

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROSARIO STRANO

**Sulla Henselizzazione di anelli di valutazione  
e di anelli di Prüfer**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 52 (1974), p. 167-183

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1974\\_\\_52\\_\\_167\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__167_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

## Sulla Henselizzazione di anelli di valutazione e di anelli di Prüfer.

ROSARIO STRANO (\*)

### Introduzione.

In questo lavoro studiamo l'henselizzazione degli anelli di valutazione e degli anelli di Prüfer con particolare riguardo alla permanenza, sia nella salita che nella discesa, di alcune proprietà di tali anelli.

Nel n. 1 dimostriamo che l'henselizzazione di un anello di valutazione  $A$  rispetto a un suo qualunque ideale è ancora un anello di valutazione che ha lo stesso gruppo dei valori di  $A$ , estendendo un risultato di Nagata (vedi [9] teor. 8 e teor. 15).

Nel n. 2 proviamo che l'henselizzazione di un anello di valutazione  $A$  rispetto a un suo ideale  $\mathfrak{m}$  è perfettamente individuata dall'henselizzazione dell'anello locale  $A_{\sqrt{\mathfrak{m}}}$  e viceversa; esprimiamo poi i risultati ottenuti facendo uso della nozione di corpo valutato henseliano.

Il n. 3 comprende i risultati più importanti. In esso dimostriamo che l'henselizzazione  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  di un anello di Prüfer  $A$  rispetto a un ideale  $\mathfrak{m}$  soddisfacente alla condizione che  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  sia connesso, è ancora un anello di Prüfer nel quale ogni ideale è l'esteso di un ideale di  $A$ . Come conseguenza di questo fatto si ha, tra l'altro, che l'omomorfismo canonico tra i gruppi di Picard di  $A$  e di  $B$  è suriettivo e, quando  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ , è un isomorfismo. Applichiamo altresì i risultati ottenuti ad alcuni casi particolari di anelli di Prüfer.

Nel n. 4 mettiamo in relazione gli anelli di valutazione henseliani

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico - Corso Italia, 55 - Catania.  
Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R.

con quelli completi: troviamo che l'henselizzazione di un anello di valutazione completo non è necessariamente completa (tranne nel caso che l'anello di valutazione abbia rango 1 nel qual caso un anello di valutazione completo è pure henseliano). La completezza non si conserva nemmeno nella discesa cioè esistono anelli di valutazione non completi la cui henselizzazione è completa. È vero invece che se un anello è henseliano il suo completamento è pure henseliano.

Tutti gli anelli sono supposti commutativi e con elemento unità. Per tutte le nozioni che non definiamo rimandiamo a [1].

**1.** In questo numero studiamo l'henselizzazione di un anello di valutazione  $A$  rispetto a un suo ideale  $\mathfrak{m}$ . Per la definizione e le principali proprietà riguardanti l'henselizzazione di una coppia  $(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$  rimandiamo a [5]. Il risultato cui perveniamo è enunciato nel teorema 1. Dimostriamo dapprima due proposizioni.

**PROPOSIZIONE 1.** *Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli tale che  $B$  sia una  $A$ -algebra fedelmente piatta. Se  $B$  è un anello di valutazione allora  $A$  è di valutazione.*

**DIM.** Poichè l'omomorfismo  $\varphi$  è iniettivo allora  $A$  è un dominio. Detto  $K_A$  il corpo delle frazioni di  $A$  è  $K_A \cap B = A$  e quindi da  $x \in K_A$ ,  $x \notin A$  segue  $x \notin B$  da cui  $x^{-1} \in B$  e quindi  $x^{-1} \in A$ .

**PROPOSIZIONE 2.** *Sia  $A$  un anello locale e  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$ ; allora  $B$  è un anello locale ed è  ${}^hA = {}^hB$  cioè  $A$  e  $B$  hanno la stessa henselizzazione come anelli locali. Inoltre se  $A$  è un dominio integralmente chiuso anche  $B$  lo è.*

**DIM.** Sia  $C$  una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{m})$  (per le nozioni di  $N$ -polinomio e di  $N$ -estensione vedi [5] def. 1.2 e def. 2.2); allora è chiaro che  $C$  è una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{p})$  dove  $\mathfrak{p}$  è il massimale di  $A$  e quindi per [5] lemma 7.3 si ha  ${}^hA = {}^hB$ . La seconda affermazione segue dal fatto che se  $A$  è un dominio integralmente chiuso allora  ${}^hA$  è un dominio integralmente chiuso (vedi p.e. [10] pag. 180) e dal fatto che  ${}^hB$  è una  $B$ -algebra fedelmente piatta.

**TEOREMA 1.** *Sia  $A$  un anello e  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$ .*

- a) Se  $B$  è di valutazione ed  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$  allora  $A$  è di valutazione.*
- b) Se  $A$  è di valutazione allora  $B$  è di valutazione.*

- c) Se  $A$  e  $B$  sono di valutazione rispettivamente con corpo delle frazioni  $K_A \subset K_B$  e  $v_A$  (risp.  $v_B$ ) è una valutazione di  $K_A$  (risp.  $K_B$ ) di anello  $A$  (risp.  $B$ ) allora  $v_A$  è equivalente alla restrizione di  $v_B$  a  $K_A$  e detti  $\Gamma_A \subset \Gamma_B$  i rispettivi gruppi dei valori è  $\Gamma_A = \Gamma_B$ .

DIM. a) segue dalla proposizione 1. Per provare b) e c) poniamo  $D = {}^h A$ ; è noto (vedi [9] teor. 8 e teor. 15) che  $D$  è un anello di valutazione e detto  $\Gamma_D$  il gruppo dei valori di  $D$  è  $\Gamma_A = \Gamma_D$ . Ne segue allora, per le proposizioni 1 e 2, che  $B$  è di valutazione e dalla relazione  $\Gamma_A \subset \Gamma_B \subset \Gamma_D$  segue  $\Gamma_A = \Gamma_B$ .

COROLLARIO 1. Sia  $A$  un anello di valutazione e  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$ . Allora per ogni elemento  $b$  di  $B$  esiste  $a$  di  $A$  tale che  $aB = bB$ .

DIM. Segue subito dalla condizione  $\Gamma_A = \Gamma_B$ .

2. Sia  $A$  un anello di valutazione ed  $\mathfrak{m}$  un ideale di  $A$ ; osserviamo anzitutto che  $\sqrt{\mathfrak{m}}$  è un ideale primo (vedi [3] cap. VI par. 7 n. 2 lemma 2). In questo numero facciamo vedere che l'anello  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  è perfettamente determinato dall'henselizzazione dell'anello locale  $A_{\sqrt{\mathfrak{m}}}$  e viceversa. Dopo aver richiamato la definizione di corpo valutato henseliano, esprimiamo i risultati ottenuti in termini di corpi valutati.

Osserviamo intanto che è  ${}^h(A, \mathfrak{m}) = {}^h(A, \sqrt{\mathfrak{m}})$  (vedi [5] prop. 8.6) e quindi in questo numero supporremo sempre che  $\mathfrak{m}$  sia un ideale primo di  $A$ .

TEOREMA 2. Sia  $A$  un anello di valutazione ed  $\mathfrak{m}$  un suo ideale primo. Si ha che  $(A, \mathfrak{m})$  è una coppia henseliana se e solo se  $A_{\mathfrak{m}}$  è un anello locale henseliano.

DIM. È noto che (vedi [4] cor. 6.8) se  $A$  è un dominio integralmente chiuso ed  $\mathfrak{m}$  è un suo ideale primo,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ , allora se  $A_{\mathfrak{m}}$  è henseliano allora  $(A, \mathfrak{m})$  è una coppia henseliana. Proviamo adesso il viceversa nell'ipotesi che  $A$  sia un anello di valutazione.

Per [9] teorema 3 basta provare che ogni dominio intero su  $A$  possiede un solo primo al di sopra di  $\mathfrak{m}$ . Supponiamo che ciò non sia vero e sia  $R$  un dominio intero su  $A$  che abbia almeno due primi  $\mathfrak{m}_1$  e  $\mathfrak{m}_2$  al di sopra di  $\mathfrak{m}$ . Facciamo vedere anzitutto che si può supporre che il corpo delle frazioni  $H$  di  $R$  sia normale e separabile sul corpo delle frazioni  $K$  di  $A$  ed  $R$  integralmente chiuso. Infatti se  $R'$  è la chiusura integrale di  $R$  nella estensione normale di  $K$  generata da  $H$  è noto

che per ogni primo di  $R$  esiste un primo di  $R'$  al di sopra di esso; possiamo quindi supporre  $H$  normale e  $R$  integralmente chiuso; sia ora  $\bar{H}$  la chiusura separabile di  $K$  in  $H$  e poniamo  $\bar{R} = R \cap \bar{H}$ : si ha che per ogni primo  $\bar{q}$  di  $\bar{R}$  esiste uno e un sol primo  $q$  di  $R$  al di sopra di  $\bar{q}$  (vedi [3] cap. V par. 2 n. 3 lemma 4).

Sia  $a$  un elemento di  $\mathfrak{m}_1$  che non sta in  $\mathfrak{m}_2$  e sia  $L$  l'estensione finita normale separabile generata da  $a$  su  $K$  e sia  $A'$  la chiusura integrale di  $A$  in  $L$ ; proviamo che  $A'$  possiede almeno due primi al di sopra di  $\mathfrak{m}$ : infatti sia  $\sigma$  un automorfismo di  $H$  su  $K$  tale che  $\sigma(\mathfrak{m}_2) = \mathfrak{m}_1$  (vedi [10] teor. 10.12); allora  $\sigma(a) \notin \mathfrak{m}_1$ ,  $\sigma(a) \in A'$  e quindi  $\mathfrak{m}_1 \cap A' \neq \sigma(\mathfrak{m}_1) \cap A'$ .

Siano  $\mathfrak{m}'_0, \mathfrak{m}'_1, \dots, \mathfrak{m}'_n$  i primi distinti di  $A'$  al di sopra di  $\mathfrak{m}$ . Sia  $G$  il gruppo di Galois di  $L$  su  $K$ ; come è noto si definisce gruppo di decomposizione di  $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'_0$  il sottogruppo  $G'$  di  $G$  così definito:

$$G' = \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{m}') = \mathfrak{m}'\};$$

si definisce poi l'anello di decomposizione  $\tilde{A}$  e il corpo di decomposizione  $\tilde{K}$  di  $\mathfrak{m}'$  come segue

$$\tilde{A} = \{x \in A' \mid \sigma(x) = x \text{ per ogni } \sigma \in G'\},$$

$$\tilde{K} = \{x \in L \mid \sigma(x) = x \text{ per ogni } \sigma \in G'\}.$$

Si ha  $\tilde{A} = A' \cap \tilde{K}$  e  $\tilde{A}$  è la chiusura integrale di  $A$  in  $\tilde{K}$ .

Sia  $\mathfrak{p}'$  un massimale di  $\tilde{A}$  che contiene  $\mathfrak{m}' \cap \tilde{A}$ ; allora  $\mathfrak{p}'$  non contiene nessun primo  $\mathfrak{m}'_j \cap \tilde{A}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) perchè  $\tilde{A}_{\mathfrak{p}'}$  è un anello di valutazione (vedi [11] pag. 158 cor. 4); allora si ha  $\mathfrak{p}' \not\supset \mathfrak{m}'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{m}'_n \cap \tilde{A}$  e quindi esiste un elemento  $a \in \tilde{A}$  tale che  $a \notin \mathfrak{p}'$ ,  $a \in \mathfrak{m}'_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ).

Per [9] lemma 2  $a$  è una radice di un polinomio monico irriducibile

$$X^{n+1} - a_1 X^n - \dots - a_{n+1} = 0,$$

con  $a_2, \dots, a_n \in \mathfrak{m}$ ,  $a_1 \in A$ ,  $a_1 \equiv a(\mathfrak{m}' \cap \tilde{A})$ ; è allora  $a_1 \notin \mathfrak{p}$  essendo  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}' \cap A$  il massimale di  $A$  e ciò è contro l'ipotesi che  $(A, \mathfrak{m})$  sia una coppia henseliana: infatti il polinomio di cui sopra si decompone, modulo  $\mathfrak{m}$ , in due fattori monici e coprими.

**TEOREMA 3.** *Sia  $A$  un anello di valutazione ed  $\mathfrak{m}$  un suo ideale primo. Posto  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  si ha  $B_{\mathfrak{m}B} = {}^h(A_{\mathfrak{m}})$ .*

DM. Per il teorema 2  $B_{mB}$  è un anello locale henseliano e quindi esiste un omomorfismo  $f: {}^h(A_m) \rightarrow B_{mB}$  che fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & {}^h(A_m) \\ & \nearrow & \downarrow f \\ A_m & & B_{mB} \\ & \searrow & \end{array}$$

Consideriamo ora gli omorfismi di coppie

$$(A, m) \begin{array}{l} \nearrow (B, mB) \\ \searrow (A_m, mA_m) \end{array} \rightarrow ({}^h(A_m), m^h(A_m)).$$

Si ha che esiste un omomorfismo

$$\varphi: (B, mB) \rightarrow ({}^h(A_m), m^h(A_m)),$$

che fa commutare il precedente diagramma.

Dal fatto che ogni ideale principale di  $B$  è generato da un elemento di  $A$  segue che gli elementi di  $B - mB$  hanno per immagine elementi invertibili in  ${}^h(A_m)$  ed inoltre  $\varphi$  è iniettivo. Ne segue allora che  $\varphi$  induce un omomorfismo locale e iniettivo

$$g: B_{mB} \rightarrow {}^h(A_m);$$

l'omomorfismo  $g$  è tale che nel diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & B_{mB} \\ A \xrightarrow{i} A_m & \begin{array}{l} \nearrow \alpha \\ \searrow \beta \end{array} & \downarrow g \\ & & {}^h(A_m) \end{array}$$

sia  $g\alpha i = \beta i$ , ma essendo  $i$  cancellabile a destra segue  $g\alpha = \beta$ .

Consideriamo adesso  $gf: {}^h(A_m) \rightarrow {}^h(A_m)$ ; esso fa commutare il diagramma

$$\begin{array}{ccc} & & {}^h(A_m) \\ & \nearrow & \downarrow \\ A_m & & {}^h(A_m) \\ & \searrow & \end{array}$$

e quindi  $gf$  è l'identità in  ${}^h(A_m)$  da cui segue che  $g$  è suriettivo e quindi la tesi.

Richiamiamo adesso la definizione di corpo valutato henseliano (vedi [11] cap.  $F'$ ).

**DEFINIZIONE 1.** *Un corpo valutato  $(K, v)$  si dice henseliano se  $v$  ammette un unico prolungamento ad ogni estensione algebrica di  $K$ .*

Da [11] teor. 4 pag. 185, segue subito che un corpo valutato  $(K, v)$  è henseliano se e solo se l'anello della valutazione  $v$  è un anello locale henseliano.

Si ha poi (vedi [11] pag. 175) che ad ogni corpo valutato  $(K, v)$  si può associare la sua henselizzazione  $({}^hK, {}^hv)$ ; confrontando la costruzione dell'henselizzazione di un corpo valutato  $(K, v)$  con quella dell'henselizzazione di un anello locale (vedi [10] pag. 180) si ha subito che l'anello della valutazione  ${}^hv$  di  ${}^hK$  è l'henselizzazione  ${}^hA$  dell'anello della valutazione  $v$ .

Si ha allora il seguente teorema.

**TEOREMA 4.** *Sia  $A$  un anello di valutazione,  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale primo di  $A$ . Siano  $K_A \subset K_B$  i rispettivi corpi delle frazioni. Se  $v_A$  (risp.  $v_B$ ) è una valutazione di  $K_A$  (risp.  $K_B$ ) di anello  $A$  (risp.  $B$ ) si ha:*

- a) *se  $v$  è una valutazione di  $K_B$  di anello  $B_{\mathfrak{m}B}$  allora  $(K_B, v)$  è henseliano;*
- b)  *$(K_B, v)$  è l'henselizzazione di  $(K_A, v|K_A)$  dove  $v|K_A$  è la restrizione di  $v$  a  $K_A$  ed ha come anello  $A_{\mathfrak{m}}$ ;*
- c) *se  $w$  è una valutazione del corpo  $A_{\mathfrak{m}}/mA_{\mathfrak{m}}$  di anello  $A/\mathfrak{m}$  allora la valutazione  $v_B$  di  $K_B$  è equivalente alla composizione della valutazione  $v$  con la valutazione  $w$ .*

**DIM.** a) e b) seguono rispettivamente dai teoremi 2 e 3; c) segue dal fatto che  $A/\mathfrak{m} \cong B/\mathfrak{m}B$  e quindi il corpo  $A_{\mathfrak{m}}/mA_{\mathfrak{m}}$  coincide col corpo residuo di  $v$ .

**3.** In questo numero studiamo l'henselizzazione di un anello di Prüfer. Richiamiamo alcune definizioni.

**DEFINIZIONE 2.** *Un dominio  $A$  si dice un anello di Prüfer se  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello di valutazione per ogni ideale massimale  $\mathfrak{p}$  di  $A$ .*

**DEFINIZIONE 3.** *Un dominio  $A$  si dice un anello quasi-Dedekind se  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello di valutazione noetheriano per ogni ideale massimale  $\mathfrak{p}$  di  $A$ .*

**DEFINIZIONE 4.** *Un dominio  $A$  si dice un anello di Dedekind se  $A$  è un anello di Prüfer noetheriano.*

**PROPOSIZIONE 2.** *Sia  $\varphi: A \rightarrow B$  un omomorfismo di anelli tale che  $B$  sia una  $A$ -algebra fedelmente piatta. Se  $B$  è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind) allora  $A$  è di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind).*

**DIM.** Poichè  $\varphi$  è iniettivo  $A$  è un dominio. Sia  $\mathfrak{p}$  un massimale di  $A$ ; esiste allora un massimale  $\mathfrak{p}$  di  $B$  tale che  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p} \cap A$ ; si ha allora un omomorfismo  $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}}$  e  $B_{\mathfrak{p}}$  è una  $A_{\mathfrak{p}}$ -algebra fedelmente piatta. Per la proposizione 1 se  $B_{\mathfrak{p}}$  è di valutazione anche  $A_{\mathfrak{p}}$  è di valutazione e quindi se  $B$  è di Prüfer anche  $A$  è di Prüfer. Osservando poi che la noetherianità discende per fedele piatezza segue la proposizione.

**TEOREMA 5.** *Sia  $A$  un anello e  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$ . Si ha:*

- a) Se  $B$  è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind) ed è  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ , allora  $A$  è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind).*
- b) Se  $A$  è un anello di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind) e  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  è connesso allora  $B$  è di Prüfer (risp. quasi-Dedekind, Dedekind).*

**DIM.** *a)* segue dalla proposizione 3. Per dimostrare *b)* osserviamo intanto che, per [8] cor. 2.12, si ha che  $B$  è un dominio; la tesi segue allora dal teorema 1 applicando [5] cor. 6.9 e cor. 7.5.

**OSSERVAZIONE 1.** L'ipotesi «  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso » è necessaria affinché  $B$  sia un dominio e non può essere soppressa. Infatti  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  è connesso se e solo se  $\text{Spec } B$  è connesso (vedi [5] lemma 9.1).

Il resto del presente numero è dedicato alla dimostrazione del successivo teorema 6 nel quale proviamo che se  $A$  è un anello di Prüfer e  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  è connesso allora ogni ideale di  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  è l'esteso di un ideale di  $A$ . Dal teorema 6 dedurremo poi alcuni corollari.

Premettiamo alcuni lemmi.

**LEMMA 1.** *Sia  $A$  un anello,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ ,  $C$  una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{m})$  e sia  $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$  un primo di  $A$ . Allora  $\mathfrak{p}C$  è un primo di  $C$  al di sopra di  $\mathfrak{p}$ .*

**DIM.** Dal fatto che  $C$  è una  $A$ -algebra fedelmente piatta segue che esiste un primo  $\mathfrak{q}$  di  $C$  al di sopra di  $\mathfrak{p}$ . Dall'isomorfismo  $A/\mathfrak{m} \cong C/\mathfrak{m}C$  segue poi  $\mathfrak{p}C = \mathfrak{q}$ .



**LEMMA 2.** *Sia  $A$  un anello,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ ,  $C$  una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{m})$ . Siano  $\mathfrak{p}_1$  e  $\mathfrak{p}_2$  due massimali di  $A$  e poniamo  $S = A - (\mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2)$  e  $S' = C - (\mathfrak{p}_1 C \cup \mathfrak{p}_2 C)$ . Allora  $C_{S'}$  è una  $N$ -estensione semplice di  $(A_S, \mathfrak{m}A_S)$ .*

**DIM.** Sia  $f(X)$  l' $N$ -polinomio, di grado  $n > 1$ , che definisce  $C$ ; allora  $f(X)$  è un  $N$ -polinomio di  $(A_S, \mathfrak{m}A_S)$  ed indichiamo con  $D$  l' $N$ -estensione semplice di  $(A_S, \mathfrak{m}A_S)$  definita da  $f(X)$ . Posto

$$A[X]/f(X) A[X] = A[x]$$

si ha

$$C = A[x]_{1+(\mathfrak{m},x)A[x]} \quad \text{e} \quad D = (A_S[x])_{1+(\mathfrak{m},x)A_S[x]}.$$

Consideriamo gli ideali  $(\mathfrak{p}_1, x)A[x]$  e  $(\mathfrak{p}_2, x)A[x]$  di  $A[x]$ : si vede subito che essi sono ideali massimali di  $A[x]$  al di sopra rispettivamente di  $\mathfrak{p}_1$  e  $\mathfrak{p}_2$ . Poniamo

$$T = A[x] - ((\mathfrak{p}_1, x)A[x] \cup (\mathfrak{p}_2, x)A[x])$$

e facciamo vedere che  $D$  e  $C_{S'}$  sono entrambi isomorfi ad  $A[x]_T$ . Per provare che  $D$  è isomorfo ad  $A[x]_T$  poniamo  $U = 1 + (\mathfrak{m}, x)A_S[x]$ ; si ha  $D = (A_S[x])_U$ ; per una nota proprietà (vedi [2] cap. II par. 2 n. 3, prop. 7), essendo  $S \subset T$  è  $A[x]_T = (A_S[x])_{T'}$  dove  $T'$  è l'immagine di  $T$  nell'omomorfismo  $A[x] \rightarrow A_S[x]$ ; quindi  $D$  e  $A[x]_T$  sono i localizzati di  $A_S[x]$  mediante rispettivamente  $U$  e  $T'$ .

Poichè gli elementi di  $T$  sono del tipo  $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$  con  $a_0 \in S$  segue subito che le immagini degli elementi di  $T'$  nell'omomorfismo  $A_S[x] \rightarrow (A_S[x])_{T'}$  sono invertibili e le immagini degli elementi di  $U$  nell'omomorfismo  $A_S[x] \rightarrow A[x]_T$  sono invertibili e quindi  $D \cong A[x]_T$ .

Per provare che  $C_{S'}$  è isomorfo ad  $A[x]_T$  poniamo  $V = 1 + (\mathfrak{m}, x) \cdot A[x]$ ; si ha  $C_{S'} = (A[x]_{\mathcal{V}})_{S'}$  e  $A[x]_T = (A[x]_{\mathcal{V}})_{T''}$  dove  $T''$  è l'immagine di  $T$  nell'omomorfismo  $A[x] \rightarrow A[x]_{\mathcal{V}}$ . La dimostrazione è allora analoga alla precedente.

**LEMMA 3.** *Sia  $A$  un anello di Prüfer. Allora:*

- a) *l'insieme dei primi contenuti in  $\text{Rad } A$  è linearmente ordinato per inclusione.*
- b) *l'insieme dei primi contenuti in  $\text{Rad } A$  ha un (unico) elemento massimo.*

DIM. a) sia  $\mathfrak{p}$  un ideale massimale di  $A$ ; è noto che c'è una corrispondenza 1-1 che conserva l'inclusione tra i primi di  $A_{\mathfrak{p}}$  e i primi di  $A$  contenuti in  $\mathfrak{p}$ ; poichè  $A_{\mathfrak{p}}$  è un anello di valutazione segue la tesi. b) infatti l'unione di un insieme linearmente ordinato di ideali primi di  $A$  è ancora un ideale primo di  $A$ .

LEMMA 4. *Sia  $A$  un anello di Prüfer semilocale,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ , e sia  $\mathfrak{p}$  il massimo primo contenuto in  $\text{Rad } A$ . Allora  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  è connesso se e solo se  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ .*

DIM. Sia  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso. Se fosse  $\mathfrak{m} \not\subset \mathfrak{p}$  seguirebbe che non ci sono primi di  $A$  tra  $\mathfrak{m}$  e  $\text{Rad } A$  e quindi  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}) = \text{Spec}(A/\text{Rad } A)$  non sarebbe connesso.

Viceversa sia  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{p}$ . Sia  $\mathfrak{q}$  un primo di  $A$  e supponiamo  $\mathfrak{q} \not\subset \mathfrak{p}$ ; detto  $\mathfrak{q}'$  un massimale di  $A$  contenente  $\mathfrak{q}$  è anche  $\mathfrak{q}' \supset \mathfrak{p}$ , ed essendo l'insieme dei primi di  $A$  contenuti in  $\mathfrak{q}'$  linearmente ordinato per inclusione segue  $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}$ . Consideriamo allora  $\sqrt{\mathfrak{m}}$ : è

$$\sqrt{\mathfrak{m}} = \bigcap_i \mathfrak{q}_i,$$

con  $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{q}_i \supset \mathfrak{m}$ , ma poichè l'intersezione di un insieme linearmente ordinato di ideali primi è un ideale primo segue che  $\sqrt{\mathfrak{m}}$  è primo e quindi  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m}) = \text{Spec}(A/\sqrt{\mathfrak{m}})$  è connesso.

LEMMA 5. *Sia  $A$  un anello di Prüfer,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ ,  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso, e sia  $C$  una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{m})$ . Sia  $\mathfrak{p}_1$  un massimale di  $A$  e poniamo  $S = A - \mathfrak{p}_1$ . È allora  $C_S = C_{\mathfrak{p}_1 C}$ .*

DIM. Basta provare che  $C_S$  è locale. È noto che i massimali di  $C_S$  sono gli estesi dei primi di  $C$  che sono massimali fra quelli che non incontrano  $S$ . Uno di tali primi è  $\mathfrak{p}_1 C$  e quindi  $\mathfrak{p}_1 C_S$  è massimale in  $C_S$ ; sia  $\mathfrak{q}$  un altro di tali primi e sia  $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q} \cap A \subset \mathfrak{p}_1$ ; sia  $\mathfrak{p}_2 C$  un massimale di  $C$  che contiene  $\mathfrak{q}$ . Per il lemma 2 possiamo supporre che  $A$  abbia i due soli massimali  $\mathfrak{p}_1$  e  $\mathfrak{p}_2$ . Proviamo adesso che  $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$  è massimale fra i primi di  $A$  contenuti in  $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ ; infatti è noto che  $C_{\mathfrak{p}_2 C}$  è una  $N$ -estensione semplice di  $A_{\mathfrak{p}_2}$  (ciò segue anche dal lemma 2 per  $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2$ ) ed  $A_{\mathfrak{p}_2}$  è un anello di valutazione e quindi, applicando il teorema 1, segue che c'è una corrispondenza 1-1 tra i primi di  $A$  contenuti in  $\mathfrak{p}_2$  e i primi di  $C$  contenuti in  $\mathfrak{p}_2 C$ ; si ha allora che, se  $\mathfrak{p}$  fosse un primo di  $A$  con  $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2$ , esisterebbe un primo  $\mathfrak{p}'$  di  $C$  tale che  $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$  ed inoltre  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{p}_2 C$ .

Per il lemma 4 si ha  $\mathfrak{q}_1 \supset \mathfrak{m}$ . Dal lemma 1 segue allora che l'ideale  $\mathfrak{q}_1 C$  è un primo di  $C$  tale che  $\mathfrak{q}_1 C \cap A = \mathfrak{q}_1$  e  $\mathfrak{q}_1 C \subset \mathfrak{p}_2 C$ : per lo stesso motivo di sopra è allora  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 C$  da cui segue  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_1 C \subset \mathfrak{p}_1 C$  e quindi è  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}_1 C$ .

**TEOREMA 6.** *Sia  $A$  un anello di Prüfer,  $\mathfrak{m}$  un ideale di  $A$  con  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso e  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ . Si ha allora:*

- a) *Per ogni ideale  $\mathfrak{b}$  di  $B$  esiste un ideale  $\alpha$  di  $A$  tale che  $\mathfrak{b} = \alpha B$ .*  
 b) *Se  $\mathfrak{b}$  è principale allora  $\alpha$  è principale.*

**DIM.** a) Se consideriamo  $A_{1+\mathfrak{m}}$  si ha che  $\mathfrak{m}A_{1+\mathfrak{m}} \subset \text{Rad } A_{1+\mathfrak{m}}$  ed ogni ideale di  $A_{1+\mathfrak{m}}$  è l'esteso di un ideale di  $A$ ; possiamo quindi supporre  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ . Possiamo ancora supporre che  $\mathfrak{b}$  sia un ideale principale  $bB$  di  $B$ .

Sia  $C$  una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{m})$  e supponiamo di aver dimostrato che ogni ideale di  $C$  sia l'esteso di un ideale di  $A$ ; segue allora che se  $C$  è una  $N$ -estensione di  $(A, \mathfrak{m})$  allora ogni ideale di  $C$  è l'esteso di un ideale di  $A$ ; sia ora  $b \in B$  e sia  $C$  una  $N$ -estensione di  $(A, \mathfrak{m})$  che contiene  $b$ ; esiste allora un ideale  $\alpha$  di  $A$  tale che  $\alpha C = bC$  e quindi  $\alpha B = bB$ .

Possiamo quindi supporre che  $B$  sia una  $N$ -estensione semplice di  $(A, \mathfrak{m})$ . Proviamo che per ogni massimale  $\mathfrak{p}$  di  $A$  è

$$(bB \cap A) B_{\mathfrak{p}B} = bB_{\mathfrak{p}B},$$

da cui segue

$$(bB \cap A) B = bB,$$

(vedi [1] prop. 3.9).

Per il corollario 1 l'ideale  $bB_{\mathfrak{p}B}$  è generato da un elemento di  $A_{\mathfrak{p}}$  e quindi possiamo porre

$$bB_{\mathfrak{p}B} = aB_{\mathfrak{p}B},$$

con  $a \in A$ .

È allora  $a = bc$  con  $c \in B_{\mathfrak{p}B}$  invertibile.

Per il lemma 5 possiamo scrivere  $c = r/s$ ,  $r \in B$ ,  $s \in A - \mathfrak{p}$ . Allora è  $as = br \in bB$  e quindi  $as \in bB \cap A$ ; inoltre è  $aB_{\mathfrak{p}B} = asB_{\mathfrak{p}B}$  e quindi segue

$$bB \subset (bB \cap A) B_{\mathfrak{p}B},$$

e quindi a) è provato.

Per dimostrare *b*) osserviamo che, essendo  $B$  una  $A$ -algebra fedelmente piatta (possiamo anche in questo caso supporre  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ ) e  $\alpha B = \mathfrak{b}$  un  $B$ -modulo finitamente generato, segue che  $\alpha$  è un  $A$ -modulo finitamente generato. Da  $A/\mathfrak{m} \cong B/\mathfrak{m}B$  segue poi

$$\alpha/\mathfrak{m}\alpha \cong \alpha \otimes A/\mathfrak{m} \cong \alpha \otimes B/\mathfrak{m}B \cong \mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b},$$

ma  $\mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b}$  è generato da un solo elemento come  $B/\mathfrak{m}B$ -modulo e quindi come  $A/\mathfrak{m}$ -modulo e quindi come  $A$ -modulo.

Applicando il lemma di Nakayama all' $A$ -modulo finitamente generato  $\alpha$  segue subito che  $\alpha$  è principale.

**OSSERVAZIONE 2.** Il teorema 6 non vale più se si toglie l'ipotesi che  $A$  sia un anello di Prüfer, come mostra il seguente esempio: sia  $A = K[[X, Y]]_{(X, Y)}$  dove  $K$  è un corpo; è noto che  ${}^hA$  è il sottoanello di  $K[[X, Y]]$  costituito dalle serie formali che sono algebriche su  $K(X, Y)$  (vedi [10] cor. 44.3). Consideriamo l'ideale  $\alpha = (X^3 + Y^2 + XY)A$ ; esso è generato da un elemento irriducibile di  $A$  e quindi è primo; l'esteso  ${}^h\alpha$  non è più primo in quanto l'elemento  $X^3 + Y^2 + XY$  è riducibile in  ${}^hA$ .

**COROLLARIO 2.** Sia  $A$  un anello di Prüfer,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ ,  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso e sia  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ . Si ha allora:

a) *Le applicazioni*

$$\alpha \mapsto \alpha B \quad \alpha \text{ ideale di } A$$

$$\mathfrak{b} \mapsto \mathfrak{b} \cap A \quad \mathfrak{b} \text{ ideale di } B$$

stabiliscono una biiezione fra gli ideali di  $A$  e gli ideali di  $B$ . Tale biiezione induce una biiezione fra i primi di  $A$  e quelli di  $B$ , come pure una biiezione fra gli ideali principali di  $A$  e quelli di  $B$ .

b) Per ogni famiglia  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  di ideali di  $A$  si ha

$$\left( \bigcap_i \alpha_i \right) B = \bigcap_i \alpha_i B.$$

**DIM.** a) Bisogna solo provare che se  $\mathfrak{p}$  è un primo di  $A$  allora  $\mathfrak{p}B$  è un primo di  $B$ . Infatti poichè  $B$  è una  $A$ -algebra fedelmente piatta esiste un primo  $\mathfrak{q}$  di  $B$  tale che  $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$  e quindi per il teorema 6 segue  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}B$ .

b) Poniamo  $\bigcap_i \alpha_i B = \alpha B$  con  $\alpha$  ideale di  $A$ . Da  $\alpha B \subset \alpha_i B$  segue  $\alpha \subset \alpha_i$  e quindi  $\alpha B \subset \left(\bigcap_i \alpha_i\right) B$ .

**COROLLARIO 3.** *Sia  $A$  un anello di Prüfer,  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$  con  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso e sia  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ . Allora la funzione continua*

$$\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A,$$

*indotta dall'omomorfismo  $A \rightarrow B$  è un omeomorfismo fra  $\text{Spec } B$  e il sottospazio di  $\text{Spec } A$  costituito dai primi di  $A$  che non incontrano  $1 + \mathfrak{m}$ .*

*Nel caso che sia  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$  allora si tratta di un omeomorfismo fra  $\text{Spec } B$  e  $\text{Spec } A$ .*

**DIM.** La dimostrazione è immediata per il corollario 2a).

**COROLLARIO 4.** *Sia  $A$  un anello di Prüfer,  $\mathfrak{m}$  un ideale di  $A$  con  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso e sia  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ . Allora l'omomorfismo fra i gruppi*

$$\text{Pic } A \rightarrow \text{Pic } B,$$

*indotto dall'omomorfismo  $A \rightarrow B$  è suriettivo e, se  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ , è un isomorfismo.*

**DIM.** Per la definizione di  $\text{Pic } A$  rimandiamo a [2] cap. II par. 5 n. 4. Ricordiamo che essendo  $A$  e  $B$  domini il gruppo di Picard è isomorfo al gruppo delle classi di ideali frazionari invertibili. Osserviamo poi che, per  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ , la biiezione fra gli ideali di  $A$  e quelli di  $B$  data nel corollario 2a) si estende, in modo ovvio, ad una biiezione fra gli ideali frazionari di  $A$  e quelli di  $B$  e quest'ultima induce una biiezione fra gli ideali frazionari invertibili di  $A$  e quelli di  $B$ .

Richiamiamo adesso la definizione di anello di Bézout.

**DEFINIZIONE 5.** *Un dominio  $A$  si dice un anello di Bézout se ogni ideale finitamente generato di  $A$  è principale.*

**COROLLARIO 5.** *Sia  $A$  un anello e  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$  con  $\mathfrak{m}$  ideale di  $A$ . Si ha:*

- a) *Se  $B$  è un anello di Bézout (risp. PID) ed è  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$  allora  $A$  è di Bézout (risp. PID).*
- b) *Se  $A$  è un anello di Bézout (risp. PID) ed è  $\text{Spec}(A/\mathfrak{m})$  connesso allora  $B$  è di Bézout [risp. PID].*

**DIM.** La tesi segue dal corollario 4 ricordando che un anello  $A$  è di Bézout se e solo se esso è un anello di Prüfer e  $\text{Pic } A = 0$ : infatti un anello di Prüfer è un dominio caratterizzato dal fatto che ogni ideale finitamente generato non nullo è invertibile (vedi [7] teor. 6.6) e la condizione  $\text{Pic } A = 0$  per un dominio è equivalente al fatto che ogni ideale invertibile è principale. Inoltre ricordiamo che un dominio  $A$  è un PID (dominio a ideali principali) se e solo se  $A$  è un anello di Bézout noetheriano.

**OSSEVAZIONE 3.** Osserviamo che *non* è vero che se  $A \rightarrow B$  è un omomorfismo di anelli tale che  $B$  sia una  $A$ -algebra fedelmente piatta allora se  $B$  è un anello di Bézout (risp. PID) segue che  $A$  è un anello di Bézout (risp. PID). Basta prendere come  $A$  e  $B$  l'anello delle coordinate del cerchio rispettivamente su  $\mathbf{R}$  e su  $\mathbf{C}$ . Si ha che  $B$  è PID mentre  $A$  è un anello di Dedekind non PID (vedi [6] pag. 50).

**COROLLARIO 6.** *Sia  $A$  un anello di Prüfer,  $\mathfrak{m} \subset \text{Rad } A$ ,  $\text{Spec } (A/\mathfrak{m})$  connesso e sia  $B = {}^h(A, \mathfrak{m})$ . Allora la biiezione fra gli ideali di  $A$  e quelli di  $B$  data nel corollario 2a) induce un isomorfismo fra i semi-gruppi con unità*

$$D(A) \simeq D(B),$$

*dei divisori rispettivamente di  $A$  e di  $B$ .*

**DIM.** Per la definizione di  $D(A)$  si veda, per esempio [7] pag. 172. Osserviamo adesso che dal corollario 2b) segue che la biiezione fra gli ideali di  $A$  e quelli di  $B$  induce una biiezione fra gli ideali divisoriali di  $A$  e quelli di  $B$ . Si prova poi facilmente che tale biiezione conserva il prodotto fra ideali divisoriali cioè è un isomorfismo fra  $D(A)$  e  $D(B)$ .

**4.** In questo numero mettiamo in relazione gli anelli di valutazione henseliani con quelli completi (per il completamento di un anello di valutazione si veda [3] cap. VI par. 5 n. 3 oppure [11] cap. D).

È noto che se un anello di valutazione di rango 1 è completo allora esso è henseliano (vedi [11] pag. 198 teor. 4).

Proviamo anzitutto che il completamento  $\hat{A}$  di un anello di valutazione  $A$  henseliano è ancora un anello di valutazione henseliano. Questa proprietà, nel caso che la topologia canonica su  $A$  abbia una base numerabile degli intorno dello zero, segue da [12] prop. 7: infatti, secondo la nozione di terna henseliana introdotta da Valabrega,  $\hat{A}$  risulta l'henselizzazione della terna  $(A, \mathfrak{m}, \tau)$  con  $\mathfrak{m}$  massimale di  $A$  e  $\tau$  topologia canonica di  $A$ .

PROPOSIZIONE 3. *Se  $A$  è un anello di valutazione henseliano allora  $\hat{A}$  è pure henseliano.*

DIM. Sia  $K$  il corpo delle frazioni di  $A$  e  $v$  una valutazione di  $K$  di anello  $A$  e sia  $\mathfrak{m}$  il massimale di  $A$ ; sia poi  $\hat{K}$  il corpo delle frazioni di  $\hat{A}$  (che è il completamento di  $K$  per la topologia indotta da  $v$ ) e  $\hat{v}$  l'estensione canonica di  $v$  a  $\hat{K}$ . Sia  $K^*$  la chiusura algebrica di  $\hat{K}$  e sia  $v^*$  un'estensione di  $\hat{v}$  a  $K^*$ ; siano poi  $A^*$  e  $\mathfrak{m}^*$  rispettivamente l'anello e l'ideale di  $v^*$ . Osserviamo che se  $\Gamma$  è il gruppo dei valori di  $v$  (e quindi di  $\hat{v}$ ), il gruppo dei valori  $\Gamma^*$  di  $v^*$  è il gruppo divisibile generato da  $\Gamma$  (vedi [11] pag. 155 prop. 1) e quindi è un gruppo ordinato cofinale a  $\Gamma$  (cioè per ogni  $\alpha \in \Gamma^*$  esiste  $\beta \in \Gamma$  con  $\beta > \alpha$ ). Sia poi  $\tilde{v}$  l'estensione naturale di  $\hat{v}$  a  $\hat{K}(X)$  definita da

$$\tilde{v}(b_0 + \dots + b_n X^n) = \min_{0 \leq i \leq n} \{\hat{v}(b_i)\}.$$

Sia ora  $f(X) \in \hat{A}[X]$  un  $N$ -polinomio di  $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ . Si vede subito che esiste una famiglia  $f_\varepsilon(X) \in A[X]$  ( $\varepsilon \in \Gamma$ ,  $\varepsilon > 0$ ) di  $N$ -polinomi di  $(A, \mathfrak{m})$  tali che

$$\lim f_\varepsilon(X) = f(X)$$

nella topologia di  $\hat{K}(X)$  indotta da  $\hat{v}$ .

Sia  $\alpha_1$  l'unica radice di  $f(X)$  che sta in  $\mathfrak{m}^*$  e  $\alpha_1^{(\varepsilon)}$  l'unica radice di  $f_\varepsilon(X)$  che sta in  $\mathfrak{m}$ . Proviamo che è  $\alpha_1 = \lim \alpha_1^{(\varepsilon)}$  nella topologia di  $K^*$  indotta da  $v^*$  da cui segue  $\alpha_1 \in \hat{K}$ .

Poniamo

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

$$f_\varepsilon(X) = a_0^{(\varepsilon)} + a_1^{(\varepsilon)} X + \dots + a_{n-1}^{(\varepsilon)} X^{n-1} + X^n = (X - \alpha_1^{(\varepsilon)}) \dots (X - \alpha_n^{(\varepsilon)});$$

si ha  $v^*(f_\varepsilon(\alpha_1)) = v^*(\alpha_1 - \alpha_1^{(\varepsilon)})$  in quanto  $\alpha_1 - \alpha_1^{(\varepsilon)}$  è invertibile in  $A^*$  per  $i = 2, \dots, n$ .

Ma è anche

$$v^*(f_\varepsilon(\alpha_1)) = v^*(f_\varepsilon(\alpha_1) - f(\alpha_1)) = v^*\left(\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_i^{(\varepsilon)}) (\alpha_1)^i\right) \geq$$

$$\min_{0 \leq i \leq n-1} \{v^*(a_i - a_i^{(\varepsilon)}) + i v^*(\alpha_1)\} \geq \min_{0 \leq i \leq n-1} \{i v^*(\alpha_1)\} + \tilde{v}(f(\alpha_1) - f_\varepsilon(\alpha_1)).$$

Allora si ha che, fissato  $\delta \in \Gamma$ ,  $\delta > 0$  esiste  $\gamma \in \Gamma$ ,  $\gamma > 0$  tale che se  $\tilde{v}(f(X) - f_\varepsilon(X)) > \gamma$  si ha  $v^*(\alpha_1 - \alpha_1^{(\varepsilon)}) > \delta$ , da cui la tesi.

Portiamo adesso due controesempi riguardo alla henselizzazione di anelli di valutazione completi. Nel primo mostriamo che se  $A$  è un anello di valutazione completo,  ${}^hA$  non è necessariamente completo (escluso il caso in cui  $A$  sia di rango 1 nel qual caso si ha  $A = {}^hA$ ). Nel secondo mostriamo che  ${}^hA$  può essere completo senza che  $A$  sia completo. Ci servirà la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 4.** *Sia  $(K, v)$  un corpo valutato henseliano con  $v$  di rango 1; sia  $L$  una estensione algebrica separabile di  $K$  di grado infinito; allora  $L$  non è completo per il prolungamento di  $v$  ad  $L$ .*

**DIM.** Seguiamo il suggerimento di [3] cap. VI par. 8 esercizio 16.

Indichiamo ancora con  $v$  il prolungamento di  $v$  ad  $L$  (unico perchè  $(K, v)$  è henseliano). Prendiamo  $x_1 = 1$ ; supposto di aver scelto  $x_i$  scegliamo  $x_{i+1}$  in  $L$  soddisfacente alle seguenti condizioni:

$$a) [K(x_{i+1}):K] > [K(x_i):K] \qquad b) v(x_{i+1} - x_i) > \alpha(i)$$

con

$$\alpha(i) = \max\{v(x_i^{(1)} - x_i), \dots, v(x_i^{(r)} - x_i), v(x_i - x_{i-1}), i\},$$

dove  $x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(r)}$  sono i coniugati di  $x_i$  rispetto a  $K$  distinti da  $x_i$ . Proviamo che tale  $x_{i+1}$  esiste: sia  $y \notin K(x_i)$ ; posto  $K(z) = K(y, x_i)$  è  $K(z) \supset K(x_i)$  ed inoltre  $[K(z):K] > [K(x_i):K]$ ; prendiamo allora  $z$  in modo che sia  $K(z) \supset K(x_i)$  e  $[K(z):K] > 2[K(x_i):K]$ .

Possiamo inoltre supporre  $v(z) > \alpha(i)$ : basta fissare  $a \in K$  con  $v(a) > 0$  e prendere  $n$  opportunamente grande in modo che sia  $v(za^n) > \alpha(i)$ . Poniamo  $x_{i+1} = x_i + z$ ; si ha  $[K(x_{i+1}):K] > [K(x_i):K]$ ; infatti se  $f(X) \in K[X]$  fosse un polinomio monico di grado  $n \leq [K(x_i):K]$  tale che  $f(x_{i+1}) = 0$  allora  $f(x_i + T)$  sarebbe un polinomio monico di grado  $n$  in  $K(x_i)[T]$  tale che  $f(x_i + z) = 0$  e ciò è contro il fatto che sia  $[K(z):K(x_i)] > [K(x_i):K]$ . Proviamo ora che la successione  $x_1, x_2, \dots$  è di Cauchy: bisogna provare che per ogni intero  $m > 0$  esiste un intero  $n > 0$  tale che per  $t > s \geq n$  sia  $v(x_t - x_s) > m$ ; è infatti

$$v(x_t - x_s) = v(x_t - x_{t-1} + \dots + x_{s+1} - x_s) = v(x_{s+1} - x_s) > s$$

e quindi basta prendere  $n = m$ .

Proviamo adesso che la successione  $x_1, x_2, \dots$  non ha limite; se



fosse  $\lim x_i = x$ , considerato  $v(x_{i+1} - x_i)$  esisterebbe un indice  $j > i$  tale che  $v(x - x_j) > v(x_{i+1} - x_i)$ ; si avrebbe allora

$$v(x - x_i) = v(x - x_j + x_j - x_{j-1} + \dots + x_{i+1} - x_i) = v(x_{i+1} - x_i)$$

e quindi sarebbe

$$v(x - x_i) > \max\{v(x_i^{(1)} - x_i), \dots, v(x_i^{(r)} - x_i)\};$$

per il lemma di Krasner (vedi [11] pag. 190) si avrebbe allora  $K(x_i) \subset C K(x)$  e ciò per  $i = 1, 2, \dots$  e ciò contro la condizione  $a$ ).

**ESEMPIO 1.** *Esempio di un anello di valutazione  $A$  completo tale che  ${}^h A$  non sia completo.*

Sia  $R$  un corpo e poniamo  $K = R(Y)((X))$  e sia  $v$  una valutazione di  $K$  il cui anello è  $A = R[Y]_{(Y)} + XR(Y)[[X]]$ ;  $v$  è una valutazione il cui gruppo dei valori è  $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$  e, detto  $\mathfrak{p}$  il primo di altezza 1 di  $A$ , è  $A/\mathfrak{p} = R[Y]_{(Y)}$  e  $A_{\mathfrak{p}} = R(Y)[[X]]$ . Ne segue che  $(K, v)$  è completo (perchè  $A_{\mathfrak{p}}$  è un DVR completo) ma non henseliano (perchè  $A/\mathfrak{p}$  non è henseliano). Consideriamo  $({}^h K, {}^h v)$ ; si vede facilmente che  ${}^h K$  è di grado infinito su  $K$ ; applicando allora la proposizione 4 al corpo  $K$  munito della valutazione  $v_{\mathfrak{p}}$  il cui anello è  $A_{\mathfrak{p}}$  (rispetto alla valutazione  $v_{\mathfrak{p}}$  il corpo  $K$  è henseliano) otteniamo che  ${}^h K$  non è completo rispetto al prolungamento di  $v_{\mathfrak{p}}$  (che ha come anello  ${}^h A_{\mathfrak{p}}, {}^h A$ ) e quindi  ${}^h A$  non è completo.

**ESEMPIO 2.** *Esempio di un anello di valutazione discreta  $A$  non completo tale che  ${}^h A$  è completo.*

Sia  $R$  un corpo di caratteristica zero e poniamo  $K = R(X)$  e  $L = R((X))$  muniti entrambi della valutazione  $X$ -adica, denotata con  $v$ , di anello rispettivamente  $R[X]_{(X)}$  e  $R[[X]]$ . Si ha che  $(K, v)$  non è henseliano perchè l'equazione  $T^2 + T + X = 0$  non ha radici in  $K$ , mentre  $(L, v)$  è completo; siano  $c_1$  e  $c_2 \in R[[X]]$  le radici della precedente equazione con  $c_1 + c_2 = -1$ . Sia  $H$  un corpo massimale fra quelli che soddisfano alle condizioni:  $K \subset H \subset L$  e  $c_1, c_2 \notin H$ ; tale corpo esiste per il lemma di Zorn. Indichiamo ancora con  $v$  la restrizione di  $v$  da  $L$  ad  $H$  e sia  $A$  l'anello di  $v$  in  $H$ . Proviamo che è  ${}^h A = R[[X]]$ ; per provare ciò basta provare che  $L$  è algebrico su  $H$  (vedi [11] cor. 2 pag. 190); sia  $x \in L$ ,  $x \notin H$ ; per la massimalità di  $H$  si ha  $c_1 \in H(x)$  da cui, essendo  $c_1$  algebrico su  $H$ , segue che  $x$  è algebrico su  $H$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] M. F. ATIYAH - I. G. MACDONALD, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1969.
- [2] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Capitoli I, II, Hermann, Paris, 1961.
- [3] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*, Capitoli V, VI, Hermann, Paris, 1964.
- [4] S. GRECO, *Qualche condizione di henselianità per anelli non locali*, *Le Matematiche*, **22** (1967), 340-359.
- [5] S. GRECO, *Henselization of a ring with respect to an ideal*, *Transaction A.M.S.*, **144** (1969), 43-65.
- [6] S. GRECO - P. SALMON, *Topics on m-adic topologies*, Springer-Verlag, Berlino, 1971.
- [7] M. D. LARSEN - P. J. MCCARTHY, *Multiplicative theory of ideals*, Academic Press, New York, 1971.
- [8] F. MORA, *Permanenza di proprietà nella henselizzazione degli anelli non noetheriani*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* (in corso di stampa).
- [9] M. NAGATA, *On the theory of henselian rings*, *Nagoya Math. J.*, **5** (1953), 45-57.
- [10] M. NAGATA, *Local rings*, Interscience Publ., New York, 1962.
- [11] P. RIBEMBOIM, *Théorie des valuations*, Les Presses de l'Université de Montréal, 1964.
- [12] P. VALABREGA, *Proprietà dell'henselizzazione di anelli topologici e di valutazione*, *Symposia Mathematica*, **8** (1972), 393-403.

Manoscritto pervenuto in redazione il 31 gennaio 1974 e in forma revisionata il 28 febbraio 1974.