

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. FUCHS

L. SALCE

Gruppi monotóni di successioni intere

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 147-160

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__147_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Gruppi monotóni di successioni intere.

L. FUCHS - L. SALCE (*)

Siano P il prodotto diretto ed S la somma diretta di una infinità numberabile di gruppi ciclici infiniti $\langle \varepsilon_k \rangle$, per $k = 1, 2, \dots$; si possono allora scrivere gli elementi di P nella forma $\sum_{k=1}^{\infty} m_k \varepsilon_k$, con gli m_k interi. Seguendo la definizione in [3], chiameremo un sottogruppo T di P *monotóno* se soddisfa alla seguente proprietà

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k \varepsilon_k \in T \quad \text{e} \quad |n_k| < \max_{h \leq k} (1, |m_h|) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} n_k \varepsilon_k \in T$$

dove gli n_k sono interi. I sottogruppi monotóni di P (che chiameremo più brevemente gruppi *monotóni*) furono introdotti e studiati in [7] da Specker; ulteriori risultati vennero ottenuti da Reid in [5] e da Fuchs in [3].

In questa nota proseguiamo lo studio dei gruppi monotóni; nella prima parte proveremo che essi formano un sottoreticolo $\mathcal{C}(P)$ distributivo e completo del reticolo $\mathcal{L}(P)$ dei sottogruppi di P e studieremo le proprietà di $\mathcal{C}(P)$. Nella seconda parte proveremo nuove proprietà della struttura dei gruppi monotóni; in particolare, se T è un gruppo monotóno diverso da B , il sottogruppo di P formato dalle successioni limitate, proveremo che T/S è isomorfo a P/S , e perciò è un gruppo algebricamente compatto; inoltre, se T è contenuto propriamente in

(*) Indirizzi degli AA.: Tulane University, New Orleans, La. 70118, U.S.A. e Seminario Matematico, via Belzoni 7, 35100 Padova, Italia.

Durante la ricerca che è oggetto di questo lavoro, il secondo autore fruiva di una borsa di studio della N.A.T.O., presso la Tulane University.

un altro gruppo monotono T' , T'/T è isomorfo a $\bigoplus_c \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} è il gruppo additivo dei razionali e c è il cardinale del continuo).

1. Il reticolo $\mathfrak{C}(P)$.

Se $u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \varepsilon_k$ e $v = \sum_{h=k}^{\infty} v_k \varepsilon_k$ sono due elementi di P , il loro estremo superiore $u \vee v$ ed il loro estremo inferiore $u \wedge v$ sono definiti puntualmente. Sia P^* il sottoinsieme di P formato dalle successioni \mathbf{t} positive, non decrescenti (cioè $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots$) e non limitate. P^* è, con le operazioni \vee e \wedge indotte da P , un reticolo distributivo. Se T è un gruppo monotono diverso da B , denotiamo $T \cap P^*$ con T^* ; anche T^* è un reticolo distributivo ($T \neq B$ assicura che $T^* \neq \emptyset$).

DEFINIZIONE. Sia $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$ un sottoinsieme di P^* . Diremo che $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$ genera il gruppo monotono T (o che T è generato da $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$) se

$$T = \{\mathbf{t} \in P \mid |t_k| \leq m(t^{(i_1)} + \dots + t^{(i_r)}) \quad \forall k; m \in \mathbb{N}; i_1, \dots, i_r \in I\}.$$

Si osservi che T è il minimo gruppo monotono contenente $\{\mathbf{t}^{(i)}\}_{i \in I}$. Diremo che T è un gruppo monotono *principale* (risp. *finitamente generato*, \aleph_0 -*generato* etc...) se è generato da un solo elemento (risp. da un numero finito di elementi, da un insieme numerabile di elementi etc...); in tal caso, se \mathbf{t} è il generatore di T , scriveremo semplicemente $T = T(\mathbf{t})$. Un gruppo monotono finitamente generato da $\mathbf{t}^{(1)}, \dots, \mathbf{t}^{(r)}$ è pure generato da $\mathbf{t}^{(1)} \vee \dots \vee \mathbf{t}^{(r)}$ ed è perciò principale. Si osservi che, dati $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in P$, $T(\mathbf{t}) = T(\mathbf{t}')$ se e solo se esiste un intero positivo M tale che $1/M \leq t_k/t'_k \leq M$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se T è \aleph_0 -generato, si vede facilmente che si possono supporre i generatori $\mathbf{t}^{(1)}, \dots, \mathbf{t}^{(r)}, \dots$, ($r \in \mathbb{N}$) soddisfacenti alle seguenti condizioni:

$$(1) \quad \mathbf{t}^{(1)} \leq \dots \leq \mathbf{t}^{(r)} \leq \dots; t_k^{(r)} = t_k^{(k)} \text{ per ogni } k \leq r.$$

In seguito, quando avremo a che fare con gruppi monotoni \aleph_0 -generati, supporremo sempre che i generatori soddisfino alle condizioni (1).

ESEMPLI. 1) Si può dare la definizione di generatore di un gruppo monotono anche per elementi di P (positivi e non decrescenti) limitati;

è allora evidente che B , il gruppo delle successioni limitate, è principale e generato da un arbitrario elemento limitato.

2) P ha una struttura, oltre che di gruppo, anche di anello, con la moltiplicazione definita puntualmente; ha senso perciò, dato $\mathbf{u} \in P^*$, considerare le sue potenze $\mathbf{u}^2, \mathbf{u}^3, \dots$. Si consideri il gruppo monotóno

$$T = T(\{\mathbf{u}^n\}_{n \in \mathbb{N}}).$$

T è \aleph_0 -generato ma non è principale: infatti è facile verificare che T è un sottoanello di P , e se fosse $T = T(\mathbf{t})$ per un $\mathbf{t} \in P^*$, si avrebbe che $\mathbf{t}^2 \notin T$, perchè per nessun $m \in \mathbb{N}$ si ha che $t_k^2 < mt_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, essendo \mathbf{t} non limitato.

3) P non è \aleph_0 -generato: infatti se $T(\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}})$ non è principale, (come non è P , essendo un anello), l'elemento $\mathbf{t} = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{t}^{(n)}$ definito da $t_k = t_k^{(k)}$ non appartiene a $T(\{\mathbf{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}})$.

Date due famiglie di elementi di P^* : $\{\mathbf{u}^{(i)}\}_{i \in I}$ e $\{\mathbf{v}^{(j)}\}_{j \in J}$, sono di facile verifica le formule seguenti:

$$(2) \quad T(\{\mathbf{u}^{(i)}\}_{i \in I}) \cap T(\{\mathbf{v}^{(j)}\}_{j \in J}) = T(\{\mathbf{u}^{(i)} \wedge \mathbf{v}^{(j)}\}_{i,j}),$$

$$(3) \quad T(\{\mathbf{u}^{(i)}\}_{i \in I}) + T(\{\mathbf{v}^{(j)}\}_{j \in J}) = T(\{\mathbf{u}^{(i)} \vee \mathbf{v}^{(j)}\}_{i,j}),$$

perciò l'insieme dei gruppi monotóni forma un sottoreticolo $\mathfrak{C}(P)$ del reticolo $\mathfrak{L}(P)$ dei sottogruppi di P . Dalle formule (2) e (3) e dalla distributività del reticolo P^* segue che $\mathfrak{C}(P)$ è un reticolo distributivo; poichè intersezioni ed unioni (gruppali) arbitrarie di gruppi monotóni sono ancora tali, $\mathfrak{C}(P)$ risulta essere un reticolo completo, con P elemento massimo e B elemento minimo. Specker in [7] ha provato che $\mathfrak{C}(P)$ ha cardinalità 2^c . I gruppi monotóni principali formano un sottoreticolo distributivo $\mathfrak{F}(P)$ di $\mathfrak{C}(P)$, ovviamente non completo, essendo P non principale. Vedremo in seguito che $\mathfrak{F}(P)$ ha cardinalità c .

Essendo in particolare $\mathfrak{C}(P)$ un reitolo modulare, dati due gruppi monotóni T_1 e T_2 , esiste un isomorfismo reticolare φ tra i due intervalli in $\mathfrak{C}(P)$, $I[T_1 \vee T_2 : T_2]$ e $I[T_1 : T_1 \wedge T_2]$, dato da: $\begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix}$

$$\varphi: T \mapsto T_1 \wedge T \quad \text{se} \quad T_2 \leq T \leq T_1 \vee T_2$$

con l'inverso

$$\varphi^{-1}: T \mapsto T_2 \vee T \quad \text{se} \quad T_1 \wedge T_2 \leq T \leq T_1.$$

Ovviamente c'è anche l'isomorfismo grupppale: $T_1 \vee T_2 / T_2 \cong T_1 / T_1 \wedge T_2$. Analoghe considerazioni valgono nel reticolo $\mathfrak{F}(P)$.

Il lemma seguente, dovuto a Sierpiński (vedi [6], pg. 77), sarà utilizzato spesso in seguito.

LEMMA 1. Se N è un insieme numerabile, esistono c sottoinsiemi infiniti di N a due a due con intersezione finita.

Una famiglia di c sottoinsiemi di N come nel lemma 1 sarà chiamata una *quasi-partizione* di N .

LEMMA 2. Siano $T = T(\{t^{(i)}\}_{i \in I})$ e $T(\mathbf{t})$ due gruppi monotóni, e sia $T \leq T(\mathbf{t})$. Allora risulta: $T = T(\{t^{(i)} \wedge \mathbf{t}\}_{i \in I})$.

DIMOSTRAZIONE. È una immediata conseguenza della formula (2).

TEOREMA 1. Siano T e $T(\mathbf{t})$ due gruppi monotóni ($\mathbf{t} \in P^*$) tali che T è \aleph_0 -generato e $T < T(\mathbf{t})$. Allora in $I[T(\mathbf{t}): T]$ esistono 2^c gruppi monotóni non isomorfi.

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma 2 e per (1) possiamo supporre che i generatori $t^{(1)}, t^{(2)}, \dots$ di T siano tutti minori o uguali a \mathbf{t} ; supponiamo inoltre che $t^{(n)} \in P^*$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ (e quindi che $T \neq B$). Definiamo una successione crescente in \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} k_1 &\in \mathbb{N} \text{ tale che } t_{k_1} \geq 1 \cdot t_{k_1}^{(1)} \\ k_2 &\in \mathbb{N} \text{ tale che } t_{k_2} \geq 2 \cdot t_{k_2}^{(2)} \text{ e } t_{k_2}^{(2)} \geq t_{k_1} \\ k_3 &\in \mathbb{N} \text{ tale che } t_{k_3} \geq 3 \cdot t_{k_3}^{(3)} \text{ e } t_{k_3}^{(3)} \geq t_{k_2} \end{aligned}$$

e così via. Sia $\{N_i\}_{i \in I}$ una quasi-partizione di $N = \{k_1, k_2, \dots\}$, ($|I| = \mathfrak{o}$). Definiamo un elemento $v^{(i)}$ per ogni $i \in I$ nel modo seguente

$$v_k^{(i)} = \begin{cases} t_k & \text{se } k \in N_i \\ t_k \vee t_k^{(s)} & \text{se } k_s \leq k < k_{s+1}, \quad k \notin N_i \text{ e } k_h \text{ è il massimo elemento} \\ & \text{in } N_i \text{ minore di } k_s. \end{cases}$$

Ovviamente $v^{(i)} \in P^*$, $\forall i \in I$, e poichè $v^{(i)} \leq \mathbf{t}$ e, per $k \geq k_s$, $v_k^{(i)} \geq v_k^{(s)}$, si ha: $T \leq T(v^{(i)}) \leq T(\mathbf{t})$. Poichè due gruppi monotóni sono isomorfi se e solo se sono uguali (vedi [7]) sarà sufficiente provare che, per ogni $i \in I$, $v^{(i)} \notin T(v^{(j)}_{j \neq i})$. In caso contrario infatti esistono $n \in \mathbb{N}$ e $j_1, \dots, j_r \in I \setminus \{i\}$ tali che

$$v^{(i)} \leq n \cdot (v^{(j_1)} + \dots + v^{(j_r)}).$$

Ma allora per infiniti $k_s \in N_i \setminus (N_{j_1} \cup \dots \cup N_{j_r})$ deve accadere

$$s \cdot v_{k_s}^{(s)} \leq t_{k_s} \leq r \cdot n \cdot v_{k_s}^{(s)}$$

che è ovviamente assurdo, essendo r ed n fissi. Gli argomenti fin qui usati valgono ovviamente anche nel caso in cui T sia principale e diverso da B , ma anche per $T = B$, modificando leggermente la prova precedente, vale che in $I[T(\mathbf{t}): B]$ esistono 2^c gruppi monotóni non isomorfi.

COROLLARIO 1. Se T è \aleph_0 -generato e se $T < T_1$, allora in $I[T_1: T]$ esistono 2^c gruppi monotóni non isomorfi.

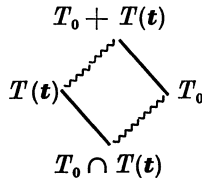
DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbf{t} \in T_1^* \setminus T$. Dati l'isomorfismo reticolare tra $I[T + T(\mathbf{t}): T]$ e $I[T(\mathbf{t}): T(\mathbf{t}) \cap T]$ e il teorema 1, ed osservato che, per il lemma 2, $T(\mathbf{t}) \cap T$ è ancora \aleph_0 -generato, segue subito l'asserto.

COROLLARIO 2. Se T_1 e T_2 sono gruppi monotóni principali e $T_1 < T_2$, in $I[T_2: T_1]$ esistono esattamente c gruppi monotóni principali; $\mathfrak{F}(P)$ ha cardinalità c .

DIMOSTRAZIONE. Basta considerare, nella dimostrazione del teorema 1, i c elementi $v^{(i)}$, ($i \in I$), che generano gruppi monotóni principali a due a due non isomorfi; d'altra parte P ha cardinalità c , perciò $\mathfrak{F}(P)$ ha cardinalità c .

Nel corollario 1, la condizione per T di essere \aleph_0 -generato è sufficiente per l'esistenza di 2^c elementi in $I[T_1: T]$, ma non è necessaria, come prova l'esempio seguente.

ESEMPIO 4. Siano $\mathbf{t} \in P^*$ ed $\mathcal{F} = \{T \in \mathfrak{C}(P) \mid \mathbf{t} \notin T\}$. \mathcal{F} è una famiglia induttiva. Sia T_0 massimale in \mathcal{F} . Ovviamente T_0 è un sottogruppo monotóno massimale in $T_0 + T(\mathbf{t})$ e si ha il diagramma reticolare



dove gli intervalli opposti sono isomorfi; tenendo conto del corollario 2 segue allora che in $I[T_0: T_0 \cap T(\mathbf{t})]$ ci sono 2^c gruppi monotóni distinti, ma $T_0 \cap T(\mathbf{t})$ non è \aleph_0 -generato, essendo massimale in $T(\mathbf{t})$.

L'esempio 4 prova che esistono elementi in $\mathfrak{C}(P)$ che hanno, tra gli elementi ad essi minori, elementi massimali. Una condizione sufficiente per godere di tale proprietà è fornita dalla proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1. Se $T(\mathfrak{t})$ è un gruppo monotono principale, l'insieme degli elementi di $\mathfrak{C}(P)$ minori di $T(\mathfrak{t})$ ha elementi massimali. Un tale elemento si può inoltre scegliere contenente un arbitrario $T_0 \in \mathfrak{C}(P)$ tale che $T_0 < T(\mathfrak{t})$.

DIMOSTRAZIONE. È facile verificare che la famiglia $\{T \in \mathfrak{C}(P) \mid T < T(\mathfrak{t})\}$ è induttiva, come pure la famiglia $\{T \in \mathfrak{C}(P) \mid T_0 \leq T < T(\mathfrak{t})\}$.

Si osservi che un sottogruppo monotono massimale tra i sottogruppi monotoni contenuti in un fissato gruppo monotono T non può essere \aleph_0 -generato, per il corollario 1. Non tutti i gruppi monotoni ammettono però sottogruppi monotoni massimali, come prova la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 2. Sia T un sottoanello monotono di P . Allora T non ha sottogruppi monotoni massimali.

DIMOSTRAZIONE. Il caso $T = B$ è banale. Sia $T \neq B$. Supponiamo per assurdo che M sia un sottogruppo monotono massimale in T . Sia $\mathfrak{t} \in T^* \setminus M$; allora $M + T(\mathfrak{t}) = T$, perciò esistono $m \in \mathbb{N}$ ed $\mathfrak{x} \in M^*$ tali che

$$\mathfrak{t}^2 \leq m \cdot \mathfrak{t} + \mathfrak{x}.$$

Detto e l'elemento di P tale che $e_k = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha:

$$(\mathfrak{t} - m \cdot e) \cdot \mathfrak{t} \leq \mathfrak{x}.$$

Per $k \geq k_0$, con k_0 intero opportuno, si ha:

$$t_k \leq (t_k - m) \cdot t_k \leq x_k$$

perciò $\mathfrak{t} \in M$, da cui l'assurdo.

COROLLARIO 3. Se M è un sottogruppo monotono proprio di P e se $\{\mathfrak{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \leq P^*$, allora $M + T(\{\mathfrak{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}) < P$.

DIMOSTRAZIONE. Non è restrittivo supporre i $\mathfrak{t}^{(n)}$ soddisfacenti alla condizione (1). Esiste allora un $\mathfrak{t} \in P$ tale che $\mathfrak{t} \geq \mathfrak{t}^{(n)}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si ha allora

$$M + T(\{\mathfrak{t}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}) \leq M + T(\mathfrak{t})$$

e dalla dimostrazione della proposizione 2 segue che $M + T(\mathfrak{t}) < P$.

Vogliamo ora provare che nessun gruppo monotóno ha un sottogruppo monotóno massimo. Premettiamo perciò il lemma seguente.

LEMMA 3. Sia $T(\mathbf{t})$ un gruppo monotóno principale ($\neq B$). Allora esistono $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u}', \mathbf{v}' \in P^*$ tali che $T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v}) < T(\mathbf{t}) < T(\mathbf{u}'), T(\mathbf{v}')$ e risulta

$$T(\mathbf{u}) \vee T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{t}) = T(\mathbf{u}') \wedge T(\mathbf{v}').$$

DIMOSTRAZIONE. Sia k_1, k_2, \dots una successione crescente in \mathbb{N} tale che

$$t_{k_s} \geq s \cdot t_{k_{s-1}} \quad \text{per } s = 2, 3, \dots$$

Definiamo \mathbf{u} e \mathbf{v} nel modo seguente

$$u_k = \begin{cases} t_k & \text{se } k_{2n} < k \leq k_{2n+1} \\ t_{k_{2n-1}} & \text{se } k_{2n-1} < k \leq k_{2n} \end{cases} \quad v_k = \begin{cases} t_{k_{2n}} & \text{se } k_{2n} < k \leq k_{2n+1} \\ t_k & \text{se } k_{2n-1} < k \leq k_{2n} \end{cases}$$

Ovviamente $\mathbf{u} \vee \mathbf{v} = \mathbf{t}$; inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$2 \cdot n \cdot u_{k_{2n}} = 2 \cdot n \cdot t_{k_{2n-1}} \leq t_{k_{2n}}; \quad (2n + 1) \cdot v_{k_{2n+1}} = (2n + 1) \cdot t_{k_{2n}} \leq t_{k_{2n+1}}$$

perciò $\mathbf{t} \notin T(\mathbf{u})$ e $\mathbf{t} \notin T(\mathbf{v})$. La costruzione degli elementi \mathbf{u}' e \mathbf{v}' è analoga alla precedente, perciò la omettiamo.

Il lemma 3 non vale per B : infatti se $T(\mathbf{u})$ e $T(\mathbf{v})$ contengono propriamente $B(\mathbf{u}, \mathbf{v} \in P^*)$, allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \in P^*$, perciò $T(\mathbf{u}) \wedge T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) > B$.

COROLLARIO 4. Non esistono gruppi monotóni con sottogruppi monotóni massimi.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo esista $T \in \mathfrak{T}(P)$ con sottogruppo monotóno massimo T_0 . T non può essere principale: se infatti fosse $T = T(\mathbf{t})$, si scelgano \mathbf{u} e \mathbf{v} come nel lemma 3 e siano M_1 ed M_2 due sottogruppi monotóni massimali in T contenenti rispettivamente \mathbf{u} e \mathbf{v} , sicuramente esistenti per la proposizione 1. Ma allora $\mathbf{v} \in T_0 \setminus M_1$, perciò $M_1 + T(\mathbf{v}) = T$ e $M_1 \leq T_0$ implica che $M_1 + T(\mathbf{v}) \leq T_0$, il che è assurdo. Ne segue che, se $\mathbf{t} \in T$, $T(\mathbf{t}) < T$, perciò $\mathbf{t} \in T_0$, da cui segue $T = T_0$.

OSSEVAZIONE. Si è visto come per un gruppo monotóno l'essere anche un sottoanello di P porti delle particolari proprietà. Rivolgendo

l'attenzione ai sottoanelli monotóni di P , si può vedere facilmente che pure essi formano un reticolo distributivo e completo (il sup di due anelli monotóni è il minimo anello monotóno che li contiene entrambi) che non è ovviamente un sottoreticolo di $\mathfrak{C}(P)$. Si può definire il concetto di famiglia $\{t^{(i)}\}_{i \in I}$ di elementi di P^* che genera l'anello monotóno R nel modo seguente

$$R = \{t \in P \mid |t_k| < (t_k^{(i_1)} \dots t_k^{(i_r)})^n, \forall k \in \mathbf{N}; n \in \mathbf{N}; i_1, \dots, i_r \in I\}.$$

e quindi i concetti di anelli principali, \aleph_0 -generati etc... Molte delle proprietà dimostrate per i gruppi monotóni si possono allora provare per gli anelli monotóni. Noi ci limitiamo a provare il fatto seguente.

PROPOSIZIONE 3. Esistono 2° anelli monotóni non isomorfi.

DIMOSTRAZIONE. Sia k_1, k_2, \dots una successione strettamente crescente in \mathbf{N} tale che:

$$k_s \geq k_{s-1}^{k_s} \quad \text{per ogni } s \in \mathbf{N}.$$

Siano $N = \{k_1, k_2, \dots\}$ ed $\{N_i\}_{i \in I}$ una quasi-partizione di N ($|I| = \omega$). Per ogni $i \in I$ definiamo un elemento $t^{(i)}$ nel modo seguente

$$t_k^{(i)} = \begin{cases} k & \text{se } k \in N_i \\ k_h & \text{se } k_s \leq k < k_{s+1}, k \notin N_i \text{ e } k_h \text{ è il massimo elemento di } N_i \\ & \text{minore di } k_s. \end{cases}$$

È sufficiente ora provare che, per ogni $i \in I$, $t^{(i)}$ non appartiene all'anello monotóno generato da $\{t^{(j)}\}_{j \neq i}$. In caso contrario esistono un $n \in \mathbf{N}$ e $j_1, \dots, j_r \in I \setminus \{i\}$ tali che:

$$t_k^{(i)} \leq (t_k^{(j_1)} \dots t_k^{(j_r)})^n \quad \text{per ogni } k \in \mathbf{N}.$$

Ma allora per infiniti $k_s \in N_i \setminus (N_{j_1} \cup \dots \cup N_{j_r})$ si ha:

$$k_{s-1}^{k_{s-1}} < k_s = t_{k_s}^{(i)} \leq (t_{k_s}^{(j_1)} \dots t_{k_s}^{(j_r)})^n \leq k_{s-1}^{r \cdot n}$$

il che è ovviamente assurdo.

Chiudiamo questa prima parte ponendo il seguente problema: può accadere che in $\mathfrak{C}(P)$ risulti: $P = T_1 \vee T_2$, con T_1 e T_2 sottogruppi monotóni propri di P ? Si osservi che, per il corollario 3, nè T_1 nè T_2 possono essere \aleph_0 -generati.

2. La struttura di T/S .

È ben noto che P/S è un gruppo senza torsione algebricamente compatto, ed ha quindi una decomposizione del tipo:

$$\frac{P}{S} = \frac{D}{S} \oplus \frac{P_0}{S}$$

dove D/S è la parte divisibile, e quindi D è un sottogruppo univocamente individuato di P , e P_0/S , unico a meno di isomorfismi, è un gruppo completo di Hausdorff nella topologia naturale. Gli elementi $\sum_{k=1}^{\infty} d_k \varepsilon_k \in D$ sono caratterizzati dalla proprietà: per ogni $s \in \mathbb{N}$ esiste $k_s \in \mathbb{N}$ tale che, per $k \geq k_s$, $s!$ divide d_k .

Vogliamo provare che, se T è un gruppo monotóno diverso da B , allora T/S è isomorfo a P/S . Premettiamo perciò alcuni lemmi.

LEMMA 4. Sia $t \in P^*$. Per ogni $x \in P$ esiste $d \in D$ tale che: $x \leq d < x + t$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $s \in \mathbb{N}$ esiste $k_s \in \mathbb{N}$ tale che, per $k \geq k_s$, risulta $t_k \geq s!$ e si possono scegliere i k_s in modo che $k_1 < k_2 < \dots$. Per ogni $s \in \mathbb{N}$ e per $0 \leq r < k_{s+1} - k_s$ poniamo:

$$d_{k_s+r} = \text{minimo multiplo di } s! \text{ maggiore o uguale a } x_{k_s+r}.$$

Ovviamente, risulta, per ogni $s \in \mathbb{N}$ e per $0 \leq r < k_{s+1} - k_s$:

$$0 \leq d_{k_s+r} - x_{k_s+r} \leq s! < t_{k_s+r}.$$

È ovvio allora che l'elemento $d = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \varepsilon_k$ definito sta in D e $x \leq d < x + t$.

LEMMA 5. Siano T e T' due gruppi monotóni tali che $B < T \leq T'$. Allora

$$T + (D \cap T') = T'.$$

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente $T + (D \cap T') \leq T'$. Viceversa, sia $x \in T'$. Allora, essendo $B < T$, esiste $t \in T^*$. Sia $x = x' - x''$, con x'

e \mathbf{x}'' elementi non negativi di T' . Per il lemma 4 esistono $\mathbf{d}', \mathbf{d}'' \in D$ tali che:

$$0 \leq \mathbf{x}' \leq \mathbf{d}' \leq \mathbf{x}' + \mathbf{t}; \quad 0 \leq \mathbf{x}'' \leq \mathbf{d}'' \leq \mathbf{x}'' + \mathbf{t}.$$

Ne segue che $0 \leq \mathbf{d}' - \mathbf{x}' \leq \mathbf{t}$ e $0 \leq \mathbf{d}'' - \mathbf{x}'' \leq \mathbf{t}$, perciò $\mathbf{d}' - \mathbf{x}' \in T$ e $\mathbf{d}'' - \mathbf{x}'' \in T$; ma allora $\mathbf{d}', \mathbf{d}'' \in D \cap T'$, quindi $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in T + (D \cap T')$; segue che $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}'' \in T + (D \cap T')$.

Si osservi che $D \cap B = S$; da [4] segue che S è un addendo diretto di B e che $B/S = F$, dove F è libero di rango c .

LEMMA 6. Sia T un gruppo monotono diverso da B . Allora la parte divisibile di T/S è $(T \cap D)/S$ ed è isomorfa a $\bigoplus_c \mathbb{Q}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $d(T/S)$ la parte divisibile di T/S . È ovvio che:

$$d(T/S) \leq T/S \cap D/S = (T \cap D)/S.$$

L'inclusione inversa segue dalla purità di T/S in P/S . Proviamo infine che $(T \cap D)/S = \bigoplus_c \mathbb{Q}$. Basta provare che $|T \cap D| = c$. Sia $\mathbf{t} \in T^*$.

Per il lemma 4 esiste $\mathbf{d} \in D$ tale che $\mathbf{t} \leq \mathbf{d} \leq 2\mathbf{t}$, e ciò prova intanto che $0 \neq \mathbf{d} + S \in (T \cap D)/S$. Sia $\{N_i\}_{i \in I}$ una quasi-partizione di \mathbb{N} . Per ogni $i \in I$ definiamo un elemento $\mathbf{d}^{(i)}$, a partire da $\mathbf{d} \in D$, nel modo seguente:

$$\mathbf{d}_k^{(i)} = \begin{cases} d_k & \text{se } k \in N_i \\ 0 & \text{se } k \notin N_i. \end{cases}$$

Ovviamente $\mathbf{d}^{(i)} \in T \cap D$ per ogni $i \in I$ e i $\mathbf{d}^{(i)}$ sono indipendenti modulo S .

TEOREMA 2. Siano T ed R due gruppi monotoni diversi da B . Siano

$$\frac{T}{S} = \frac{T \cap D}{S} \oplus \frac{T_0}{S} \quad \text{e} \quad \frac{R}{S} = \frac{R \cap D}{S} \oplus \frac{R_0}{S}$$

due decomposizioni di T/S e R/S nelle parti divisibili e ridotte. Allora:

$$1) \quad \frac{T \cap D}{S} \cong \bigoplus_c \mathbb{Q} \cong \frac{R \cap D}{S}.$$

2) Si può scegliere R_0 uguale a T_0 .
In particolare $T/S \cong P/S \cong R/S$.

DIMOSTRAZIONE. 1) È già stato provato nel lemma 6.2) Dal lemma 5 si ha, per $T' = T \cap R$

$$\frac{R}{S} = \frac{T' + (R \cap D)}{S} = \frac{T'}{S} + \frac{R \cap D}{S} = \left(\frac{T'_0}{S} \oplus \frac{T' \cap D}{S} \right) + \frac{R \cap D}{S}$$

e analogamente per T/S , perchè T' è ancora diverso da B , come si verifica facilmente. Ne segue che:

$$\frac{R}{S} = \frac{T'_0}{S} + \frac{R \cap D}{S}; \quad \frac{T}{S} = \frac{T'_0}{S} + \frac{T \cap D}{S}.$$

Ma $T'_0/S \cap (R \cap D)/S = 0$, altrimenti, essendo T'_0/S puro in R/S (perchè T'_0 è puro in T' che è puro in R), T'_0/S non sarebbe ridotto. Ne segue che $R/S = T'_0/S \oplus (R \cap D)/S$ e analogamente per T/S .

Si osservi che, se $T \neq B$, nella decomposizione

$$\frac{T}{S} = \frac{T \cap D}{S} \oplus \frac{T_0}{S}$$

si può scegliere $T_0/S \geq B/S$, poichè $B \cap D = S$; poichè T/B è divisibile, tale è $(T_0/S)/(B/S)$. Perciò B/S è un sottogruppo basico di T/S , per ogni gruppo monotono T , e B è basico in T_0 .

COROLLARIO 5. Sia T un gruppo monotóno diverso da B . Allora T/S è algebricamente compatto e la sua parte ridotta T_0/S è il completamento di B/S nella topologia naturale.

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema 2 segue che $T/S \cong P/S$, ed è ben noto (vedi [1]) che P/S è algebricamente compatto. Essendo B/S sottogruppo basico di T_0/S , T_0/S ne è il completamento nella topologia naturale.

COROLLARIO 6. Se T è un gruppo monotóno diverso da B e se G è un gruppo slender, ogni omomorfismo $\varphi: T \rightarrow G$ è individuato dalla sua restrizione $\varphi|_S$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo T/S algebricamente compatto,

$$\text{Hom}(T/S, G) = 0$$

(vedi [2, vol II, pag. 159]). Perciò se due omomorfismi da T in G coincidono su S , essi sono uguali.

Si osservi che il corollario 6 estende ad un arbitrario gruppo slender, senza restrizioni di cardinalità, la seconda parte del teorema 2 in [3].

Siano ora T e T' due gruppi monotoni tali che $B < T < T'$. Dal teorema 2 segue che $T'/T \cong (T' \cap D)/(T \cap D) \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{Q}$, con σ numero cardinale > 0 . È naturale chiedersi quanto grande sia σ . Premettiamo una notazione. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, $t \in P$, indichiamo con $\alpha * t$ l'elemento di P così definito:

$$(\alpha * t)_k = [\alpha \cdot t_k]$$

dove, se $r \in \mathbb{R}$, $[r]$ indica la parte intera di r . Indicato con e l'elemento costantemente uguale ad 1 di P ($e_k = 1, \forall k \in \mathbb{N}$) è ovvio che:

$$\alpha \cdot t - e < \alpha * t \leq \alpha \cdot t$$

dove il significato di $\alpha \cdot t$ è ovvio.

LEMMA 7. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Allora, per ogni $t \in P^*$ vale: $T(t) = T(\alpha * t)$.

DIMOSTRAZIONE. Se $\alpha = 1$ l'uguaglianza è ovvia. Sia $\alpha > 1$. Allora $\alpha * t \geq t$ perciò $T(t) \leq T(\alpha * t)$. D'altra parte $\alpha * t \leq \alpha \cdot t < ([\alpha] + 1) \cdot t$, quindi $T(\alpha * t) \leq T(t)$. Sia $\alpha < 1$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha \geq 1/n$ e, per k sufficientemente grande, $t_k > 2n$; si ha allora $2(t_k - n) \geq t_k$. Da $\alpha * t \leq \alpha \cdot t \leq t$ segue $T(\alpha * t) \leq T(t)$. Viceversa:

$$\alpha \geq 1/n \Rightarrow \alpha \cdot t \geq (1/n) \cdot t \Rightarrow \alpha * t \geq (1/n) * t \Rightarrow 2n(\alpha * t) \geq 2n((1/n) * t).$$

Tenuto conto che $(1/n) * t \geq (1/n) \cdot t - e$ si ha:

$$2n(\alpha * t) \geq 2n((1/n) * t) \geq 2n((1/n) \cdot t - e) = 2(t - ne);$$

ma per k sufficientemente grande $2(t_k - n) \geq t_k$, perciò $T(t) \leq T(\alpha * t)$.

TEOREMA 3. Siano T e T' gruppi monotoni tali che $T < T'$. Allora $T'/T \cong \bigoplus_{\sigma} \mathbb{Q}$.

DIMOSTRAZIONE. Esiste $\mathbf{t} \in (T')^* \setminus T$. Allora $T + T(\mathbf{t}) > T$ e si ha:

$$\frac{T'}{T} > \frac{T + T(\mathbf{t})}{T} \cong \frac{T(\mathbf{t})}{T \cap T(\mathbf{t})}.$$

Non è restrittivo perciò supporre $T < T(\mathbf{t})$ e provare l'asserto per T e $T(\mathbf{t})$. Sia $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ una famiglia di cardinalità $|I| = c$ di numeri reali linearmente indipendenti, e consideriamo, $\forall i \in I$, l'elemento $\alpha_i * \mathbf{t}$. Proviamo che gli elementi $\alpha_i * \mathbf{t}$ sono linearmente indipendenti modulo T . Sia $\sum_r m_r \cdot (\alpha_r * \mathbf{t}) \in T$ (la sommatoria è finita), con gli $m_r \in \mathbb{Z}$. Possiamo supporre, previo cambiamento di segno, che $\sum_r m_r \alpha_r > 0$, perciò, per il lemma 7, $T\left(\sum_r m_r \cdot \alpha_r * \mathbf{t}\right) = T(\mathbf{t})$. Proviamo che esiste un intero positivo M per il quale vale:

$$(4) \quad \left| \left(\sum_r m_r \alpha_r \right) * \mathbf{t} - \sum_r m_r (\alpha_r * \mathbf{t}) \right| < M$$

essendo chiaro il significato di tale scrittura, dal che segue ovviamente che

$$T(\mathbf{t}) = T\left(\left(\sum_r m_r \alpha_r\right) * \mathbf{t}\right) = T\left(\sum_r m_r (\alpha_r * \mathbf{t})\right)$$

il che porta all'assurdo perchè si è supposto che $\sum_r m_r (\alpha_r * \mathbf{t}) \in T$. Sia $k \in \mathbb{N}$ fissato. Per ogni r si ha:

$$m_r \cdot \alpha_r \cdot t_k - |m_r| \leq m_r [\alpha_r \cdot t_k] \leq m_r \cdot \alpha_r \cdot t_k + |m_r|$$

perciò, posto $M' = \sum_r |m_r|$, si ha

$$(5) \quad \left(\sum_r m_r \alpha_r\right) \cdot t_k - M' \leq \sum_r m_r [\alpha_r \cdot t_k] \leq \left(\sum_r m_r \alpha_r\right) \cdot t_k + M'.$$

D'altra parte vale:

$$(6) \quad \left(\sum_r m_r \alpha_r\right) \cdot t_k - 1 \leq \left[\left(\sum_r m_r \alpha_r\right) \cdot t_k\right] \leq \left(\sum_r m_r \alpha_r\right) \cdot t_k.$$

Da (5) e (6), posto $M = M' + 1$, segue subito (4). Segue che deve essere $\sum_r m_r \alpha_r = 0$, e quindi $m_r = 0$ per ogni r .

OSSERVAZIONE. Se T è un gruppo monotono diverso da B , il suo comportamento nei confronti dei gruppi slender è simile a quello di P (vedi [3]). In contrasto con ciò è il fatto seguente: poichè l'applicazione

$$\varphi: P \rightarrow D \quad \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} m_k \varepsilon_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k! m_k \varepsilon_k$$

è un omomorfismo, un gruppo G è slender se e solo se ogni omomorfismo $f: D \rightarrow G$ manda a 0 quasi tutti gli ε_k ; ciò non è più vero se si sostituisce $D \cap T$ a D ; infatti la restrizione a $D \cap T$ dell'omomorfismo identico $1_T: T \rightarrow T$ fornisce il controesempio.

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. BALCERZYK, *On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups*, Bull. Acad. Polon. Sci., **7** (1959), pp. 141-142.
- [2] L. FUCHS, *Infinite Abelian Groups*, Vol. I e II, Academic Press, New York-London, 1970 e 1973.
- [3] L. FUCHS, *Note on certain subgroups of products of infinite cyclic groups*, Comment. Math. Univ. St. Pauli, **19** (1971), pp. 51-54.
- [4] G. NÖBELING, *Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn E. Specker*, Invent. Math., **6** (1968), pp. 41-55.
- [5] G. A. REID, *Almost free abelian groups*, Lecture Notes, Tulane University (1967).
- [6] W. SIERPIŃSKI: *Cardinal and ordinal numbers*, Warszawa (1958).
- [7] E. SPECKER, *Additive Gruppen von Folgen ganzer Zahlen*, Portug. Math., **9** (1950), pp. 131-140.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 13 aprile 1976.