

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANNA MARIA BRESQUAR

**Sulle diseguglianze di Wirtinger concernenti  
la derivata seconda**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 52 (1974), p. 299-328

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1974\\_\\_52\\_\\_299\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1974__52__299_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## Sulle disequaglianze di Wirtinger concernenti la derivata seconda.

ANNA MARIA BRESQUAR (\*)

**SUMMARY** - Some problems on ordinary differential equations involve Wirtinger inequalities of second order for functions with three zeros. Extrema and monotony properties of the eigenvalue  $\lambda(\tau)$  of the inequality

$$\int_0^{\pi} y^2(t) dt < \lambda(\tau) \int_0^{\pi} [y'(t)]^2 dt, \quad (y(0) = y(\tau) = y(\pi) = 0),$$

are discussed, and a short table of  $\lambda(\tau)$  is given.

### Introduzione.

La disequaglianza di Wirtinger classica è della forma

$$(0) \quad \int_0^{\pi} y^2(t) dt < \lambda \int_0^{\pi} [y'(t)]^2 dt$$

dove  $y$  è una funzione assolutamente continua con derivata in  $L^2[0, \pi]$ , soddisfacente particolari condizioni (la costante  $\lambda$  dipende natural-

---

(\*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca matematica del C.N.R.

mente da queste ultime). Se per esempio le condizioni sono date da

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

si ha  $\lambda = 1$ , con le estremali  $y = c \sin t$  (vedi [1]).

In quest'ordine di idee la diseguaglianza di Wirtinger (0) è stata anche studiata in [8] imponendo alla  $y$  l'annullamento in  $n$  punti prefissati.

La diseguaglianza di Wirtinger (0) è stata generalizzata in diverse direzioni da vari autori (\*), introducendovi anche derivate d'ordine superiore. In particolare, la diseguaglianza

$$(1) \quad \int_0^{\pi} y^2(t) dt \leq \lambda \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt,$$

dove  $y'$  è assolutamente continua ed  $y'' \in L^2[0, \pi]$  è stata studiata in [4] come la (0), sotto le condizioni

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

e conduce a  $\lambda = 1$  con le estremali  $y = c \sin t$ .

Indichiamo ora, per comodità di esposizione, con  $A[a, b]$  lo spazio lineare delle funzioni con derivata prima assolutamente continua in  $[a, b]$  e derivata seconda appartenente a  $L^2[a, b]$ .

Studiare la (1) nell'ipotesi che  $y \in A[0, \pi]$  e si annulli in  $n$  punti prefissati, analogamente a quanto è stato fatto in [8] per la (0), conduce a problemi non semplici, in quanto il metodo usato in [8] porta facilmente a valutazioni superiori per  $\lambda$  ma, almeno in generale, non fornisce il minimo valore di  $\lambda$  compatibile con la diseguaglianza stessa e la classe di funzioni considerata; (a questo proposito si veda in questo lavoro la maggiorazione di  $\lambda$  ottenuta in 4.1).

In questo lavoro, scelto un arbitrario valore  $\tau$ , con  $0 < \tau < \pi$ , e supposto  $y \in A[0, \pi]$ , studio la diseguaglianza

$$\int_0^{\pi} y^2(t) dt \leq \lambda \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt,$$

---

(\*) Si veda per esempio [1], [2], [4], [5], [7].

con le condizioni

$$(1') \quad y(0) = y(\tau) = y(\pi) = 0, \quad 0 < \tau < \pi.$$

Per ragioni di continuità, aggiungo lo studio della diseguaglianza (1) con le condizioni limiti

$$(1'') \quad y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0$$

$$(1''') \quad y(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0.$$

I risultati relativi sono esposti nei teoremi I e II; l'ultimo paragrafo è dedicato al calcolo numerico di  $\lambda$  in funzione di  $\tau$ .

Le condizioni (1'), (1''), (1''') per  $y$  mi sono state suggerite da due proposizioni utilizzate (\*) da Richard per ottenere un risultato sulla distribuzione degli zeri consecutivi delle soluzioni di una equazione differenziale lineare del terzo ordine.

La prima delle due proposizioni ha dato origine a questo lavoro; la seconda, relativa alla diseguaglianza

$$\int_0^{\pi} [y'(t)]^2 dt \leq \lambda \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt$$

con  $y \in A[0, \pi]$  e soddisfacente una delle condizioni (1'), (1''), (1''') darà origine ad una nota analoga.

OSSERVAZIONE. Visti alcuni lavori sulla diseguaglianza (1), non sembra inutile giustificare la scelta dello spazio lineare di funzioni  $A[0, \pi]$  in cui abbiamo posto il problema.

L'assoluta continuità di  $y'$  è necessaria, come dimostra il seguente controesempio.

Sia  $\psi(x)$  la nota funzione di Cantor, continua e monotona in  $[0, 1]$ , ma ivi non assolutamente continua (\*\*), dotata di derivata prima nulla quasi dappertutto in  $[0, 1]$ .

(\*) Queste proposizioni si trovano enunciate, ma non dimostrate, in [6] al paragrafo 9.

(\*\*) Si veda: P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Princeton, Van Nostrand, 1965, p. 83.

Consideriamo la funzione  $g(x)$  con andamento « sinusoidale » ottenuta ponendo

$$g(x) = \psi(x) \quad \text{per } 0 \leq x \leq \frac{1}{2},$$

$$g(x) = g(1-x) \quad \text{per } \frac{1}{2} \leq x \leq 1,$$

$$g(x) = -g(x-1) \quad \text{per } 1 \leq x \leq 2.$$

La funzione  $g(x)$  è continua, non assolutamente, in  $[0, 2]$ , verifica le condizioni  $g(0) = g(1) = g(2) = 0$  ed ha derivata quasi dappertutto nulla in  $[0, 2]$ .

Se ora definiamo

$$h'(t) = \begin{cases} g\left(\frac{2t}{\tau}\right) & \text{per } 0 \leq t \leq \tau, \\ g\left(2\frac{t-\tau}{\pi-\tau}\right) & \text{per } \tau \leq t \leq \pi, \end{cases}$$

la funzione

$$h(t) = \int_0^t h'(u) du$$

risulta dotata di derivata prima continua, non assolutamente continua, e di derivata seconda in  $L^2[0, \pi]$ ; inoltre  $h(t)$  verifica le condizioni

$$h(0) = h(\tau) = h(\pi) = 0,$$

$$\int_0^\pi h^2(t) dt > 0, \quad \int_0^\pi [h''(t)]^2 dt = 0.$$

Pertanto per la funzione  $h(t)$  la diseuguaglianza (1) non può ovviamente aver luogo per alcun valore di  $\lambda$ .

## 1. Teorema I.

### 1.1. Enunciato.

1.11. PREMESSA. Sia  $\lambda = \lambda(\tau)$  la soluzione (\*) del problema (1) con le condizioni (1'). Tenuto conto che la sostituzione  $u = \pi - t$  muta

---

(\*) È inteso che  $y \in A[0, \pi]$ .

il problema in sè, si ha  $\lambda(\tau) = \lambda(\pi - \tau)$ ; possiamo quindi limitarci ad enunciare i risultati per  $0 < \tau \leq \pi/2$ . Per la stessa ragione è sufficiente completare lo studio del problema (1) con la condizione limite (1").

Poichè è noto che la (1) con le sole condizioni  $y(0) = y(\pi) = 0$  porge  $\lambda = 1$ , e le estremali  $y = c \sin t$  non soddisfano le (1') nè le (1"), posso senz'altro affermare che, ove il problema in esame ammetta estremali, si avrà  $0 < \lambda(\tau) < 1$ .

1.12. Suddividiamo l'enunciato in tre proposizioni.

PROPOSIZIONE a). Se  $0 < \tau < \pi/2$  la soluzione  $\lambda(\tau)$  del problema (1) con le condizioni (1') coincide con la massima radice  $\hat{\lambda}(\tau)$  dell'equazione

$$(2) \quad f(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - \lambda n^4} = 0$$

e le corrispondenti estremali sono date da

$$(3) \quad y = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\tau}{1 - \lambda(\tau) n^4} \sin nt \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

La funzione  $\lambda(\tau)$  è continua in  $]0, \pi/2[$ .

PROPOSIZIONE b). Se  $\tau = \pi/2$  la soluzione del problema (1) con le condizioni (1') è data da  $\lambda(\pi/2) = 1/16$  e le corrispondenti estremali sono date da

$$y = k \sin 2t \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Poichè

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{16},$$

$\lambda(\tau)$ , simmetrica rispetto a  $\pi/2$ , è continua anche per  $\tau = \pi/2$  (quindi in  $]0, \pi[$ ).

Inoltre risulta

$$\lambda(\tau) \sim \frac{1}{16} + \frac{(\pi - 2\tau)^2}{4\pi \operatorname{th} \pi} \quad \text{per } \tau \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

PROPOSIZIONE c). Per  $\tau \rightarrow 0$  dalla (2) si ottiene l'equazione limite

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 - \lambda n^4} = 0.$$

La massima radice  $\lambda_0$  di questa equazione è la soluzione del problema (1) con le condizioni

$$(1'') \quad y(0) = y'(0) = y(\pi) = 0.$$

Le corrispondenti funzioni estremali sono date da

$$(3') \quad y = c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1 - \lambda_0 n^4} \sin nt \quad (0 \leq t \leq \pi).$$

Si vede inoltre che

$$\lambda_0 = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \lambda(\tau)$$

quindi  $\lambda(\tau)$  è prolungabile per continuità in  $\tau = 0$ .

Più precisamente si trova

$$\lambda(\tau) \sim \lambda_0 \left( 1 - \frac{8}{3\pi} \tau \right) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0^+.$$

## 1.2. Dimostrazione della proposizione a).

### 1.21. LEMMA. Esistenza di $\hat{\lambda}(\tau)$ .

Fissato un valore  $\tau_0$  della variabile  $\tau$  con  $0 < \tau_0 < \pi/2$ , si ottiene senz'altro

$$(5) \quad f_{\lambda}(\tau_0, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \sin^2 n\tau_0}{(1 - \lambda n^4)^2}, \quad \left( \lambda \neq 0, \lambda \neq \frac{1}{n^4}, n = 1, 2, \dots \right).$$

Di modo che  $f_{\lambda}(\tau_0, \lambda) > 0$  per  $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1/n^4$ .

Da ciò e dal comportamento di  $f(\tau_0, \lambda)$  nell'intorno dei punti  $\lambda = 1/n^4$  segue che per ogni  $\tau_0$  fissato e compreso strettamente fra zero e  $\pi/2$  esiste uno ed un solo valore  $\hat{\lambda}(\tau_0)$  tale che

$$\frac{1}{16} < \hat{\lambda}(\tau_0) < 1, \quad f(\tau_0, \hat{\lambda}(\tau_0)) = 0.$$

Tale valore  $\hat{\lambda}(\tau_0)$  è la massima radice della (2) perchè per  $\lambda > 1$  si ha  $f(\tau_0, \lambda) < 0$ .

Per note proprietà delle funzioni implicite, la funzione  $\lambda = \hat{\lambda}(\tau)$  così ottenuta è continua per  $0 < \tau < \pi/2$ .

1.22. DIMOSTRAZIONE. Poichè  $y'' \in L^2[0, \pi]$ , si può porre in media quadratica

$$(6) \quad y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$

Dalla assoluta continuità di  $y'(t)$  segue

$$y'(t) = y'(0) + \int_0^t y''(u) du,$$

cioè (\*)

$$y'(t) = y'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} (1 - \cos nt) = a_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nt$$

dove si è posto

$$y'(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = a_0.$$

Tenuto conto che

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y'(t) dt = 0,$$

perchè  $y(0) = y(\pi) = 0$ , si ottiene infine

$$(7) \quad y'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nt$$

e la convergenza è uniforme per  $0 \leq t \leq \pi$ .

Analogamente si ottiene

$$(8) \quad y(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin nt$$

e la convergenza è uniforme per  $0 \leq t \leq \pi$ .

---

(\*) Si veda per esempio [3], Ch. II, 8.7.



Da ciò segue

$$(9) \quad \int_0^{\pi} y^2(t) dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^4},$$

$$(10) \quad \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

mentre la condizione  $y(\tau) = 0$  fornisce il vincolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau = 0,$$

da cui

$$(11) \quad b_1 \sin \tau = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau.$$

Pertanto, ricordando che  $0 < \tau < \pi/2$ , si ottiene

$$(12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^4} = \frac{1}{\sin^2 \tau} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau \right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^4},$$

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{1}{\sin^2 \tau} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau \right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2.$$

Eliminato così il vincolo, la diseguaglianza da dimostrare (1) diviene

$$\frac{1}{\sin^2 \tau} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau \right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^4} \leq \frac{\lambda}{\sin^2 \tau} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau \right)^2 + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2,$$

cioè

$$(14) \quad \frac{1-\lambda}{\sin^2 \tau} \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau \right)^2 \leq \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left( \lambda - \frac{1}{n^4} \right).$$

Osservo che, supposto (in accordo con i risultati del Lemma 1.21) che sia  $1/16 < \lambda < 1$ , si ha

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau\right)^2 = \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(b_n \sqrt{\lambda - \frac{1}{n^4}}\right) \left(\frac{\sin n\tau}{n^2 \sqrt{\lambda - 1/n^4}}\right)\right]^2 < \\ < \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^4}\right) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\lambda n^4 - 1},$$

da cui segue

$$(15) \quad \frac{1 - \lambda}{\sin^2 \tau} \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin n\tau\right)^2 < \frac{1 - \lambda}{\sin^2 \tau} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\lambda n^4 - 1} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^4}\right).$$

Poichè nella (15) il segno uguale ha luogo soltanto per

$$b_n = c \frac{n^2 \sin n\tau}{\lambda n^4 - 1} \quad n = 2, 3, \dots; \quad c \text{ costante arbitraria,}$$

condizione necessaria e sufficiente perchè sia valida la (14) è che riesca ancora

$$\frac{1 - \lambda}{\sin^2 \tau} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\lambda n^4 - 1} < 1.$$

Anzi perchè anche nella (14) si verifichi il caso di eguaglianza deve essere

$$\frac{1 - \lambda}{\sin^2 \tau} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\lambda n^4 - 1} = 1,$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - \lambda n^4} = 0.$$

Lo studio fatto nel Lemma 1.21 di questa equazione ci assicura che soltanto la sua massima radice  $\hat{\lambda}(\tau)$  è compresa fra  $1/16$  ed  $1$ ; è anche immediato verificare che per  $\lambda > \hat{\lambda}(\tau)$  si ha

$$\frac{1 - \lambda}{\sin^2 \tau} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\lambda n^4 - 1} < 1.$$

La prima parte della dimostrazione è terminata:  $\lambda(\tau) = \hat{\lambda}(\tau)$ .

Restano da trovare le estremali. Dalle considerazioni svolte segue che il segno uguale ha luogo nella (14) quando  $\lambda = \hat{\lambda}(\tau) = \lambda(\tau)$  e nello stesso tempo

$$b_n = c \frac{n^2 \sin n\tau}{\lambda n^4 - 1} \quad n = 2, 3, \dots,$$

cioè per

$$b_n = c \frac{n^2 \sin n\tau}{\lambda(\tau)n^4 - 1} \quad n = 2, 3, \dots$$

Sostituendo questi valori di  $b_n$  nell'equazione del vincolo (11) si ottiene

$$b_1 \sin \tau = -c \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\lambda(\tau)n^4 - 1} = -c \frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)},$$

da cui

$$b_1 = c \frac{\sin \tau}{\lambda(\tau) - 1}$$

e le estremali sono proprio date da (3).

### 1.3. Dimostrazione della proposizione b).

1.31. Dai già citati risultati relativi alla (1) con le sole condizioni  $y(0) = y(\pi) = 0$  segue che, se  $y \in A[0, \pi/2]$  ed  $y(0) = y(\pi/2) = 0$ , si ha

$$\int_0^{\pi/2} y^2(t) dt \leq \frac{1}{16} \int_0^{\pi/2} [y''(t)]^2 dt$$

e le estremali sono date da  $y = c \sin 2t$  per  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

Analogamente, se  $y \in A[\pi/2, \pi]$  ed  $y(\pi/2) = y(\pi) = 0$ , si ha

$$\int_{\pi/2}^{\pi} y^2(t) dt \leq \frac{1}{16} \int_{\pi/2}^{\pi} [y''(t)]^2 dt$$

e le estremali sono date da  $y = k \sin 2t$  per  $\pi/2 \leq t \leq \pi$ .

Nell'enunciato della proposizione *b*)  $y \in A[0, \pi]$  e soddisfa le condizioni  $y(0) = y(\pi/2) = y(\pi) = 0$ ; pertanto si ha

$$\int_0^\pi y^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} y^2(t) dt + \int_{\pi/2}^\pi y^2(t) dt \leq \\ \leq \frac{1}{16} \left[ \int_0^{\pi/2} [y''(t)]^2 dt + \int_{\pi/2}^\pi [y''(t)]^2 dt \right] = \frac{1}{16} \int_0^\pi [y''(t)]^2 dt.$$

Ne segue  $\lambda(\pi/2) = 1/16$  e le estremali sono date da  $y = k \sin 2t$  per  $0 \leq t \leq \pi$ . L'identificazione delle costanti  $c, k$  è resa necessaria dall'ipotesi di continuità di  $y'(t)$ .

1.32. Dimostriamo ora che

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{16}.$$

Dalla proposizione *a*) è noto che per  $0 < \tau < \pi/2$  si ha identicamente

$$(16) \quad f(\tau, \lambda(\tau)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - n^4 \lambda(\tau)} = 0, \quad \text{dove } \frac{1}{16} < \lambda(\tau) < 1.$$

Moltiplico questa identità per  $1 - 16\lambda(\tau)$  e passo al limite per  $\tau \rightarrow \pi/2 - 0$ ; ottengo

$$(17) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pi/2 - 0} [1 - 16\lambda(\tau)] \left[ \frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - n^4 \lambda(\tau)} \right] = 0.$$

Osservando che

$$(18) \quad \frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} > \frac{\sin^2 \tau}{1 - 1/16},$$

$$(19) \quad \frac{\sin^2 n\tau}{n^4 \lambda(\tau) - 1} \leq \frac{\sin^2 n\tau}{n^4/16 - 1} \quad (n = 3, 4, \dots),$$

ottengo

$$\frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - \lambda(\tau) n^4} \geq \frac{16 \sin^2 \tau}{15} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{16 \sin^2 n\tau}{n^4 - 16}.$$

Da ciò segue facilmente

$$(20) \quad \min \lim_{\tau \rightarrow \pi/2-0} \left[ \frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - \lambda(\tau)n^4} \right] \geq \\ \geq \lim_{\tau \rightarrow \pi/2-0} \left[ \frac{16 \sin^2 \tau}{15} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{16 \sin^2 n\tau}{n^4 - 16} \right] = \frac{16}{15} - \sum_{h=1}^{\infty} \frac{16}{(2h+1)^4 - 16} = \frac{\pi \operatorname{th} \pi}{4}.$$

Dalla (17) e dalla (20) si ottiene

$$(21) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pi/2-0} [1 - 16\lambda(\tau)] = 0.$$

Ora che è noto il valore del limite di  $\lambda(\tau)$  per  $\tau \rightarrow \pi/2 - 0$ , e quindi per simmetria quando  $\tau \rightarrow \pi/2$ , possiamo facilmente ottenere una formula asintotica di  $\lambda(\tau)$  in un intorno di  $\pi/2$ .

Passando al limite per  $\tau \rightarrow \pi/2$  nella serie

$$\frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - n^4 \lambda(\tau)},$$

dotata di convergenza uniforme in un intorno di  $\pi/2$ , possiamo migliorare il risultato dato dalla (20) e trovare che

$$(22) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pi/2} \left[ \frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - n^4 \lambda(\tau)} \right] = \frac{\pi \operatorname{th} \pi}{4}.$$

Da quest'ultimo risultato e dalla (16) si ottiene

$$\lim_{\tau \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 2\tau}{1 - 16\lambda(\tau)} = -\frac{\pi \operatorname{th} \pi}{4},$$

da cui ancora

$$\lambda(\tau) \sim \frac{1}{16} + \frac{\sin^2 2\tau}{4\pi \operatorname{th} \pi} \sim \frac{1}{16} + \frac{(\pi - 2\tau)^2}{4\pi \operatorname{th} \pi} \quad \text{per } \tau \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

1.33. OSSERVAZIONE. Vista la continuità di  $\lambda(\tau)$  per  $\tau = \pi/2$  ci si può chiedere se anche le relative estremali  $y = k \sin 2t$  si raccordino con continuità a quelle fornite da (3) relative a  $0 < \tau < \pi/2$ . La risposta è affermativa, purchè nella (3) si esprima la costante arbi-

traria  $c$  in funzione di  $\tau$  e precisamente si ponga

$$c(\tau) = h \sin 2\tau, \quad h \text{ costante.}$$

Le estremali sono allora date da

$$y(t, \tau) = h \sin 2\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\tau}{1 - \lambda(\tau)n^4} \sin nt.$$

Passando al limite per  $\tau \rightarrow \pi/2$  si ottiene

$$\lim_{\tau \rightarrow \pi/2} y(t, \tau) = h \lim_{\tau \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 2\tau}{1 - 16\lambda(\tau)} \sin 2t = -\frac{h\pi \operatorname{th} \pi}{4} \sin 2t,$$

ed era ciò che si voleva. Questo artificio dispensa da una normalizzazione della famiglia delle estremali, quale si potrebbe ottenere imponendo la condizione

$$\int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt = 1.$$

#### 1.4. Dimostrazione della proposizione c).

1.41. LEMMA. Studio della equazione (4).

Procedendo in modo analogo a quello del Lemma 1.21 si vede che l'equazione (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 - \lambda n^4} = 0$$

possiede una ed una sola radice  $\lambda_0$  compresa fra  $1/16$  ed  $1$ ; essa è anche la massima radice dell'equazione (4).

Per calcolarla pongo  $\alpha = \lambda^{-1/4}$  ed ottengo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 - \lambda n^4} = \alpha^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\alpha^4 - n^4} = \frac{\alpha^3 \pi}{4} [\cotg \alpha\pi - \operatorname{coth} \alpha\pi].$$

Pertanto la massima radice  $\lambda_0$  dell'equazione (4) si ottiene in corrispondenza alla minima radice positiva  $\alpha_0\pi$  dell'equazione

$$\cotg \alpha\pi = \operatorname{coth} \alpha\pi.$$

Si trova

$$\begin{aligned}\alpha_0 \pi &= 3,9266023120, \\ \alpha_0 &= 1,2498763350, \\ \lambda_0 &= \frac{1}{\alpha_0^4} = 0,4097621302.\end{aligned}$$

1.42. DIMOSTRAZIONE. Verifico ora che la (1) con le condizioni (1<sup>o</sup>) sussiste per  $\lambda = \lambda_0$  (e che  $\lambda_0$  è il minimo numero per il quale essa è vera); la dimostrazione è strettamente analoga a quella della proposizione a).

Pongo, in media quadratica,

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

da cui, tenendo conto delle condizioni  $y(0) = y(\pi) = 0$ , ottengo

$$y'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cos nt, \quad y(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} \sin nt,$$

ed entrambe le serie convergono uniformemente in  $[0, \pi]$ .

Infine la condizione  $y'(0) = 0$  fornisce il vincolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = 0,$$

da cui

$$(23) \quad b_1 = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}.$$

Ricordando la (9), la (10) e la (23), la diseuguaglianza da dimostrare diviene

$$\left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n} \right)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n^2}{n^4} \leq \lambda \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n} \right)^2 + \lambda \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2,$$

da cui

$$(24) \quad (1 - \lambda) \left( \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n} \right)^2 \leq \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left( \lambda - \frac{1}{n^4} \right).$$

Supposto, in accordo con il Lemma 1.41, che sia  $1/16 < \lambda < 1$ , posso scrivere

$$\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}\right)^2 = \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left(b_n \sqrt{\lambda - \frac{1}{n^4}}\right) \left(\frac{1}{n \sqrt{\lambda - 1/n^4}}\right)\right]^2 < \\ < \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^4}\right) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda n^4 - 1},$$

da cui segue

$$(25) \quad (1 - \lambda) \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n}\right)^2 < (1 - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \left(\lambda - \frac{1}{n^4}\right) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda n^4 - 1}.$$

Poichè nella (25) il segno uguale ha luogo per

$$b_n = c \frac{n^3}{\lambda n^4 - 1} \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad c \text{ costante arbitraria,}$$

condizione necessaria e sufficiente perchè sia valida la (24) è che riesca

$$(1 - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda n^4 - 1} < 1.$$

Anzi, perchè anche nella (24) si verifichi il segno di uguaglianza deve essere

$$(1 - \lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda n^4 - 1} = 1,$$

cioè

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1 - \lambda n^4} = 0.$$

Sapendo dal Lemma 1.41 che soltanto la massima radice  $\lambda_0$  di questa equazione è compresa fra  $1/16$  ed  $1$ , la dimostrazione relativa alla determinazione di  $\lambda$  è terminata.

Ricaviamo ora le corrispondenti estremali. Dalle considerazioni svolte segue che il segno uguale ha luogo nella (24) quando

$$b_n = c \frac{n^3}{\lambda_0 n^4 - 1} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Resta da ricavare  $b_1$  che si ottiene dall'equazione del vincolo (23).



Abbiamo

$$b_1 = -c \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\lambda_0 n^4 - 1} = \frac{c}{\lambda_0 - 1}$$

e pertanto le estremali sono proprio date da (3').

1.43. Vogliamo ora dimostrare che

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \lambda(\tau) = \lambda_0.$$

Noi sappiamo che per  $0 < \tau < \pi/2$  la soluzione  $\lambda(\tau)$  del problema (1) con le condizioni (1') è definita (implicitamente) dall'equazione

$$f(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - \lambda n^4} = 0.$$

Per studiare il comportamento di  $\lambda(\tau)$  per  $\tau \rightarrow 0^+$  sostituiamo l'equazione  $f(\tau, \lambda) = 0$  con l'altra

$$(26) \quad f^*(\tau, \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[U_{n-1}(\cos \tau)]^2}{1 - \lambda n^4} = 0,$$

dove

$$U_{n-1}(\cos \tau) = \frac{\sin n\tau}{\sin \tau}$$

è il polinomio di Čebyšev.

Questa equazione per  $\tau = 0$  fornisce l'equazione limite (4), perciò

$$f^*(0, \lambda_0) = 0.$$

Poichè  $|U_{n-1}(\cos \tau)| \leq n$ , la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[U_{n-1}(\cos \tau)]^2}{1 - \lambda n^4}$$

converge uniformemente, assieme alla serie delle derivate rispetto a  $\lambda$ , nella striscia

$$-\infty < \tau < +\infty, \quad \frac{1}{16} + \varepsilon < \lambda < 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0);$$

pertanto all'equazione  $f^*(\tau, \lambda) = 0$  è applicabile il teorema del Dini in un intorno del punto  $(0, \lambda_0)$ . Ne segue che detta equazione possiede una sola soluzione continua  $\lambda = \lambda^*(\tau)$  tale che  $\lambda_0 = \lambda^*(0)$ , e che questa funzione  $\lambda^*(\tau)$  coincide con  $\lambda(\tau)$  per  $0 < \tau < \pi/2$ .

Quindi

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \lambda(\tau) = \lambda_0 .$$

Perciò la funzione  $\lambda(\tau)$  si può prolungare per continuità nel punto  $\tau = 0$  e da questo momento in poi, quando useremo  $\lambda(\tau)$ , la penseremo sempre così prolungata, di modo che  $\lambda(\tau)$  risulta continua in  $[0, \pi/2]$  (e quindi per simmetria in  $[0, \pi]$ ).

Per la dimostrazione della formola asintotica di  $\lambda(\tau)$  in un intorno destro dello zero rimandiamo al paragrafo 3.

## 2. Teorema II.

### 2.1. Enunciato.

La funzione  $\lambda(\tau)$  è decrescente in  $[0, \pi/2]$ , e quindi — per simmetria — crescente in  $[\pi/2, \pi]$ .

### 2.2. Schema della dimostrazione.

Posto, come già nel Lemma 1.41,  $\alpha = \lambda^{-\frac{1}{2}}$  e quindi  $\alpha(\tau) = [\lambda(\tau)]^{-\frac{1}{2}}$ , dimostrerò che  $\alpha(\tau)$  è crescente in  $[0, \pi/2]$ .

A tale scopo mostrerò che  $\alpha'(\tau) > 0$  in  $]0, \pi/2[$ .

Posto

$$(27) \quad F(\tau, \alpha) = 8f(\tau, \alpha^{-4}), \quad 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}, 1 < \alpha < 2 ,$$

dalla (5) si ha

$$f_\lambda(\tau, \lambda) > 0, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{2}, \frac{1}{16} < \lambda < 1 ,$$

e quindi

$$F_\alpha(\tau, \alpha) < 0, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{2}, 1 < \alpha < 2 .$$

Si ha allora

$$(28) \quad \alpha'(\tau) = -\frac{F_\tau(\tau, \alpha(\tau))}{F_\alpha(\tau, \alpha(\tau))} \quad (0 < \tau < \pi/2),$$

ed il teorema si riduce a dimostrare che

$$F_\tau(\tau, \alpha(\tau)) > 0 \quad (0 < \tau < \pi/2).$$

La dimostrazione non è brevissima perchè  $F_\tau(\tau, \alpha)$  cambia segno nel rettangolo  $R$

$$R \begin{cases} 0 < \tau < \pi/2, \\ 1 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Essa si può suddividere in tre parti.

*Parte I:* somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{1 - \lambda n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^4 \sin^2 n\tau}{\alpha^4 - n^4}$$

e quindi espressione in termini finiti di  $F(\tau, \alpha)$ .

*Parte II:* determinazione del segno di  $F_\tau(\tau, \alpha)$  in alcune zone del rettangolo  $R$  (vedi fig. 2). Se ne deduce in particolare che il luogo  $\Gamma_1$  di equazione  $F_\tau(\tau, \alpha) = 0$  (per  $0 < \tau < \pi/2$ ) è contenuto nella regione  $H$

$$H \begin{cases} \pi < \alpha(\pi - 2\tau) < \alpha_0 \pi, \\ \alpha_0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Si osserva a questo punto che  $F_\tau(\tau, \alpha(\tau)) > 0$  almeno in  $\pi/4 < \tau < \pi/2$  e che quindi la dimostrazione del teorema II si può ricondurre al fatto che le curve di equazioni  $\alpha = \alpha(\tau)$  e  $F_\tau(\tau, \alpha) = 0$  non abbiano punti comuni in  $H$  (e quindi in  $R$ ).

*Parte III:* il luogo  $\Gamma_1$  è un arco di Jordan prolungabile fino alla frontiera del rettangolo  $R$  con estremi  $(0, \alpha_0)$  e  $(\pi/4, 2)$ . Poichè la curva  $\Gamma$  di equazione  $\alpha = \alpha(\tau)$  raggiunge anch'essa la frontiera di  $R$  con estremi  $(0, \alpha_0)$  e  $(\pi/2, 2)$ , si dimostra che le curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  non hanno punti comuni all'infuori di  $(0, \alpha_0)$ .

2.3. *Dimostrazione della parte I.*

Considero per  $1 < \alpha < 2$  le note serie

$$\frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} \cdot \cos \alpha(\pi - x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos nx}{\alpha^2 - n^2},$$

$$\frac{\alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi} \cdot \text{ch } \alpha(\pi - x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha^2 \cos nx}{\alpha^2 + n^2},$$

convergenti uniformemente in  $x$  per  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Sommando ottengo

$$(29) \quad \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} \cos \alpha(\pi - x) + \frac{\alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi} \text{ch } \alpha(\pi - x) = 2 + 4\alpha^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\alpha^4 - n^4},$$

che per  $x = 0$  porge

$$(30) \quad \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} \cos \alpha\pi + \frac{\alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi} \text{ch } \alpha\pi = 2 + 4\alpha^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^4 - n^4}.$$

Sottraendo dalla (30) la (29) e ponendo  $x = 2\tau$  ottengo la serie convergente uniformemente per  $0 \leq \tau \leq \pi$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} [\cos \alpha\pi - \cos \alpha(\pi - 2\tau)] + \frac{\alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi} [\text{ch } \alpha\pi - \text{ch } \alpha(\pi - 2\tau)] = \\ = 8\alpha^4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{\alpha^4 - n^4}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$(31) \quad F(\tau, \alpha) = \frac{\alpha\pi}{\sin \alpha\pi} [\cos \alpha\pi - \cos \alpha(\pi - 2\tau)] + \\ + \frac{\alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi} [\text{ch } \alpha\pi - \text{ch } \alpha(\pi - 2\tau)].$$

2.4. *Dimostrazione della parte II.*

2.41. LEMMA. Studio della funzione  $v = (\sin u)/\text{sh } u$  per  $\pi \leq u \leq 2\pi$ .

Si ha  $v(\pi) = v(2\pi) = 0$ , mentre  $v(u) < 0$  in  $]\pi, 2\pi[$ . In  $[\pi, 2\pi]$  l'equazione  $v'(u) = 0$  ammette una sola soluzione che coincide con la minima radice positiva dell'equazione  $\text{coth } u = \cotg u$  cioè, come è noto dal Lemma 1.41, con  $u = \alpha_0\pi$ .

Si ha inoltre

$$v' < 0 \quad \text{per } \pi \leq u < \alpha_0\pi, \quad v' > 0 \quad \text{per } \alpha_0\pi < u \leq 2\pi.$$

Perciò  $(\sin \alpha_0 \pi) / \text{sh } \alpha_0 \pi$  è il minimo di  $(\sin u) / \text{sh } u$  in  $[\pi, 2\pi]$ . Il grafico di  $v = (\sin u) / \text{sh } u$  in  $[\pi, 2\pi]$  è il seguente:

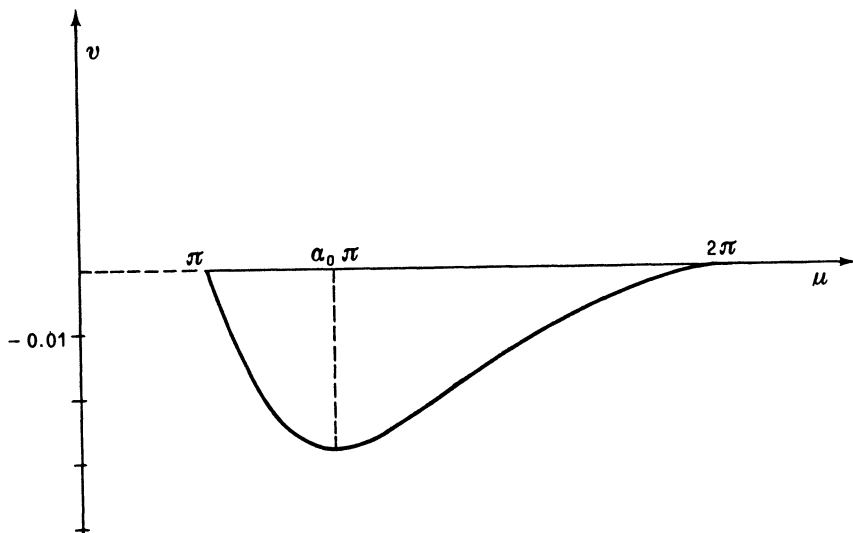


Fig. 1.

2.42. Esamino ora  $F_\tau(\tau, \alpha)$  in  $R$ . Dalla (31) ottengo

$$(32) \quad F_\tau(\tau, \alpha) = 2\alpha^2 \pi \left[ \frac{\text{sh } \alpha(\pi - 2\tau)}{\text{sh } \alpha\pi} - \frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\sin \alpha\pi} \right].$$

Osservo che da  $1 < \alpha < 2$  segue  $\sin \alpha\pi < 0$ , mentre  $\sin \alpha(\pi - 2\tau)$  cambia segno in  $R$ .

Consideriamo alcuni sottoinsiemi di  $R$  nei quali si può facilmente dedurre il segno di  $F_\tau(\tau, \alpha)$ .

Sottoinsieme  $A$ :  $0 < \alpha(\pi - 2\tau) \leq \pi$ . Si ha ovviamente:  $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$ .

Sottoinsieme  $B$ :  $\pi < \alpha(\pi - 2\tau) < \alpha\pi \leq \alpha_0\pi$ . Si ha ancora  $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$ .

Infatti la funzione  $v = (\sin u) / \text{sh } u$  decresce in  $[\pi, \alpha_0\pi]$ , da cui segue

$$\frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\text{sh } \alpha(\pi - 2\tau)} > \frac{\sin \alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi}$$

e quindi  $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$ .

Sottoinsieme  $C$ :  $\alpha_0\pi \leq \alpha(\pi - 2\tau) < \alpha\pi < 2\pi$ . Si ha invece  $F_\tau(\tau, \alpha) < 0$ .

Infatti la funzione  $v = (\sin u)/\text{sh } u$  cresce in  $[\alpha_0\pi, 2\pi]$ , da cui segue

$$\frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\text{sh } \alpha(\pi - 2\tau)} < \frac{\sin \alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi}$$

e quindi  $F_\tau(\tau, \alpha) < 0$ .

Resta da esaminare il segno di  $F_\tau(\tau, \alpha)$  quando

$$\pi < \alpha(\pi - 2\tau) < \alpha_0\pi < \alpha\pi < 2\pi,$$

cioè nella regione  $H$ . Come si comprende dal grafico di  $v = (\sin u)/\text{sh } u$ , esistono in  $H$  valori per cui la funzione  $F_\tau(\tau, \alpha)$  si annulla cioè valori tali che

$$\frac{\sin \alpha(\pi - 2\tau)}{\text{sh } \alpha(\pi - 2\tau)} = \frac{\sin \alpha\pi}{\text{sh } \alpha\pi}.$$

Inoltre in  $H$   $F_\tau(\tau, \alpha)$  cambia segno. Da queste considerazioni e dal comportamento di  $F_\tau(\tau, \alpha)$  negli insiemi  $A, B, C$  segue che il luogo  $\Gamma_1$  è contenuto in  $H$ .

Possiamo visualizzare la situazione disegnando nel piano  $(\tau, \alpha)$  le due iperboli di equazioni  $\alpha(\pi - 2\tau) = \pi$ ,  $\alpha(\pi - 2\tau) = \alpha_0\pi$ .

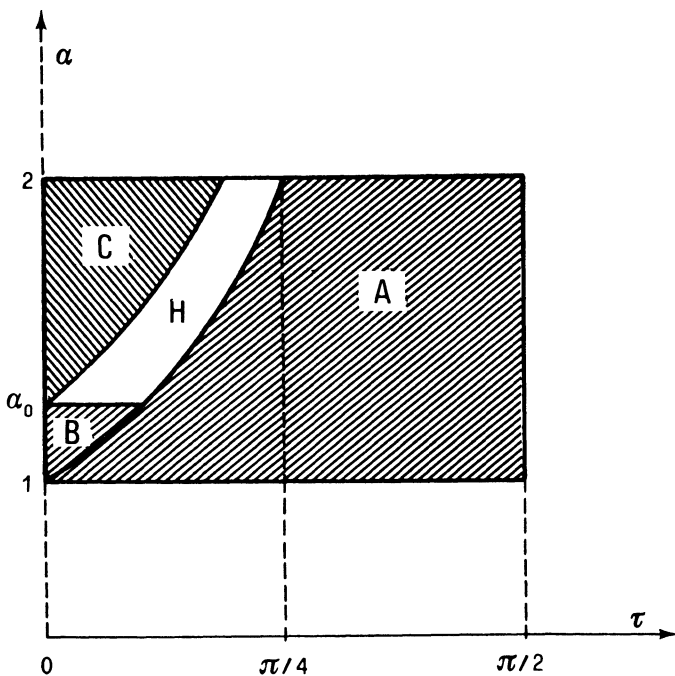


Fig. 2.

Nell'insieme  $A \cup B$  si ha  $F_\tau(\tau, \alpha) > 0$ . In  $C$  si ha  $F_\tau(\tau, \alpha) < 0$ .

Consideriamo ora  $F_\tau(\tau, \alpha(\tau))$  in  $]0, \pi/2[$  ed osserviamo che essa è certamente positiva in  $]\pi/4, \pi/2[$ . Dal momento che  $F_\tau(\tau, \alpha(\tau))$  è continua in  $]0, \pi/2[$ , l'esistenza di un punto in cui essa è negativa implicherebbe l'esistenza di un punto in cui essa è nulla; in tale caso la curva  $\Gamma$  di equazione  $\alpha = \alpha(\tau)$  avrebbe un punto in comune con  $\Gamma_1$  (ovviamente nella regione  $H$ ).

Per dimostrare che  $F_\tau(\tau, \alpha(\tau)) > 0$  in  $]0, \pi/2[$  basterà quindi verificare che  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  non hanno punti comuni nella regione  $H$ .

## 2.5. Dimostrazione della parte III.

2.51. Eseguo la trasformazione birazionale  $\mathfrak{C}$

$$(33) \quad x = \alpha\pi \quad y = \alpha(\pi - 2\tau),$$

la cui inversa è

$$(33') \quad \alpha = \frac{x}{\pi}, \quad \tau = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{y}{x}\right).$$

Questa trasformazione muta il rettangolo  $R$  nel trapezio

$$\mathfrak{C}(R) \begin{cases} \pi < x < 2\pi, \\ 0 < y < x. \end{cases}$$

La regione  $H$  a cui appartiene il luogo  $\Gamma_1$  si trasforma nel rettangolo

$$\mathfrak{C}(H) \begin{cases} \alpha_0\pi < x < 2\pi, \\ \pi < y < \alpha_0\pi. \end{cases}$$

L'equazione di  $\mathfrak{C}(\Gamma_1)$  diviene

$$(34) \quad \frac{\sin y}{\operatorname{sh} y} = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \quad (x, y) \in \mathfrak{C}(H).$$

L'andamento della funzione  $(\sin u)/\operatorname{sh} u$  in  $[\pi, 2\pi]$ , vedi fig. 1, mostra che la  $y(x)$  definita dalla (34) è funzione continua decrescente di  $x$  in  $]\alpha_0\pi, 2\pi[$ . Inoltre

$$(35) \quad \lim_{x \rightarrow \alpha_0\pi^+} y(x) = \alpha_0\pi, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} y(x) = \pi,$$

e quindi  $\mathfrak{C}(I_1)$  è nel piano  $(x, y)$  un arco di Jordan prolungato negli estremi  $(\alpha_0\pi, \alpha_0\pi)$ ,  $(2\pi, \pi)$ .

Pertanto nel piano  $(\tau, \alpha)$  il luogo  $I_1$  è un arco di Jordan prolungato negli estremi  $(0, \alpha_0)$ ,  $(\pi/4, 2)$ , i quali soltanto appartengono alla frontiera di  $H$  (e di  $R$ ).

Ricordiamo che l'arco  $I$  di equazione  $\alpha = \alpha(\tau)$  è definito implicitamente dall'equazione (31)

$$F(\tau, \alpha) = 0, \quad (\tau, \alpha) \in R,$$

ed è stato prolungato negli estremi  $(0, \alpha_0)$  e  $(\pi/2, 2)$ ; pertanto  $\mathfrak{C}(I)$  verifica l'equazione

$$(36) \quad \frac{\cos x - \cos y}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y} = - \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}, \quad (x, y) \in \mathfrak{C}(R),$$

e le coordinate dei suoi estremi sono  $(\alpha_0\pi, \alpha_0\pi)$  e  $(2\pi, 0)$ .

2.52. Dimostriamo ora che le curve  $\mathfrak{C}(I)$ ,  $\mathfrak{C}(I_1)$  non hanno punti comuni all'infuori dell'estremo  $(\alpha_0\pi, \alpha_0\pi)$ , cioè che il sistema delle equazioni (34), (36)

$$\begin{cases} \frac{\sin y}{\operatorname{sh} y} = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \\ \frac{\cos x - \cos y}{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y} = - \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \end{cases}$$

non ha soluzioni in  $\mathfrak{C}(H)$ .

Applicando il teorema di Cauchy al primo membro della (36) ottengo

$$\frac{\sin \xi}{\operatorname{sh} \xi} = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \quad (\pi < y < \xi < x < 2\pi).$$

Pertanto il sistema equivale a

$$\frac{\sin y}{\operatorname{sh} y} = \frac{\sin \xi}{\operatorname{sh} \xi} = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x} \quad (\pi < y < \xi < x < 2\pi).$$

È ora evidente che questo sistema non ammette soluzioni in  $\mathfrak{C}(H)$  visto l'andamento della funzione  $(\sin u)/\operatorname{sh} u$  (vedi fig. 1).



Si conclude che anche le curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  del piano  $(\tau, \alpha)$  non hanno punti comuni fuori dell'estremo  $(0, \alpha_0)$  e finalmente la dimostrazione del teorema II è conclusa.

### 3. Formula asintotica per $\lambda(\tau)$ in un intorno dell'origine.

3.1. Per semplicità di calcolo conviene operare sulla corrispondente funzione  $\alpha = \alpha(\tau) = [\lambda(\tau)]^{-\frac{1}{2}}$ ; troveremo

$$(37) \quad \alpha(\tau) \sim \alpha_0 \left( 1 + \frac{2}{3\pi} \tau \right) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0^+,$$

quindi

$$\lambda(\tau) \sim \lambda_0 \left( 1 - \frac{8}{3\pi} \tau \right) \quad \text{per } \tau \rightarrow 0^+.$$

La formula (37) per  $\alpha(\tau)$  equivale alla conoscenza della retta tangente alla curva  $\Gamma$  nell'estremo  $(0, \alpha_0)$ .

### 3.2. Dimostrazione.

L'equazione  $F(\tau, \alpha) = 0$ , con  $F(\tau, \alpha)$  data da (31), determina  $\Gamma$  nell'aperto  $R$ . La parte di frontiera di  $R$  definita da  $\tau = 0, 1 < \alpha < 2$  verifica pure l'equazione  $F(\tau, \alpha) = 0$ . Il punto  $(0, \alpha_0)$  è comune a  $\Gamma$  ed a questa parte di frontiera. È ora lecito semplificare il calcolo sostituendo  $F(\tau, \alpha)$  con

$$(38) \quad \Phi(\tau, \alpha) = \frac{\sin \alpha \pi \operatorname{sh} \alpha \pi F(\tau, \alpha)}{4\alpha^3 \pi} = \\ = \frac{1}{4\alpha^2} \{ \operatorname{sh} \alpha \pi [\cos \alpha \pi - \cos \alpha(\pi - 2\tau)] + \sin \alpha \pi [\operatorname{ch} \alpha \pi - \operatorname{ch} \alpha(\pi - 2\tau)] \}.$$

Poichè  $\Phi(0, \alpha) = 0, \Phi_\tau(0, \alpha) = 0$ , sviluppando  $\Phi(\tau, \alpha)$  in serie di Mac Laurin, per ora della sola  $\tau$ , si ottiene

$$(39) \quad \Phi(\tau, \alpha) = \frac{1}{2!} \tau^2 \Phi_{\tau\tau}(0, \alpha) + \frac{1}{3!} \tau^3 \Phi_{\tau\tau\tau}(0, \alpha) + \dots$$

Eliminata la componente doppia  $\tau = 0$ , l'equazione dell'arco  $\Gamma$  nell'intervallo  $0 \leq \tau < \pi/2$  è affidata alla rappresentazione analitica

$$(40) \quad \Phi_{\tau\tau}(0, \alpha) + \frac{1}{3} \tau \Phi_{\tau\tau\tau}(0, \alpha) + \dots = 0,$$

infatti  $\Phi_{\tau\tau}(0, \alpha_0) = 0$ .

Sviluppando ora il primo membro della (40) anche secondo le potenze di  $\alpha - \alpha_0$ , si trova per la tangente all'arco  $\Gamma$  nel punto  $(0, \alpha_0)$  l'equazione

$$(41) \quad (\alpha - \alpha_0) \Phi_{\tau\tau\alpha}(0, \alpha_0) + \frac{1}{3} \tau \Phi_{\tau\tau\tau}(0, \alpha_0) = 0.$$

Completando i calcoli si ottiene

$$(\alpha - \alpha_0)(-2\pi \operatorname{sh} \alpha_0 \pi \sin \alpha_0 \pi) + \frac{1}{3} \tau \cdot 4\alpha_0 \operatorname{sh} \alpha_0 \pi \sin \alpha_0 \pi = 0$$

e quindi la (37).

#### 4. Valutazioni numeriche di $\lambda(\tau)$ .

##### 4.1. *Maggiorante di $\lambda(\tau)$ .*

4.1.1. Enunciato: si ha

$$\lambda(\tau) \leq \max \left[ \frac{\tau^4}{\pi^4}, \frac{(\pi - \tau)^4}{\pi^4} \right] \quad \text{per } 0 \leq \tau \leq \pi;$$

il segno uguale vale soltanto per  $\tau = \pi/2$ .

4.1.2. D'accordo con l'introduzione diciamo  $W[a, b]$  lo spazio lineare delle funzioni  $y \in A[a, b]$ , nulle per  $t = a, t = b$ .

Diciamo inoltre  $W_\tau[0, \pi]$  la classe delle funzioni che, oltre ad appartenere a  $W[0, \pi]$  verificano una delle condizioni

$$\begin{aligned} y(\tau) &= 0 & \text{per } 0 < \tau < \pi, \\ y'(0) &= 0 & \text{per } \tau = 0, \\ y'(\pi) &= 0 & \text{per } \tau = \pi. \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che

$$\int_0^{\pi} y^2(t) dt \leq \lambda(\tau) \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt \quad \text{per } y \in W_{\tau}[0, \pi]$$

essendo la funzione  $\lambda(\tau)$  determinata per  $0 \leq \tau \leq \pi$  nell'enunciato del teorema I (paragrafi 1.11, 1.12).

Consideriamo ora per  $0 < \tau < \pi$  la classe  $W_{\tau}^{(1)}[0, \pi]$  di funzioni definite in  $[0, \pi]$  e tali che le loro restrizioni negli intervalli  $[0, \tau]$  e  $[\tau, \pi]$  appartengano rispettivamente a  $W[0, \tau]$  e  $W[\tau, \pi]$ . Nel caso sia  $\tau = 0$  oppure  $\tau = \pi$  identifichiamo  $W_{\tau}^{(1)}[0, \pi]$  con  $W[0, \pi]$ . In ogni caso  $W_{\tau}^{(1)}[0, \pi]$  è una estensione propria di  $W_{\tau}[0, \pi]$ .

Ne segue che, se il nostro problema è risolvibile nello spazio  $W_{\tau}^{(1)}[0, \pi]$ , si ha

$$(42) \quad \int_0^{\pi} y^2(t) dt \leq \lambda^{(1)}(\tau) \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt, \quad y \in W_{\tau}^{(1)}[0, \pi],$$

con  $\lambda^{(1)}(\tau) \geq \lambda(\tau)$ .

Vedremo che  $\lambda^{(1)}(\tau) > \lambda(\tau)$ , salvo che per  $\tau = \pi/2$ ; più precisamente dimostreremo che

$$(43) \quad \lambda^{(1)}(\tau) = \max \left[ \frac{\tau^4}{\pi^4}, \frac{(\pi - \tau)^4}{\pi^4} \right].$$

4.13. DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che, se  $y \in W[0, \tau]$ , o rispettivamente,  $y \in W[\tau, \pi]$ , si ha (cfr. 1.31).

$$\int_0^{\tau} y^2(t) dt \leq \frac{\tau^4}{\pi^4} \int_0^{\tau} [y''(t)]^2 dt,$$

$$\int_{\tau}^{\pi} y^2(t) dt \leq \frac{(\pi - \tau)^4}{\pi^4} \int_{\tau}^{\pi} [y''(t)]^2 dt.$$

Quindi se  $y \in W_{\tau}^{(1)}[0, \pi]$  si ha

$$\int_0^{\pi} y^2(t) dt = \int_0^{\tau} y^2(t) dt + \int_{\tau}^{\pi} y^2(t) dt \leq \frac{\tau^4}{\pi^4} \int_0^{\tau} [y''(t)]^2 dt + \frac{(\pi - \tau)^4}{\pi^4} \int_{\tau}^{\pi} [y''(t)]^2 dt \leq \max \left[ \frac{\tau^4}{\pi^4}, \frac{(\pi - \tau)^4}{\pi^4} \right] \int_0^{\pi} [y''(t)]^2 dt .$$

Se  $\pi/2 < \tau \leq \pi$  le estremali sono date da

$$(44) \quad y_1(t) = \begin{cases} c \sin \frac{\pi t}{\tau} & (0 \leq t \leq \tau) , \\ 0 & (\tau \leq t \leq \pi) . \end{cases}$$

Se  $0 \leq \tau < \pi/2$  le estremali sono date da

$$(45) \quad y_2(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \tau) , \\ c \sin \left( \frac{\pi - t}{\pi - \tau} \pi \right) & (\tau \leq t \leq \pi) . \end{cases}$$

Per  $\tau = \pi/2$  esistono le estremali  $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ . Si conclude che la (42) è valida con  $\lambda^{(1)}(\tau)$  data dalla (43).

Resta da dimostrare, per  $\tau \neq \pi/2$ , la disuguaglianza in senso stretto tra  $\lambda(\tau)$  e  $\lambda^{(1)}(\tau)$ .

Osserviamo innanzitutto che

$$\lambda_0 = \lambda(0) < \lambda^{(1)}(0) = 1, \quad \lambda_0 = \lambda(\pi) < \lambda^{(1)}(\pi) = 1 .$$

Sia ora  $0 < \tau < \pi$ . Se  $\tau \neq \pi/2$  le estremali (44), (45) non sono derivabili per  $t = \tau$ ; ciò comporta senz'altro

$$\lambda(\tau) < \lambda^{(1)}(\tau) .$$

Finalmente, se  $\tau = \pi/2$ , esistono nello spazio  $W_{\pi/2}^{(1)}[0, \pi]$  le estremali  $y = c \sin 2t$ , coincidenti con le estremali dello spazio  $W_{\pi/2}[0, \pi]$ . Si ha infatti

$$\lambda \left( \frac{\pi}{2} \right) = \lambda^{(1)} \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{16} .$$

4.14. OSSERVAZIONE. Il ragionamento precedente mostra che nello spazio  $W_{\tau}^{(1)}[0, \pi]$  il nostro problema ammette ancora una soluzione (la funzione  $\lambda^{(1)}(\tau)$ ).

Non sarebbe invece possibile ampliare diversamente lo spazio  $W_\tau[0, \pi]$  delle funzioni  $y$  tollerando anche un solo salto della  $y'$  in un punto di ascissa  $t_0$  diversa da  $\tau$ . Un tale spazio, comprendendo funzioni lineari a tratti in un intorno di  $t_0$ , comporterebbe

$$\sup_0^\pi \frac{\int_0^\pi y^2(t) dt}{\int_0^\pi [y''(t)]^2 dt} = +\infty.$$

4.2. *Minorante di  $\lambda(\tau)$ .*

4.21. **Enunciato:** si ha

$$(46) \quad \lambda(\tau) > \frac{4 \cos^2 \tau + 1}{4 \cos^2 \tau + 16} \quad \text{per } 0 < \tau < \pi;$$

il segno uguale vale soltanto per  $\tau = \pi/2$ .

4.22. **DIMOSTRAZIONE.** Vista la simmetria rispetto a  $\tau = \pi/2$  dei due membri della (46) basta verificare la diseuguaglianza per  $0 < \tau < \pi/2$ .

Poichè  $\lambda(\tau)$ , per  $0 < \tau < \pi/2$ , verifica l'equazione (2), ed inoltre  $1/16 < \lambda(\tau) < 1$ , si ha

$$\frac{\sin^2 \tau}{1 - \lambda(\tau)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin^2 n\tau}{n^4 \lambda(\tau) - 1} > \frac{\sin^2 2\tau}{16\lambda(\tau) - 1} \quad (0 < \tau < \pi/2).$$

Risolvendo si trova appunto

$$\lambda(\tau) > \frac{4 \cos^2 \tau + 1}{4 \cos^2 \tau + 16} \quad (0 < \tau < \pi/2).$$

Si verifica immediatamente che la diseuguaglianza rimane vera per  $\tau = 0$ , mentre si trasforma in una eguaglianza per  $\tau = \pi/2$ . La dimostrazione è terminata.

4.3. *Tabulazione di  $\lambda(\tau)$  per  $0 < \tau < \pi/2$ .*

La tavola è stata calcolata per

$$\tau = n \frac{\pi}{32}, \quad n = 0, 1, \dots, 16.$$

Tolti i valori estremi di  $\alpha(\tau)$ ,  $\lambda(\tau)$ , calcolati in precedenza (1.41, 1.31), ci si è serviti dell'equazione

$$(47) \quad \frac{F(\tau, \alpha)}{\alpha\pi} = 0,$$

con  $F(\tau, \alpha)$  data dalla (31).

Le limitazioni ottenute in 4.1, 4.2 per  $\lambda(\tau)$  si traducono per  $\alpha(\tau)$  nelle

$$\frac{\pi}{\pi - \tau} < \alpha(\tau) < \left( \frac{4 \cos^2 \tau + 16}{4 \cos^2 \tau + 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (0 < \tau < \pi/2),$$

e permettono una facile applicazione del metodo dicotomico alla risoluzione dell'equazione (47) per

$$\tau = n \frac{\pi}{32}, \quad n = 1, 2, \dots, 15.$$

Se ne sono poi ricavati i valori di  $\lambda(\tau)$ .

$\tau$	$\alpha(\tau)$	$\lambda(\tau)$
0	1,2498 7633 50	0,4097 6213 02
$\pi/32$	1,2770 2180	0,3760 1638
2 $\pi/32$	1,3065 1112	0,3432 0022
3 $\pi/32$	1,3385 5826	0,3114 9486
4 $\pi/32$	1,3734 0143	0,2810 6710
5 $\pi/32$	1,4113 0382	0,2520 6813
6 $\pi/32$	1,4525 5264	0,2246 3244
7 $\pi/32$	1,4974 5480	0,1988 7725
8 $\pi/32$	1,5463 2577	0,1749 0250
9 $\pi/32$	1,5994 6484	0,1527 9221
10 $\pi/32$	1,6571 0159	0,1326 1830
11 $\pi/32$	1,7192 7878	0,1144 4973
12 $\pi/32$	1,7855 8551	0,0983 7333
13 $\pi/32$	1,8545 1451	0,0845 4327
14 $\pi/32$	1,9218 5276	0,0733 0263
15 $\pi/32$	1,9770 2634	0,0654 5611
16 $\pi/32$	2,0000 0000	0,0625 0000

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. H. HARDY - J. E. LITTLEWOOD - G. PÓLYA, *Inequalities*, Cambridge University Press, II ed., 1959.
- [2] E. F. BECKENBACH - R. BELLMAN, *Inequalities*, Springer, Berlin, 1965.
- [3] A. ZYGMUND, *Trigonometric series, I*, Cambridge University Press, II ed., 1959.
- [4] KY FAN - O. TAUSKY - J. TODD, *Discrete analogs of inequalities of Wirtinger*, Monatshefte für Mathematik, **59** (1955), 73-90.
- [5] P. R. BEESACK, *Integral inequalities of the Wirtinger type*, Duke Mathematical Journal, **25** (1958), 477-498.
- [6] U. RICHARD, *Metodi diversi per ottenere diseguaglianze alla De La Vallée Poussin nelle equazioni differenziali ordinarie del secondo e terzo ordine*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università e del Politecnico di Torino, **27** (1967-68) 35-68.
- [7] U. RICHARD: *Sur des inégalités du type de Wirtinger et leur application aux équations différentielles ordinaires*, Analyse fonctionnelle et applications (Comptes rendus du Colloque d'Analyse, Rio de Janeiro 1972), Herman, Hermann Paris (1975), 233-244.
- [8] A. M. BRESQUAR, *Sulla diseguaglianza di Wirtinger*, Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, **51** (1974).
- [9] N. ANDERSON - A. M. ARTHURS - R. R. HALL, *Extremum principle for a non linear problem in magneto-elasticity*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **72** (1972), 315-318.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13 settembre 1974.