

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

L. G. PACCAGNELLA

Un confronto tra densità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 56 (1976), p. 85-90

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1976__56__85_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Un confronto tra densità.

L. G. PACCAGNELLA (*)

SUNTO - Si presenta un raffronto tra la densità secondo Besicovitch ed una densità reticolare. Si conclude con alcune disuguaglianze tra i limiti superiori ed inferiori di tali densità.

La *k*-densità superiore e la *k*-densità inferiore di un insieme $E \subset \mathbf{R}^n$ in un punto $x \in \mathbf{R}^n$, relative ad una misura esterna μ , sono definite come il massimo e minimo limite, rispettivamente, del rapporto

$$\frac{\mu(E \cap I(x, \varrho))}{\omega_k \varrho^k}$$

per $\varrho \rightarrow 0^+$, dove $I(x, \varrho)$ è la sfera aperta in \mathbf{R}^n di centro x e raggio ϱ , ed ω_k è la misura di Lebesgue della sfera di raggio 1 in \mathbf{R}^k . Esse vengono indicate con i simboli $\bar{\theta}_k(x, \mu, E)$ e $\underline{\theta}_k(x, \mu, E)$ (per le definizioni vedi ad esempio [F.]). Nel caso in cui si abbia $\bar{\theta}_k(x, \mu, E) = \underline{\theta}_k(x, \mu, E)$, tale valore viene chiamato *k*-densità dell'insieme E nel punto x e lo si indica con $\theta_k(x, \mu, E)$.

Besicovitch si occupò della densità θ_1 relativa alla misura \mathcal{H}_1 per gli insiemi $E \subset \mathbf{R}^2$ (v. [B.]). La densità θ_k , nel caso generale $k \geq 1$ ed $n \geq 2$, si trova negli studi di vari autori (v. ad es. [F.], [M.]). Un altro tipo di densità, che viene chiamata « *net-density* », è definita nel modo

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata dell'Università - Via Belzoni 7 - 35100 Padova.

Lavoro eseguito mentre l'A. godeva di una borsa di studio del C.N.R. per laureandi.

seguito (cfr. [H.]): prendiamo l'insieme \mathbf{R}^n dotato della metrica definita da $\rho(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}$ ed un numero intero positivo p ; consideriamo il cubo semiaperto di lato p^{-m} , i cui vertici sono tutti del tipo $(k_1 p^{-m}, \dots, k_n p^{-m})$ con k_1, \dots, k_n interi, chiamato cilindro p -adico di rango m . Per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ indichiamo con $u_m(x)$ l'unico cilindro p -adico di rango m contenente x e consideriamo quindi una funzione non decrescente h di variabile reale $t \geq 0$, per la quale è $h(t) = 0$ se e solo se $t = 0$. Presa una misura m su \mathbf{R}^n , si chiama $\overline{\mathcal{U}}$ -densità superiore di m in x e si indica con $\overline{\mathcal{U}}_n m(x)$, il massimo limite, per $n \rightarrow +\infty$, del rapporto

$$(1) \quad \frac{m(u_n(x))}{h(p^{-n})}.$$

In maniera analoga si definiscono la $\underline{\mathcal{U}}$ -densità inferiore e la \mathcal{U} -densità. Hawkes utilizza la densità $\overline{\mathcal{U}}$ per lo studio della indipendenza di insiemi « piccoli », definita in termini di ε -entropia, importante in teoria dell'informazione.

Richiamiamo ora alcuni risultati sulle proprietà di θ_k ; la loro dimostrazione si può trovare ad esempio in [F.].

TEOREMA 1. *Sia μ una misura esterna metrica regolare e sia E un insieme μ -misurabile di misura μ localmente finita nell'insieme aperto A . In \mathcal{K}_k -quasi tutti i punti $x \in A \setminus E$ si ha: $\theta_k(x, \mu, E) = 0$. In particolare, se E è μ -misurabile ed è $\mu(E) < \infty$, in \mathcal{K}_k -quasi tutti i punti di $\mathbf{R}^n \setminus E$ si ha: $\theta_k(x, \mu, E) = 0$.*

Per la densità superiore abbiamo inoltre che: se $E \subset \mathbf{R}^n$ e $\mathcal{K}_k(E) < \infty$, in \mathcal{K}_k -quasi tutti i punti $x \in E$ è:

$$(2) \quad 2^{-k} \leq \overline{\theta}_k(x, \mathcal{K}_k, E) \leq 1.$$

Sono stati inoltre stabiliti, per entrambe le densità superiori, $\overline{\theta}_k$ e $\overline{\mathcal{U}}_k$, relative ad una misura μ , teoremi che, a partire da opportune limitazioni di tali densità, mettono in relazione la misura μ con la misura k -dimensionale di Hausdorff (v. [F.], [H.]).

1. Confronto tra le densità θ_k e \mathcal{U}_k .

Consideriamo ora \mathbf{R}^n dotato della metrica euclidea. Sia E un sottoinsieme di \mathbf{R}^n e k un intero positivo. Definiamo la misura esterna inter-

sezione $m_{k,E}$ nel modo seguente: $m_{k,E}(A) = \mathcal{I}_k(E \cap A)$ per ogni $A \subset \mathbf{R}^n$. Se ora nelle due definizioni di densità superiore prendiamo, come misura, la misura esterna intersezione $m_{k,E}$, otteniamo:

$$(3) \quad \bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = \limsup_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{I}_k(E \cap I(x, \varrho))}{\omega_k \varrho^k}$$

$$(4) \quad \overline{\mathcal{U}}_k m_{k,E}(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{I}_k(E \cap u_n(x))}{(p^{-n})^k} = \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E)$$

dove in (4) si è presa, rispetto alla (1), la particolare funzione $h(t) = t^k$.

TEOREMA 1.1. *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$. Per ogni punto $x \in \mathbf{R}^n$ si ha:*

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) \leq \omega_k (\sqrt{n})^k \bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E).$$

DIMOSTRAZIONE. Posto $\varrho_m = \sqrt{n} p^{-m}$, si ha, per ogni m , $I(x, \varrho_m) \supset \supset u_m(x)$ e quindi $\mathcal{I}_k(E \cap I(x, \varrho_m)) \geq \mathcal{I}_k(E \cap u_m(x))$.

Ne segue che

$$\frac{\mathcal{I}_k(E \cap I(x, \varrho_m))}{\omega_k \varrho_m^k} \geq \frac{\mathcal{I}_k(E \cap u_m(x))}{\omega_k (\sqrt{n})^k (p^{-m})^k}$$

e pertanto si ha

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{I}_k(E \cap I(x, \varrho_m))}{\omega_k \varrho_m^k} \geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{I}_k(E \cap u_m(x))}{\omega_k (\sqrt{n} p^{-m})^k}.$$

Dalle definizioni di $\bar{\theta}_k$ e $\overline{\mathcal{U}}_k$ possiamo concludere che:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E) &\geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{I}_k(E \cap I(x, \varrho_m))}{\omega_k \varrho_m^k} \geq \\ &\geq \limsup_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{I}_k(E \cap u_m(x))}{\omega_k (\sqrt{n} p^{-m})^k} = \frac{\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E)}{\omega_k (\sqrt{n})^k}. \end{aligned}$$

COROLLARIO 1. *Se $E \subset \mathbf{R}^n$, in ogni punto $x \in \mathbf{R}^n$ nel quale si abbia $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = 0$ è anche*

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = 0.$$

Non è generalmente vero il viceversa, cioè che da $\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = 0$

segua che $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = 0$. Infatti possono esistere punti x nei quali è $\bar{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = 0$, mentre non solo è $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E) > 0$, ma anche $\theta_k(x, \mathcal{I}_k, E) > 0$. Consideriamo a tale scopo come insieme E una retta di \mathbf{R}^2 con coefficiente angolare negativo ed un punto x su di essa che sia, per ogni m , vertice di $u_m(x)$: avremo

$$\bar{\theta}_1(x, \mathcal{I}_1, E) = \theta_1(x, \mathcal{I}_1, E) = 1$$

come in ogni altro punto di E , mentre abbiamo

$$\bar{\mathcal{U}}_1(x, \mathcal{I}_1, E) = 0.$$

OSSEVAZIONE. Dal teorema 1 e dal precedente corollario segue che: se $E \subset \mathbf{R}^n$ è un insieme \mathcal{I}_k -misurabile di misura \mathcal{I}_k localmente finita in \mathbf{R}^n , in \mathcal{I}_k -quasi tutti i punti di $\mathbf{R}^n \setminus E$ si ha

$$\bar{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = 0.$$

COROLLARIO 2. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ un insieme di misura \mathcal{I}_k localmente finita nell'insieme aperto A . In \mathcal{I}_k -quasi tutti i punti $x \in A$

$$\bar{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) \leq \omega_k(\sqrt{n})^k.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal teorema 1.1 tenendo presente che in \mathcal{I}_k -quasi tutti i punti $x \in A$ è $\bar{\theta}_k(x, \mathcal{I}_k, E) \leq 1$ (v. (2)).

TEOREMA 1.2. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ unione finita o numerabile di insiemi E_i , \mathcal{I}_k -misurabili, e sia $0 < \mathcal{I}_k(E) < \infty$. In \mathcal{I}_k -quasi tutti i punti $x \in E$ risulta

$$(5) \quad \bar{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E) = \bar{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E_i)$$

essendo E_i quell'insieme della famiglia (E_i) al quale appartiene il punto x .

DIMOSTRAZIONE. Per ogni i , l'insieme $E \setminus E_i$ è \mathcal{I}_k -misurabile e di misura \mathcal{I}_k finita. Pertanto in \mathcal{I}_k -quasi tutti i punti $x \in E_i$ si ha, per l'osservazione precedente,

$$\bar{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{I}_k, E \setminus E_i) = 0.$$

Ora, essendo E \mathcal{H}_k -misurabile, abbiamo, per ogni $x \in E_i$ ed ogni m ,

$$\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x)) = \mathcal{H}_k(E \cap E_i \cap u_m(x)) + \mathcal{H}_k((E \setminus E_i) \cap u_m(x)).$$

Perciò

$$\sup_{n \leq m} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k} \leq \sup_{n \leq m} \frac{\mathcal{H}_k(E_i \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k} + \sup_{n \leq m} \frac{\mathcal{H}_k((E \setminus E_i) \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k}$$

e quindi, passando al limite per $n \rightarrow +\infty$, abbiamo, per ogni $x \in E_i$

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leq \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i) + \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E \setminus E_i).$$

Per la monotonia della misura \mathcal{H}_k è anche $\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \geq \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i)$ per ogni $x \in E_i$, e dunque: in \mathcal{H}_k -quasi tutti i punti $x \in E_i$ sarà

$$\overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) = \overline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E_i).$$

Dal momento che gli E_i sono un'infinità numerabile, possiamo concludere con la (5).

TEOREMA 1.3. *Sia E un sottoinsieme di \mathbf{R}^n e sia x un punto di E . Supponiamo che x sia sempre interno ad $u_m(x)$ per ogni m . Allora si ha:*

$$(6) \quad \underline{\mathcal{U}}_k(x, \mathcal{H}_k, E) \leq (\sqrt{n})^k p^k \omega_k \underline{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E).$$

DIMOSTRAZIONE. Ad ogni $\rho > 0$ associamo il numero $m(\rho)$ che è il minimo intero m per il quale si ha $\sqrt{n}p^{-m} < \rho$ (poichè x è sempre interno, per m sufficientemente grande è $u_m(x) \subset I(x, \rho)$ e quindi $\sqrt{n}p^{-m} < \rho$). Abbiamo allora, per definizione di $m(\rho)$, che $\sqrt{n}p^{-(m(\rho)-1)} > \rho$ e pertanto

$$\frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \rho))}{\rho^k} \geq \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\rho)}(x))}{(\sqrt{n}p^{-(m(\rho)-1)})^k} = \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\rho)}(x))}{(p^{-m(\rho)})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}p)^k}.$$

Di qui, dato che per $\rho \rightarrow 0^+$, $m(\rho) \rightarrow +\infty$, si ha

$$\begin{aligned} \underline{\theta}_k(x, \mathcal{H}_k, E) &= \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap I(x, \rho))}{\omega_k \rho^k} \geq \\ &\geq \liminf_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\rho)}(x))}{(p^{-m(\rho)})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}p)^k \omega_k}. \end{aligned}$$

Dal momento che $m(\varrho)$ non assume, in generale, tutti i valori interi (positivi) consideriamo il minimo limite su tutti gli interi $m > 0$, avremo

$$\begin{aligned} \liminf_{\varrho \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_{m(\varrho)}(x))}{(p^{-m(\varrho)})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}p)^k \omega_k} &> \\ &\geq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}_k(E \cap u_m(x))}{(p^{-m})^k} \cdot \frac{1}{(\sqrt{n}p)^k \omega_k} = \frac{\mathcal{U}_k(x, \mathcal{H}_k, E)}{(\sqrt{n}p)^k \omega_k}. \end{aligned}$$

e la (6) è dimostrata.

Ringrazio C. Minnaja per l'aiuto e i preziosi consigli che mi ha dato e A. Chiffi per alcuni utili suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA

- [B.] A. S. BESICOVITCH, *On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points, I*, Math. Ann., **98** (1928), pp. 422-464.
- [F.] H. FEDERER, *The (φ, k) rectifiable subsets of n space*, Trans. Amer. Math. Soc., **62** (1947), pp. 114-192.
- [H.] J. HAWKES, *Hausdorff measure, entropy, and the independence of small sets*, Proc. London Math. Soc., (3) **28** (1974), pp. 700-724.
- [M.] E. F. MOORE, *Density ratios and $(\varphi, 1)$ rectifiability in n space*, Trans. Amer. Math. Soc., **69** (1950), pp. 324-334.

Manoscritto pervenuto in Redazione il 9 dicembre 1975.