sia

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\xi, \eta) + i\psi_2(\xi, \eta)$$

una funzione definita in un aperto del corpo complesso $\boldsymbol{C}$, a valori in $\boldsymbol{C}$, con le condizioni

$$\psi_1(\xi, -\eta) = \psi_1(\xi, \eta)\,, \qquad \psi_2(\xi, -\eta) = -\psi_2(\xi, \eta)\,. \tag{12}$$

Si consideri poi per l'elemento generico x di C la decomposizione canonica

$$x = \xi_0 \cdot 1 + \hat{x} \tag{13}$$

dove $\xi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} x$ e $\operatorname{Tr} \hat{x} = 0$. Posto $\lambda^2 = N(\hat{x}) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$, $X = (1/\lambda)\hat{x}$, la (13) si scrive

$$x = \xi_0 \cdot 1 + \lambda X\,. \tag{14}$$

Ciò premesso, la funzione

$$f(x) = \psi_1(\xi_0, \lambda) \cdot 1 + X\psi_2(\xi_0, \lambda) \tag{15}$$

che, in virtù delle (12), non dipende dal segno scelto per λ, si dice *la funzione primaria generata dalla funzione di variabile complessa* ψ.

Le funzioni primarie nell'algebra C risultano intrinseche ([15]). In-

---

([14]) In un'arbitraria algebra A, il prolungamento della funzione $\psi(\zeta)$ viene usualmente definito per mezzo della formula di interpolazione di Hermite. Si verifica senza difficoltà, in modo del tutto analogo al caso dei quaternioni (vedi R. F. Rinehart [10], Theor. 8.1), che nell'algebra di Cayley tale definizione coincide con quella indicata nel testo.

([15]) Il risultato è ben noto, con riferimento ad una arbitraria algebra associativa. Vedi R. F. Rinheart [10], Theor. 4.4.

vero, per ogni automorfismo ω di C riesce

$$\omega x = \xi_0 \cdot 1 + \lambda \omega X$$

e poichè $|\omega X| = |X| = 1$, $\operatorname{Tr} \omega X = \operatorname{Tr} X = 0$ ([16]), segue l'asserto. Nel caso attuale sussiste anzi il teorema, estensione di un noto risultato relativo all'algebra dei quaternioni ([17]):

T_2 – *Nell'algebra di Cayley, le funzioni intrinseche coincidono con le funzioni primarie.*

Alla dimostrazione di T_2 è dedicato il n. 5.

5. Conviene premettere qualche lemma sugli automorfismi di C.

L_2 – *Per ogni coppia di elementi ortogonali a, b di C con $|a| = |b| = 1$, $\operatorname{Tr} a = \operatorname{Tr} b = 0$, esiste un automorfismo ω dell'algebra C tale che $\omega a = a$, $\omega b = -b$.*

Invero, sia c un elemento di C con $|c| = 1$, e ortogonale al sottospazio generato dagli elementi $1, a, b, ab$. Denotato con $\tilde{Q}$ il sottospazio di C generato dagli elementi $1, a, c, ac$ e tenuto conto delle (2), (4), (5) si verifica senza difficoltà che *$\tilde{Q}$ è una sottoalgebra, isomorfa all'algebra Q dei quaternioni.* L'elemento b, che per ipotesi riesce ortogonale ad $1, a, c$ risulta anche ortogonale ad ac. Invero per una nota proprietà del prodotto scalare in C ([18])

$$(ac, b) = (c, \bar{a}b) = -(c, ab) = 0\ .$$

In conclusione b è ortogonale a $\tilde{Q}$. Ciò premesso, si assume come automorfismo ω la trasformazione lineare (*riflessione*) di C in sè, nella quale gli elementi di $\tilde{Q}$ sono uniti e quelli del sottospazio $\tilde{Q}^{\perp}$, ortogonale a Q, cambiano di segno ([19]).

L_3 – *Per ogni coppia di elementi indipendenti x, y di C con $|x| = |y| = 1$, $\operatorname{Tr} x = \operatorname{Tr} y = 0$, esiste un automorfismo ω dell'algebra C*

([16]) Vedi p. es., N. Jacobson [8], p. 65.
([17]) Vedi R. F. Rinehart [10], p. 15.
([18]) Vedi p. es., N. Jacobson [8], p. 57, (8).
([19]) Vedi N. Jacobson [8], p. 66.

tale che risulti $\omega x = x$, $\omega y \neq y$.

Posto

$$a = x\,, \qquad b = \frac{y - (x, y)x}{|y - (x, y)x|}$$

(per ipotesi $y - (x, y)x \neq 0$), riesce $|b| = 1$, $\operatorname{Tr} b = 0$, $(a, b) = 0$ onde per L_2 esiste un automorfismo ω di C tale che $\omega x = x$, $\omega b = -b$ da cui

$$\omega y = 2(x, y)x - y \neq y\,.$$

L_4 - *Per ogni coppia di elementi* x, y *di* C *con* $|x| = |y|$, $\operatorname{Tr} x = \operatorname{Tr} y = 0$, *esiste un automorfismo* ω *di* C *tale che risulti* $\omega x = y$.

Ovviamente, può supporsi $x - y \neq 0$. Sia dapprima anche $x + y \neq 0$. Posto allora $a = (x + y)/|x + y|$, $b = (x - y)/|x - y|$ riesce $|a| = |b| = 1$, $\operatorname{Tr} a = \operatorname{Tr} b = 0$, $(a, b) = 0$ onde per L_2 esiste un automorfismo ω con $\omega a = a$, $\omega b = -b$. Ne discende facilmente l'asserto. Nel caso invece che $x + y = 0$, sia a un qualsiasi elemento di C con $|a| = 1$ e ortogonale a $1, x$. Posto allora $b = x/|x|$, il lemma L_2 conduce subito all'asserto.

Tuttociò premesso, si passa alla dimostrazione di T_2. Sia f una qualsiasi funzione intrinseca dell'algebra C; occorre provare che f è primaria. A tal fine, in analogia con la (14) si scriva

$$f(x) = \varphi_0 \cdot 1 + \mu Y \tag{16}$$

con φ_0, $\mu \in \boldsymbol{R}$, $\operatorname{Tr} Y = 0$, $|Y| = 1$. Denotato con ω un qualsiasi automorfismo di C tale che $\omega X = X$ (e quindi $\omega x = x$), risulta

$$\varphi_0 \cdot 1 + \mu Y = f(x) = f(\omega x) = \omega f(x) = \varphi_0 \cdot 1 + \mu \omega Y\,. \tag{17}$$

Sia ora $\mu \neq 0$. La (17) porge allora $\omega Y = Y$; dal lemma L_3 segue necessariamente la lineare dipendenza di X e Y, onde $Y = \varepsilon X$ con $\varepsilon = \pm 1$. Posto

$$\psi_1(\xi_0, \lambda, X) = \varphi_0\,; \qquad \psi_2(\xi_0, \lambda, X) = \varepsilon\mu$$

può scriversi in ogni caso

$$f(x) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X) \cdot 1 + X \psi_2(\xi_0, \lambda, X) \tag{18}$$

ed evidentemente risulta

$$(19)\quad \psi_1(\xi_0, -\lambda, -X) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X)\,; \quad \psi_2(\xi_0, -\lambda, -X) = -\psi_2(\xi_0, \lambda, X)\,.$$

Le funzioni ψ_1, ψ_2 ***risultano indipendenti da*** X. Invero, sia X' un qualunque elemento di C con $\operatorname{Tr} X' = 0$, $|X'| = 1$. Per L_4 esiste un automorfismo ω di C tale che $\omega X = X'$, e pertanto sussistono le relazioni

$$f(\omega x) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X')\cdot 1 + X'\psi_2(\xi_0, \lambda, X')$$

$$\omega f(x) = \psi_1(\xi_0, \lambda, X)\cdot 1 + X'\psi_2(\xi_0, \lambda, X)\,.$$

Poichè per ipotesi $f(\omega x) = \omega f(x)$, si ottiene

$$\psi_1(\xi_0, \lambda, X') = \psi_1(\xi_0, \lambda, X) = \psi_1(\xi_0, \lambda)$$

$$\psi_2(\xi_0, \lambda, X') = \psi_2(\xi_0, \lambda, X) = \psi_2(\xi_0, \lambda)$$

e cioè l'asserto. In particolare, le (18), (19) sono relazioni del tipo (15), (12) rispettivamente; in altri termini la funzione intrinseca f coincide con la funzione primaria generata dalla funzione di variabile complessa $\psi(\xi + i\eta) = \psi_1(\xi, \eta) + i\psi_2(\xi, \eta)$.

Il teorema T_2 è così completamente dimostrato.

Nel seguito, intervengono principalmente le funzioni intrinseche f generate da funzioni $\psi(\zeta)$ *olomorfe*. Le funzioni f si dicono in tal caso *funzioni intrinseche analitiche*, e comprendono fra l'altro le *funzioni definite da serie convergenti di potenze positive o negative della variabile* x *di* C, *a coefficienti scalari*:

$$(20)\qquad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n x^n \qquad (\alpha_n \in \boldsymbol{R})\,.$$

Non è difficile verificare, invero, che la (20) è la funzione primaria generata dalla funzione olomorfa

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \zeta^n\,.$$

6. Funzioni intrinseche analitiche e funzioni biregolari.

La considerazione delle funzioni intrinseche analitiche consente di costruire nell'algebra di Cayley C una importante classe di funzioni regolari a destra e a sinistra, contenuta fra le funzioni biregolari (n. 3).

Precisamente, denotato con Δ il Laplaciano nelle variabili $\xi_0, \ldots, \xi_7$, sussiste il seguente teorema, estensione di un noto risultato di R. Fueter nei quaternioni ([20]):

T$_3$ – *Per ogni funzione intrinseca analitica f in un aperto U di C, la funzione*

$$g = \Delta^3 f \tag{21}$$

risulta biregolare in U.

Le funzioni (21), *con f intrinseca analitica, coincidono precisamente con le funzioni biregolari ottenute da una funzione armonica $\alpha(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_7)$ che risulti dipendente soltanto dalle due quantità ξ_0 e $\xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$.*

La prima affermazione contenuta in T$_3$ discende immediatamente da un risultato più generale di M. Sce, relativo ai moduli quadratici ([21]).

Per dimostrare la seconda parte di T$_3$, si consideri dapprima una qualsiasi funzione intrinseca analitica f. Dalla (15) si ottiene senza difficoltà ([22])

$$D\Delta^2 f = -48\left(\frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^4}\frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda} + 3\frac{1}{\lambda^5}\psi_2\right). \tag{22}$$

Pertanto la funzione $\alpha = D\Delta^2 f$ è una funzione scalare. Essa dipende dalle sole quantità ξ_0, $\lambda^2 = \xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$ perchè per le (12) il secondo membro della (22) è funzione pari di λ. Inoltre riesce per la (8)

$$\bar{D}\alpha = \Delta^3 f = g\,, \qquad \Delta\alpha = Dg = 0$$

onde la funzione biregolare $g = \Delta^3 f$ è ottenuta da una funzione armonica α del tipo richiesto.

Viceversa, sia ora α una funzione armonica delle variabili $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_7$ dipendente dalle sole quantità $\xi_0, \xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2$ Si noti anzitutto che α può riguardarsi come una funzione $\alpha(\xi_0, \lambda)$ delle due variabili reali ξ_0 e $\lambda = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_7^2}$, con la proprietà $\alpha(\xi_0, -\lambda) = \alpha(\xi_0, \lambda)$. Ciò pre-

---

([20]) Vedi R. Fueter [4], p. 314.

([21]) Vedi M. Sce [13], p. 224, n. 6. Si tenga presente la proposizione P_4, dopo aver osservato che f, e quindi anche g, soddisfa la (10).

([22]) I calcoli possono abbreviarsi con l'uso delle relazioni (8), (9) di M. Sce [13].

messo, si consideri la funzione

$$(23)\qquad \psi_2(\xi_0, \lambda) = \frac{5}{48}\int_0^{\xi_0} \frac{\lambda^3(\xi_0-\vartheta) - \lambda(\xi_0-\vartheta)^3}{2}\,\alpha(\vartheta, 0)\,d\vartheta - \\ - \frac{1}{48}\int_0^{\lambda} \frac{\lambda^3\nu - \lambda\nu^3}{2}\,\alpha(\xi_0, \nu)\,d\nu\,,$$

che, come facilmente si verifica, è soluzione dell'equazione

$$(24)\qquad \frac{1}{\lambda^3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial\lambda^2} - 3\frac{1}{\lambda^4}\frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda} + 3\frac{1}{\lambda^5}\psi_2 = -\frac{1}{48}\alpha\,.$$

Tenuto conto che per ipotesi risulta

$$0 = \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi_0^2} + \dots + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi_7^2} = \frac{\partial^2\alpha}{\partial\xi_0^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial\lambda^2} + \frac{6}{\lambda}\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\,,$$

non è poi difficile verificare che ψ_2 *è funzione armonica delle due variabili* ξ_0, λ. Siano ora

$$(25)\qquad \psi_1(\xi_0, \lambda) = \int_0^{\xi_0} \frac{\partial\psi_2}{\partial\lambda}(\vartheta, 0)\,d\vartheta - \int_0^{\lambda} \frac{\partial\psi_2}{\partial\xi_0}(\xi_0, \nu)\,d\nu$$

la funzione armonica coniugata di ψ_2 e $\psi(\zeta)$ la funzione olomorfa

$$\psi(\xi_0 + i\lambda) = \psi_1(\xi_0, \lambda) + i\psi_2(\xi_0, \lambda)\,.$$

Poichè $\alpha(\xi_0, \lambda)$ è funzione pari nel secondo argomento, dalle (23), (25) appare che ψ_2 e ψ_1 riescono funzioni rispettivamente dispari e pari di λ, onde risultano soddisfatte le (12). Sia allora *f la funzione intrinseca analitica generata dalla funzione ψ*. Tenuta presente la (24), dalla (22) segue

$$D\Delta^2 f = \alpha$$

onde ricordando la (8) può scriversi

$$g = \bar{D}\alpha = \Delta^3 f\,.$$

Pertanto la funzione g proviene, tramite l'operatore Δ^3, dalla funzione intrinseca analitica f. Il teorema T_3 è così completamente dimostrato.

Si segnala il seguente corollario di T_3:

C_1 – *Per ogni serie di potenze*

$$f(x) = \sum a_n x^n \qquad (a_n \in C)\ ([23]) ,$$

convergente in un aperto U *di* C, *la funzione*

$$g = \Delta^3 f$$

risulta regolare a destra in U.

Per la dimostrazione, si prova anzitutto come nel classico teorema di derivazione di una serie termine a termine, che può scriversi

$$\left(\sum_n a_n x^n\right) D = \sum_n (a_n x^n) D .$$

Poichè la funzione x^n è intrinseca analitica, C_1 discende allora immediatamente da T_3, tenuto presente il teorema T_1 del n. 3.

7. Teorema integrale.

Si denota ora con dx^* la *forma aggiunta* ([24]) della forma differenziale $dx = \sum\limits_h d\xi_h u_h$, cioè la 7-forma

$$dx^* = \sum_h (-1)^{h+1} d\xi_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_h} \wedge \ldots \wedge d\xi_7 u_h .$$

Il teorema integrale dato da G. C. Moisil e R. Fueter per le funzioni regolari nell'algebra Q dei quaternioni ([25]), si estende all'algebra di Cayley C nella forma seguente:

([23]) Nelle algebre alternative, la notazione ax^n non è ambigua, non dipendendo il risultato dal modo di associare i singoli fattori. Vedi p. es., R. D. Schafer [14], Theor. 3.1, p. 29.

([24]) Vedi p. es., V. Choquet-Bruhat [1], p. 97.

([25]) Vedi G. C. Moisil [9], p. 169; R. Fueter [4], p. 312.

T_4 – *Sia g una funzione di classe C^1 in un aperto U di C. Condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia*

$$\int_{\Gamma_7} (f dx^*) g = 0 \tag{26}$$

per ogni funzione f regolare a destra in U, e per ogni 7-ciclo Γ_7 di classe C^1, omologo a zero in U, è che la funzione g risulti biregolare in U (26).

Per la dimostrazione, si osservi anzitutto che, denotato con $\boldsymbol{d}$ il differenziale esterno, riesce in U

$$\boldsymbol{d}((f dx^*)g) = \left(\sum_h \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_h} u_h\right) g + \sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h}\right) d\xi_0 \dots d\xi_7 =$$
$$= \sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} d\xi_0 \dots d\xi_7 \, .$$

Per il teorema di Green-Stokes (27), la (26) equivale quindi alla relazione

$$\sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} = 0 \tag{27}$$

per ogni f regolare a destra in U. Per $f = 1$ si ha in particolare $Dg = 0$, onde può scriversi

$$\begin{aligned} \sum_h (f u_h) \frac{\partial g}{\partial \xi_h} &= \sum_h \left(f, u_h, \frac{\partial g}{\partial \xi_h}\right) \\ &= \sum_h \left(u_h, \frac{\partial g}{\partial \xi_h}, f\right) \\ &= -\sum_h u_h \left(\frac{\partial g}{\partial \xi_h} f\right), \end{aligned}$$

e pertanto la (27) equivale all'essere $D(gc) = 0$ per ogni elemento $c \in C$. Il teorema T_1 conduce subito all'asserto.

---

(26) Un teorema analogo a T_4 sussiste con riferimento all'integrale $\int_{\Gamma_7} g(dx^* f)$, con f regolare a sinistra.

(27) Vedi p. es., B. Segre [15], Cap. II, n. 46.

8. Formula integrale.

Come mostra il teorema T_4, per ottenere in C una formula di rappresentazione integrale delle funzioni regolari, analoga a quella di G. C. Moisil e R. Fueter nei quaternioni ([28]), occorre assumere come nucleo una funzione biregolare. Il nucleo classico $1/x$ non è biregolare nell'algebra C. Esso è tuttavia una funzione intrinseca analitica in $C-\{0\}$ (n. 5), e pertanto riesce ivi biregolare la funzione $\Delta^3(1/x)$ (Teor. T_3). Si perviene così al teorema:

T_5 – *Se f è una funzione regolare a destra in un aperto U di C, e Σ_7 una qualsiasi superficie 7-dimensionale chiusa di classe C^1 contenuta in U, risulta*

$$f(z)=\frac{1}{48\pi^4}\int\limits_{\Sigma_7}\big(f(x)dx^*\big)\,\Delta^3\frac{1}{x-z} \tag{28}$$

per ogni z interno a Σ_7 ([29]) ([30]).

Per la dimostrazione, mediante il teorema T_4, ci si riconduce a calcolare il secondo membro della (28) su una 7-sfera S_7 di centro z e raggio r conveniente. Tenuto conto poi che riesce $\Delta^3\big(1/(x-z)\big)=$ $=-12^2\cdot 16\big((x-z)^{-1}/|x-z|^6\big)$ e che su S_7 risulta $dx^*=-\big((x-z)/r\big)\,d\sigma$, essendo $d\sigma$ l'elemento d'area di S_7, può scriversi ([31])

$$\int\limits_{S_7}\big(f(x)dx^*\big)\,\Delta^3\frac{1}{x-z}=\frac{12^2\cdot 16}{r^7}\int\limits_{S_7}f(x)\,d\sigma\,.$$

Facendo ora tendere a zero il raggio r di S_7, e tenuto conto che l'area di S_7 vale $\pi^4 r^7/3$ si perviene subito alla (28).

In modo del tutto analogo al caso delle funzioni regolari nell'algebra

---

([28]) Vedi G. C. Moisil [9], p. 171; R. Fueter [4], p. 318.

([29]) Una formula analoga sussiste ovviamente per le funzioni regolari a sinistra.

([30]) Si intende qui che Σ_7 sia semplicemente allacciata col punto z. Nel caso generale interviene come fattore a primo membro della (28) l'indice di allacciamento.

([31]) Si tengano presenti le relazioni riportate nella nota ([8]).

dei quaternioni (32), dalla rappresentazione integrale ora trovata discendono per le funzioni regolari nell'algebra di Cayley C le classiche conseguenze. In particolare, *le componenti delle funzioni regolari sono di classe* C^ω.

BIBLIOGRAFIA

[1] V. Choquet-Bruhat, *Géométrie différentielle et systèmes extérieurs*, Dunod, Paris, 1968.

[2] C. G. Cullen, *An integral theorem for analytic intrinsic functions on quaternions*, Duke Math. J., **32** (1965), 139-148.

[3] P. Dentoni, *Funzioni regolari in un'algebra e cambiamenti di base*, Rend. Lincei, **51** (1971), 274-281.

[4] R. Fueter, *Die funktionentheorie der Differentialgleichungen* $\Delta u = 0$ *und* $\Delta\Delta u = 0$ *mit vier reelen Variablen*, Comm. Math. Helvetici, **7** (1934-35), 307-330.

[5] R. Fueter, *Über die analytische Darstellung der regulären Funktionen einer Quaternionenvariablen*, Comm. Math. Helvetici, **8** (1935-36), 371-378.

[6] R. Fueter, *Die Theorie der regulären Funktionen einer quaternionen Variablen*, C. R. Congrès Int. Oslo, 1936, t. I, Oslo, 1937, p. 75-91.

[7] V. Iftimie, *Fonctions Hypercomplexes*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, **9** (1965), 279-332.

[8] N. Jacobson, *Composition algebras and their automorphisms*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **7** (1958), 55-80.

[9] G. C. Moisil, *Sur les quaternions monogènes*, Bull. Sci. Math. Paris, **55** (1931), 168-174.

[10] R. F. Rinehart, *Elements of a theory of intrinsic functions on algebras*, Duke Math. J., **27** (1960), 1-19.

[11] M. Sce, *Monogeneità e totale derivabilità nelle algebre reali e complesse*, I. Rend. Lincei, **16** (1954), 30-35.

[12] M. Sce, *Sui sistemi di equazioni a derivate parziali inerenti alle algebre reali*, Rend. Lincei, **18** (1955), p. 32.

[13] M. Sce, *Sulle serie di potenze nei moduli quadratici*, Rend. Lincei, **23** (1957), 220-225.

[14] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Acad. Press, New York, 1966.

[15] B. Segre, *Forme differenziali e loro integrali*, I, Docet, Roma, 1951.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 dicembre 1972.

---

(32) Vedi R. Fueter [4], p. 319-330; [5], p. 371-378.