RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUCCHETTI ROBERTO
PATRONE FIORAVANTE

Metodo epsilon e convergenza di Mosco

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 57 (1977), p. 1-15

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__57__1_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 57 (1977)

Metodo epsilon e convergenza di Mosco

LUCCHETTI ROBERTO e PATRONE FIORAVANTE (*)

ABSTRACT. - In this paper we analyse some aspects of the so called ε-technique, introduced for control problems by Balakrishnan [2], [3]. In particular we study the rate of convergence of the method. We show that the ε-method can be viewed in the more general setting of Mosco's convergence.

Introduzione.

Dato un chiuso convesso K di uno spazio E, e dato un funzionale g su E il problema (P) consiste nel trovare $e_0 \in K$ tale che:

$$g(e_0) = \min \{ g(e) : e \in K \}$$

il vincolo K sarà sempre del tipo: $e \in K$ se e solo se $Le = h$, L operatore lineare.

Il problema (P_ε) consiste nel minimizzare, su tutto E,

$$g_\varepsilon(e) = g(e) + \frac{1}{2\varepsilon}\|Le - h\|^2, \qquad \varepsilon > 0 .$$

Aubin in [1] prova che, in ipotesi convenienti, si ha una stima sulla convergenza dei valori di minimo m_ε di (P_ε) al valore di minimo

(*) Indirizzo degli AA.: Istituto Matematico dell'Università - Via L. B. Alberti 4 - Genova.

Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.A.F.A.

m di (P) di questo tipo : $m - m_\varepsilon \leq C\varepsilon$, C costante opportuna. Nella prima parte di questo lavoro si proverà che un risultato analogo può essere ottenuto, in ipotesi più generali, anche considerando minimi asintotici per (P_ε) anzichè minimi.

Oggetto della seconda parte è invece vedere in che modo la penalizzazione si colloca nello schema della convergenza introdotta da Mosco [6] : vengono date condizioni necessarie e condizioni sufficienti per la convergenza secondo Mosco del metodo di penalizzazione.

Nella terza parte, infine, si studia un tipo di convergenza più particolare, sempre introdotto da Mosco, che dà informazioni sulla velocità di convergenza del metodo : i risultati ottenuti sono del tipo : $\varepsilon^{-\alpha}(m - m_\varepsilon) \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ $\forall\, \alpha < \frac{1}{2}$.

Si mostra anche che, pur particolarizzando le ipotesi, non è possibile ottenere in questo schema velocità di convergenza di ordine superiore.

Notazioni e ipotesi.

Nel seguito verranno usate costantemente le seguenti notazioni ed ipotesi : E ed H spazi di Banach sui reali, $L : E \to H$ operatore lineare e continuo. Fissato un elemento $h \in R(L)$, definiremo $K = \{ e \in E : Le = h \}$.

Data $g : E \to (-\infty, +\infty]$, considereremo i seguenti problemi :

Trovare $e_0 \in K$ t. c. :

(P) $$g(e_0) \leq g(e) \quad \forall\, e \in K.$$

Trovare $e_\varepsilon \in E$ t. c.

(P$_\varepsilon$) $$g_\varepsilon(e_\varepsilon) = g(e_\varepsilon) + \frac{1}{2\varepsilon}\|Le_\varepsilon - h\|^2 \leq g_\varepsilon(e) \quad \forall\, e \in E$$

Nel caso in cui e_0 ed e_ε esistano, porremo $m = g(e_0)$ e $m_\varepsilon = g_\varepsilon(e_\varepsilon)$; data $t : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, con $t(x) \to 0$ se $x \to 0$, porremo $D(\varepsilon) = \{ e \in E : g_\varepsilon(e) - m_\varepsilon \leq t(\varepsilon) \}$.

Si useranno infine le seguenti notazioni : dato $A \subset E$, δ_A sarà la funzione indicatrice di A, ovvero :

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A \\ +\infty & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Data g, $g|_K$ indica la restrizione di g a K, mentre indicheremo con $\operatorname{dom} g = \{ e \in E : g(e) < +\infty \}$ e con $\partial g(e)$ il sottodifferenziale di g nel punto e.

Dato $e \in E$, E di Hilbert, ed N sottospazio chiuso di E, e^0 è la proiezione di e su N $\big($cioè $e^0 = Pr_N(e)\big)$, e^1 la proiezione di e su N^1.

Useremo infine le seguenti abbreviazioni: s.c.i. per semicontinua inferiormente, d.s.c.i. per debolmente s.c.i., d.s.s.c.i. per debolmente sequenzialmente s.c.i.

Osserviamo infine che nei teoremi 1.1, 3.2, 3.3 e nel lemma 3.1 l'ipotesi di surgettività per L può essere sostituita con l'ipotesi che $R(L)$ sia chiuso. Poichè $R(L) \subset H$, H spazio di Hilbert, $R(L)$ è anch'esso di Hilbert. Basta dunque passare al quoziente, esattamente come in [1].

§ 1. – Oggetto di questo paragrafo è la dimostrazione del seguente:

TEOREMA 1.1. Nelle ipotesi:

a) E, H spazi di Hilbert reali,
b) $L : E \to H$ lineare, continuo e surgettivo,
c) $g : E \to R$ convessa, s.c.i. e tale che:

$$\begin{aligned} &\sup \{\|v\| : \ v \in \partial g(e)\} \le \vartheta[g(e)], \text{ con} \\ &\vartheta : R \to (0, +\infty) \text{ funzione non decrescente,} \end{aligned} \tag{1.1.}$$

d) P e P_ε hanno soluzioni;

allora esiste $C > 0$ tale che $\forall\, \varepsilon > 0$ e $\forall\, e \in D(\varepsilon)$

$$\|Le - h\| \le C\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon\, t(\varepsilon)} \tag{1.2.}$$

$$|g(e_0) - g_\varepsilon(e)| \le C\varepsilon + t(\varepsilon)\,. \tag{1.3}$$

OSSERVAZIONE 1.1. Nel teorema dimostrato in Aubin [1], si assume l'ipotesi di differenziabilità secondo Gateaux di g e si danno stime concernenti i punti di minimo e_ε di P_ε.

OSSERVAZIONE 1.2. Nel caso in cui si sappia che le soluzioni e_ε sono equilimitate, la condizione 1.1 può essere sostituita dalla seguente:

$$\sup_{\|e\| \leq c} \{\|v\| : v \in \partial g(e)\} \leq M_c . \tag{1.1'}$$

Le ipotesi del teorema 3.3 successivo, ad esempio, garantiscono che le soluzioni e_ε sono equilimitate.

OSSERVAZIONE 1.3. Nelle ipotesi del teorema 1.1 è $\partial g(e) \neq \varnothing$ $\forall$ $e \in E$, poichè g è convessa, s.c.i. e a valori reali (v. Ekeland - Teman [4], coroll. 2.5, pag. 13 e prop. 5.2, pag. 22).

DIM. DEL TEOREMA

Poichè e_ε è minimo per P_ε, ne segue che $0 \in \partial g_\varepsilon(e_\varepsilon)$. Poichè $\|L(.)-h\|^2$ è continua, si ha: $\partial g_\varepsilon(e) = \partial g(e) + \partial \left(\frac{1}{2\varepsilon}\|Le-h\|^2\right)$ (v. prop. 5.6, pag. 26 di [4]).

Quindi:

$$0 \in \partial g(e_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} L^*(Le_\varepsilon - h) , \quad \text{da cui:} \tag{1.4}$$

$$\|L^*(Le_\varepsilon - h)\| \leq \varepsilon \sup \{\|v\| : v \in \partial g(e_\varepsilon)\} .$$

Poichè $g(e_\varepsilon) \leq g_\varepsilon(e_\varepsilon) \leq g(e_0)$, si ha:

$$\|L^*(Le_\varepsilon - h)\| \leq \varepsilon \vartheta \left[g(e_0)\right] \leq C_1 \varepsilon . \tag{1.5}$$

Poichè dalla surgettività di L si ha che $\exists$ $C_2 > 0$ t.c. $\|L^*y\| \geq$ $\geq C_2\|y\|$ $\forall$ $y \in E$, segue $\|Le_\varepsilon - h\| \leq C\varepsilon$.

Dall'identità:

$\|Le-h\|^2 = \|Le_\varepsilon-h\|^2 + 2\left(L^*(Le_\varepsilon-h), \quad e-e_\varepsilon\right) + \|L(e-e_\varepsilon)\|^2$, segue:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|L(e-e_\varepsilon)\|^2 = g_\varepsilon(e) - g_\varepsilon(e_\varepsilon) + \left[g(e_\varepsilon) - g(e) - \frac{1}{\varepsilon}\left(L^*(Le_\varepsilon - h), e - e_\varepsilon\right)\right]$$

$\leq g_\varepsilon(e) - g_\varepsilon(e_\varepsilon)$, poichè per la (1.4) si ha $-\dfrac{1}{\varepsilon} L^*(Le_\varepsilon - h) \in \partial g(e_\varepsilon)$.

Dunque:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\|L(e-e_\varepsilon)\|^2 \leq g_\varepsilon(e) - g_\varepsilon(e_\varepsilon) \quad \forall\ e \in E\,. \tag{1.6}$$

Preso dunque $e \in D(\varepsilon)$, si ha la (1.2) da (1.5) e (1.6).

Per ottenere la (1.3), osserviamo che, $\forall\ e \in D(\varepsilon)$:

$$| g(e_0) - g_\varepsilon(e) | \leq g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon) + g_\varepsilon(e) - g_\varepsilon(e) \leq t(\varepsilon) + g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon)\,.$$

È necessario quindi stimare $g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon)$.

Come si dimostra nel lemma 1.1 seguente, $\exists\ u \in H$ ed $\exists$ $v \in \partial g(e_0)$ t.c. $v = L^*u$.

Quindi:

$$g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon) \leq g(e_0) - g(e_\varepsilon) \leq (v, e_0 - e_\varepsilon) \leq \|u\|\ \|L(e_0 - e_\varepsilon)\| \leq C_3\varepsilon, \text{ da cui (1.3).}$$

Il teorema risulta dunque completamente provato se dimostra il:

Lemma 1.1. *E, H di Hilbert, $L: E \to H$ lineare continuo a rango chiuso. $g: E \to R$ convessa s.c.i. Se e_0 è punto di minimo per g su K, $\exists\ v \in \partial g(e_0)$ t.c. $v = L^*u$.*

Dim.

Sia $f(e) = g(e) + \delta_K(e)$.

Poichè e_0 è minimo per f su E, si ha:

$$0 \in \partial f(e_0) = \partial g(e_0) + \partial \delta_K(e_0)\,.$$

Calcoliamo $\partial\delta_K(e_0)$

$$u^* \in \partial\delta_K(e_0) \Leftrightarrow (e - e_0\,, u^*) \leq 0 \quad \forall\ e \in K\,.$$

Poichè $K - e_0 = N(L)$, si ha che $(e, u^*) = 0 \quad \forall\ e \in N(L)$.

Dunque $\exists\ u \in H$ t.c. $0 = v - L^*u$, con $v \in \partial\, g(e_0)$

C. V. D.

OSSERVAZIONE 1.4. Non si può in generale migliorare il risultato di Aubin, cioè non è possibile ottenere una convergenza di tipo $m - m_\varepsilon \leq C\,\varepsilon^\alpha$ con $\alpha > 1$, come mostra il seguente esempio:

$$E = R^2,\ H = R,\ g(x, y) = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2),\ L(x, y) = y - 2x,\ h = 1.$$

Il punto di minimo per (P) è $(-2/5,\ 1/5)$, per cui $g(e_0) = 1/10$.
Per (P_ε), $e_\varepsilon = (-2/(5+\varepsilon), 1/(5+\varepsilon))$. Quindi $g_\varepsilon(e_\varepsilon) = 1/2(5+\varepsilon)$.
Ne segue che $\dfrac{g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon)}{\varepsilon} \not\longrightarrow 0$.

È importante notare che l'ipotesi che L abbia rango chiuso non può essere omessa nel teorema di Aubin. L'esempio seguente mostra infatti che

$\forall\, \alpha > 0$, $\alpha < 1$, esiste L tale che, per il problema associato, $\varepsilon^{-\alpha}\big(g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon)\big) \not\longrightarrow 0$.

ESEMPIO 1.1. Sia $E = L^2([0,1]) \oplus L^2([0,1])$, $H = L^2([0,1])$, $L_k(x, y)(t) = t^k x(t)$, $k > \frac{1}{2}$, $h = 0$, $e \equiv (x, y)$, $g(e) = \frac{1}{2}\|e - e_a\|^2_{L^2 \oplus L^2}$, con $e_a = (1,0)$.
Si verifica che $L_k^* : H \to E$ è così definito: $L_k^*(x)(t) = (t^k x(t), 0)$.
Ovviamente $e_0 = (0, 0)$, $g(e_0) = \frac{1}{2}$.
Con procedimenti standard si ottiene che $e_\varepsilon = \left(\dfrac{1}{1 + \varepsilon^{-1} t^{2k}},\ 0\right)$.

Da cui

$$g_\varepsilon(e_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1} t^{2k}}\right)^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,\frac{t^{2k}}{(1 + \varepsilon^{-1} t^{2k})^2}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \int_0^1 \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1} t^{2k}}\, dt\right]$$

Perciò per $\varepsilon < 1$:

$$g(e_0) - g_\varepsilon(e_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1 + \varepsilon^{-1} t^{2k}}\, dt = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{1/2k}\int_0^{\varepsilon^{-1/2k}} \frac{1}{1 + s^{2k}}\, ds \geq$$

$$\geq \frac{\varepsilon^{1/2k}}{2}\int_0^1 \frac{1}{1 + s^{2k}}\, ds \geq \frac{1}{4}\,\varepsilon^{1/2k}$$

Scelto $k > (2\alpha)^{-1}$ si ha quindi l'asserto.

§ 2. – Ricordiamo la definizione di convergenza secondo Mosco per successioni di funzioni [6].

Sia data una successione di funzioni $f_n : E \to (-\infty, +\infty]$ ed $f: E \to (-\infty, +\infty]$.

Si ha la seguente

DEFINIZIONE 2.1 $f_n \xrightarrow{M} f$ se:

a) $\forall\, v \in E$, $\exists\, v_n \in E$, $v_n \to v$ t.c. max lim $f_n(v_n) \le f(v)$.

b) Data comunque una sottosuccessione f_{n_k} di f_n, si ha che:

$$\forall\, v_k \rightharpoonup v\,,\ \text{min lim}\ f_{n_k}(v_k) \ge f(v)\,.$$

Osserviamo che la parte *b*), così enunciata da Mosco [6], può essere riformulata più semplicemente come segue [5]:

$$b')\ \forall\, v_n \rightharpoonup v\,,\ \text{min lim}\ f_n(v_n) \ge f(v)\,.$$

Infatti, siano date f_{n_k} e $v_k \rightharpoonup v$. Posto $\bar v_r = v_k$, se $n_k \le \le r < n_{k+1}$, si ha che $\bar v_r \rightharpoonup v$ e min lim $f_{n_k}(v_k) =$ min lim $f_{n_k}(\bar v_{n_k}) \ge$ min lim $f_n(\bar v_n) \ge f(v)$ per la *b'*).

Diamo ora la dimostrazione di un teorema, già provato da Mosco [6], pag. 546 in ipotesi leggermente diverse.

TEOREMA 2.1. Sia E spazio di Banach riflessivo;

$f_n, f_0 : E \to (-\infty, +\infty]$ convesse e s.c.i.;

$f_0 \not\equiv +\infty$; $f_n \xrightarrow{M} f_0$.

$\forall\, n \ge 0\ f_n(v) \ge \vartheta(\|v\|)$ dove $\vartheta : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ è t.c.

$$\theta(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} +\infty$$

Sia $S_n = \{ u \in E \text{ t.c. } f_n(u) \le f_n(v) \quad \forall\, v \in E \}\ n \ge 0$.

Allora: $S_n \ne \varnothing\ \forall n$ e $\forall u_n \in S_n$ si ha $f_n(u_n) \to f_0(u)$, $u \in S_0$.

DIM.

$S_n \neq \varnothing$ $\forall n \geq 0$ per un risultato standard.

Inoltre $\bigcup_n S_n$ è limitata perchè se così non fosse dalla condizione a) della def. 2.1. si avrebbe $f \equiv +\infty$.

Scelta comunque $u_n \in S_n$ si ha dunque che $\exists n_k$ t.c. $u_{n_k} \rightharpoonup \bar{u}$.

Mostriamo che $\bar{u} \in S_0$. Sia $v \in E$: da a) di def. 2.1 $\exists$ $v_n \to v$ t.c. $\max\lim f_n(v_n) \leq f_0(v)$. Per cui:
$f_0(v) \geq \max\lim f_n(v_n) \geq \max\lim f_{n_k}(v_{n_k}) \geq \max\lim f_{n_k}(u_{n_k}) \geq$ $\geq \min\lim f_{n_k}(u_{n_k}) \geq f_0(\bar{u})$ (e l'ultima disuguaglianza discende dalla condizione b) della def. 2.1).

Il calcolo precedente mostra inoltre, prendendo $v = u \in S_0$, che $f_{n_k}(u_{n_k}) \to f_0(u)$.

Rimane dunque da provare che la convergenza avviene per tutta la successione. Se per assurdo $f_n(u_n) \not\to f(u)$, $\exists$ n_j, $\varepsilon > 0$ t.c. $|f_{n_j}(u_{n_j}) - f_0(\bar{u})| > \varepsilon$.

Estraendo ancora da u_{n_j} e ripetendo per la nuova successione i ragionamenti precedenti, si ha $f_{n_j}(u_{n_j}) \to f(u_0) = f(\bar{u})$ e ciò è assurdo.

Vedremo ora come si può inserire in questo schema il problema di penalizzazione illustrato nel paragrafo precedente, che verrà affrontato nella sua versione discretizzata, assumendo cioè $K_n = \frac{1}{2\varepsilon_n}$, con $K_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

Dati E, H spazi di Banach, E riflessivo ed $L: E \to H$ lineare e continuo, poniamo ora:

$$\begin{aligned} f_n(v) &= g(v) + K_n\|Lv - h\|^2 \\ f(v) &= g(v) + \delta_K(v) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Osserviamo innanzitutto che, essendo $f_n \leq f$ $\forall$ $n \in \mathbf{N}$, la condizione a) è sempre banalmente verificata.

Notiamo poi che se f_n ed f non sono d.s.s.c.i., la convergenza di Mosco non è una buona convergenza nel senso di Kuratowski, come indicato in [6]. D'altra parte, come si verifica, l'unica proprietà che non è soddisfatta se le funzioni considerate non sono d.s.s.c.i. è che, se $f_n = f$ per ogni n, allora $f_n \xrightarrow{M} f$. Ma, come si vede nel teor. 2.2 successivo, se $f_n \xrightarrow{M} f$ allora $g|_K$ è necessariamente d.s.s.c.i., in accordo con la precedente osservazione, tenuto conto del fatto che $f_n = f = g$ su K.

Sussiste il seguente:

TEOREMA 2.2. Condizione necessaria affinchè, assegnata K_n, $f_n \xrightarrow{M} f$, è che:

1) $g|_K$ sia d.s.s.c.i.

2) g sia limitata inferiormente sugli insiemi limitati.

Inoltre, se $f_n \xrightarrow{M} f$ qualunque sia la scelta di K_n, g è fortemente s.c.i. su K.

DIM. La 1) segue immediatamente dalla b') della def. 2.1, poichè $f_n = f = g$ su K.

Per la 2), sia v_n limitata e per assurdo sia $\lim g(v_n) = -\infty$, con $v_n \rightharpoonup v$. Allora esiste un'estratta, che indicheremo v_{n_j}, t.c. $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{g(v_{n_j})}{K_j} = -\infty$. Allora $\lim\limits_{j\to\infty} \left[g(v_{n_j}) + K_j\|Lv_{n_j} - h\|^2\right] = -\infty$, in contraddizione con la b') di def. 2.1.

Per completare la dimostrazione sia $v_n \to v$, $v \in K$: quindi $\|Lv_n - h\|^2 \to 0$ ed anche $\lim\limits_{n\to\infty} K_n\|Lv_n - h\|^2 = 0$ per una opportuna scelta di K_n. La tesi segue ancora da b') di def. 2.1.

Il seguente teorema esprime invece condizioni sufficienti per la convergenza di f_n ad f, comunque si scelga K_n.

TEOREMA 2.3. Sia g limitata inferiormente sui limitati e d.s.s.c.i. in ogni punto di K: allora $f_n \xrightarrow{M} f \ \forall K_n$.

DIM. Per provare la b'), distinguiamo due casi.

1) $v \notin K$. Poichè $\min\lim\limits_{n\to\infty} g(v_n) > -\infty$ si ha: $\min\lim\limits_{n\to\infty} f_n(v_n) =$

$= \min\lim\limits_{n\to\infty} g(v_n) + \lim\limits_{n\to\infty} K_n\|Lv_n - h\|^2 = +\infty$, poichè

$\min\lim\limits_{n\to\infty}\|Lv_n - h\|^2 > 0$.

2) $v \in K$. Allora $\min\lim\limits_{n\to\infty} f_n(v_n) \geq \min\lim\limits_{n\to\infty} g(v_n) \geq g(v)$ per ipotesi.

Dai due teoremi precedenti segue immediatamente che, se E ha dimensione finita, sono fatti equivalenti:

a) $f_n \xrightarrow{M} f$ per ogni scelta di K_n.

b) g è s.c.i. su K nonchè inferiormente limitata sui limitati.

OSSERVAZIONE 2.1. L'ipotesi di d.s.s.c.i. su K per g non è necessaria per la convergenza di f_n ad f, come mostra il seguente esempio. Sia E spazio di Hilbert, con base ortonormale e_n, $H = E$, $h = 0$. Definiamo :

$$Le_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ e_n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \qquad g(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } v \neq e_{2n+1} \\ -1 & \text{se } v = e_{2n+1} \end{cases}$$

Data $v_n \rightharpoonup v$, verifichiamo che la b') di def. 2.1 sussiste nel caso in cui $v \in K$ ed è definitivamente $v_n = e_{2r+1}$ per qualche $r \in N$: infatti $\min\lim f_n(v_n) = -1 + \min\lim K_n\|v_n\|^2 = +\infty$. Se invece $v \in K$ e definitivamente $v_n \neq e_{2r+1}$ per ogni $r \in N$, $\min\lim f_n(v_n) = \min\lim K_n\|Lv_n\|^2 \geq 0 = g(v)$. Gli altri casi sono del tutto ovvi.

§ **3.** – Scopo della trattazione successiva è l'analisi di un tipo di convergenza, sempre introdotto da U. Mosco, che ci permette di ottenere risultati sulla velocità di convergenza nell'ambito dei problemi affrontati nei paragrafi precedenti.

DEFINIZIONE 3.1. Sia E spazio di Banach, f_n, $f: E \to (-\infty, +\infty]$, $f \not\equiv +\infty$; f_n, f convesse e s.c.i.

Diremo che $f_n \to f$ secondo Mosco di ordine $\geq \alpha$ (brevemente : $f_n \xrightarrow{M\alpha} f$) se sono verificate le due condizioni seguenti :

a) $\forall\ v \in \operatorname{dom} f,\ \exists\ v_n \in E$ t.c. $n^\alpha(v_n - v) \to 0$ in E

$$\text{e} \quad \max\lim_{n\to\infty} n^\alpha\big(f_n(v_n) - f(v)\big) \leq 0\,.$$

b) Data f_{n_k} estratta da f_n e v_k debolmente convergente, con $\max\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k}(v_k) < +\infty$, $\exists\ f_{n_{k_j}}(v_{k_j})$ estratta da $f_{n_k}(v_k)$ ed $\exists\ w_j$ t.c. $n_{k_j}^\alpha(v_{k_j} - w_j) \rightharpoonup 0$ e $\min\lim\limits_{j\to\infty} n_{k_j}^\alpha \{f_{n_{k_j}}(v_{k_j}) - f(w_j)\} \geq 0$.

Sussiste il seguente :

TEOREMA 3.1. Nelle ipotesi del teor. 2.1 sia inoltre $f_n \xrightarrow{M\alpha} f_0$. Si ha allora : $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \{f_n(u_n) - f_0(u)\} = 0$ se $u_n \in S_n$, $u_0 \in S_0$.

DIM. Sia $u \in S_0$: per la $a)$ di def. 3.1 $\exists\, v_n \to u$ t.c. $\max\lim_{n\to\infty} n^\alpha \{f_n(v_n) - f_0(v)\} \leq 0$. Poichè, per definizione di S_n, $u_n \in S_n$ implica $f_n(u_n) \leq f_n(v_n)$, si ha : $\max\lim_{n\to\infty} n^\alpha \{f_n(u_n) - f_0(u_0)\} \leq 0$.

Proviamo ora la relazione opposta per il minimo limite. Se $u_n \in S_n$, per un'estratta $u_n \rightharpoonup \bar{u}$, $\bar{u} \in S_0$, come si è visto nel teor. 2.1 ; è anche $\max\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) < +\infty$, perchè dal teor. 2.1 è noto che $\lim_{n\to\infty} f_n(u_n) = f_0(u)$. Pertanto dalla def. 3.1 segue che $\exists\, w_k$ t.c. $n_k^\alpha(u_{n_k} - w_k) \rightharpoonup 0$ e t.c. $\min\lim_{k\to\infty} n_k^\alpha \{f_{n_k}(u_{n_k}) - f_0(w_k)\} \geq 0$. Poichè $f_0(w_k) \geq f_0(\bar{u})$, si ha : $\min\lim_{k\to\infty} n_k^\alpha \{f_{n_k}(u_{n_k}) - f_0(\bar{u})\} \geq 0$.

Il teorema risulta così provato per un'estratta, ma con ragionamenti del tutto simili a quelli del teor. 2.1, si conclude che la convergenza c'è per tutta la successione.

Osserviamo che in generale la M_α convergenza non può dare velocità di convergenza migliori di quella provata per i valori di minimo, come mostrano facili esempi.

Applicheremo la definizione di convergenza di ordine $\geq \alpha$ al nostro problema di penalizzazione, definendo f_n ed f come in (2.1), con $g : E \to \mathbb{R}$ convessa e s.c.i. Osserviamo preliminarmente che è necessario, dalla condizione $b)$ di def. 3.1, scegliere $w_j \in K$ (almeno definitivamente). Altrimenti $f(w_j) = +\infty$ per infiniti indici j e quindi $\min\lim_{j\to\infty} n_{k_j}^\alpha \{f_{n_{k_j}}(v_{k_j}) - f(w_j)\} = -\infty$.

Diamo ora un lemma che risulterà utile per i risultati successivi.

LEMMA 3.1. Siano E, H spazi di Hilbert ; $L : E \to H$ lineare, continuo e surgettivo. Sia $v_j \rightharpoonup v$ t.c. $\max\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(v_j) < +\infty$. Allora $\exists\, w_j \in K$ t.c. $K_{n_j}^\alpha(v_j - w_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$ $\forall\, \alpha < \frac{1}{2}$.

DIM. Osserviamo innanzi tutto i seguenti fatti :

a) $\max\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(v_j) < +\infty$ implica $v \in K$. Infatti se $v \notin K$ $\exists\, c > 0$ t.c. $\|Lv_j - h\|^2 \geq c > 0$ per infiniti indici e quindi $\max\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(v_j) \geq$
$\geq \min\lim_{j\to\infty} g(v_j) + \lim_{j\to\infty} K_{n_j}^\alpha \|Lv_j - h\|^2 = +\infty$.

b) Per la surgettività di L si ha $R(L^*) = N(L)^\perp$

c) Definito $w_j = v_j^0 + Pr_K(0)$, dove $v_j^0 = Pr_{N(L)}(v_j)$, si ha che $v_j - w_j$ è ortogonale a $N(L)$.

Dimostriamo quindi il lemma in due passi successivi.

1) Proviamo che:

$$K_{n_j}^{\alpha}(v_j - w_j) \rightharpoonup 0 \quad \text{se } a < \tfrac{1}{2}. \tag{3.1}$$

Sia $x \in E$; $x = x^0 + x^{\perp}$ e, per la b), $\exists\ u \in H$ t.c. $x^{\perp} = L^*u$.

Allora: $0 \leq \max\lim\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{\alpha}|(v_j - w_j, x)| = \max\lim\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{\alpha}|(v_j - w_j, x^{\perp})| =$

$= \max\lim\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{\alpha}|(v_j - w_j, L^*u)| = \max\lim\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{\alpha}|(L(v_j - w_j), u)| \leq$

$\leq \|u\| \max\lim\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{\alpha}\|Lv_j - h\|$.

Poichè $\min\lim\limits_{j\to\infty} g(v_j) + \max\lim\limits_{j\to\infty} K_{n_j}\|Lv_j - h\|^2 \leq$

$\leq \max\lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j}(v_j) < +\infty$ segue che $K_{n_j}^{\frac{1}{2}}\|Lv_j - h\| \leq C$,

C costante, e quindi $K_{n_j}^{\alpha}\|Lv_j - h\| \to 0\ \forall\, a < \frac{1}{2}$. Con ciò si è provata la (3.1).

2) Proviamo che la convergenza in (3.1) è forte.

Fissato $\alpha < \frac{1}{2}\ \exists\, \bar{a} > a$ t.c. $K_{n_j}^{\bar{\alpha}}\|v_j - w_j\| \leq C_1$, C_1 costante, da cui segue immediatamente che $K_{n_j}^{\alpha}\|v_j - w_j\| \to 0$. La tesi segue dall'arbitrarietà di $a < \frac{1}{2}$.

Osservazione 3.1. L'ipotesi che L abbia rango chiuso è insopprimibile nel lemma precedente: l'esempio seguente mostra infatti che non esiste $w_j \in K$ t.c. $n_j^{\alpha}(v_{n_j} - w_j) \to 0$ con $a > 0$ se manca l'ipotesi di chiusura.

Non c'è dunque convergenza di f_n ad f di ordine $\geq a > 0$, in generale, se L non ha rango chiuso.

Esempio 3.1. Sia c_n base ortonormale di E e sia L così definito $(E = H)$:

$$Lc_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{c_n}{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

L non ha rango chiuso poichè se $v_n = \sum_{k=1}^{n} c_{2k+1}$ si ha che $Lv_n \rightharpoonup$

$$\rightharpoonup \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{2k+1}}{2k+1} \notin R(L).$$

Scegliamo $K_n = n$ e sia g arbitraria, purchè limitata; $h = 0$. Sia $v_n = c_{2n+1}$. È $\max\lim_{n\to\infty} f_n(v_n) < +\infty$. Data comunque una sottosuccessione n_j di n, la scelta migliore possibile per w_j sarebbe $w_j = 0$, in quanto è $0 = Pr_{N(L)}(v_n)$ $\forall$ n. D'altra parte $n_j^\alpha(v_{n_j} - w_j) \not\longrightarrow 0$ $\forall\ \alpha > 0$.

Nel prossimo teorema si danno condizioni sufficienti per la M_α convergenza, assumendo $K_n = n$ (senza perdere di generalità).

TEOREMA 3.2. Siano E, H spazi di Hilbert, $L : E \rightharpoonup H$ surgettivo, $g : E \rightharpoonup \mathbb{R}$ convessa, s.c.i. e superiormente limitata sui limitati. Allora $f_n \xrightarrow{M_\alpha} f$ $\forall\ \alpha < \frac{1}{2}$.

DIM. Ancora è ovvia la verifica della parte a) di def. 3.1.

Verifichiamo dunque b) tenendo conto che nelle ipotesi fatte g è uniformemente lipschitziana sugli insiemi limitati, come discende dal coroll. 2.4 pag. 12 di Ekeland-Temam [4] (con ovvie modifiche).

Dal lemma 3.1, data $v_j \rightharpoonup v$ con $\max\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(v_j) < +\infty$, $\exists$ w_j t.c. $n_j^\alpha(v_j - w_j) \rightharpoonup 0$ $\forall\ \alpha < \frac{1}{2}$. D'altra parte:

$\min\lim_{j\to\infty} n_j^\alpha \{ f_{n_j}(v_j) - f(w_j) \} \geq \lim_{j\to\infty} n_j^\alpha \{ g(v_j) - g(w_j) \} = 0$ perchè $n_j^\alpha |g(v_j) - g(w_j)| \leq C \cdot n_j^\alpha \|v_j - w_j\| \rightharpoonup 0$ per $\alpha < \frac{1}{2}$ (C costante).

È importante osservare che la tesi del teorema 3.2 non è vera, in generale, se g non è lipschitziana sui limitati e può assumere il valore $+\infty$. Questo si vede dal seguente:

ESEMPIO 3.2. Sia $E = \mathbb{R}^2$, $H = \mathbb{R}$, $L(x,y) = x$, $h = 0$ e sia infine $(0 < \beta < \alpha < 1)$.

$$g(x, y) = \begin{cases} -x^\beta & x \geq 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

Sia $v_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to 0$. È $\lim_{n\to\infty} f_n(v_n) < +\infty$ e, comunque si scelga $w_j \in K$, è $f(w_j) = 0$. D'altra parte $\min \lim_{n\to\infty} n^\alpha \{g(v_n) + n\|Lv_n\|^2\} = \lim_{n\to\infty} (-n^{\alpha-\beta}) = -\infty < g(0)$.

Notiamo a questo punto che l'esempio fornito nell'osservazione 1.4 mostra anche che la condizione b) di def. 3.1 è verificata solo se $\alpha < \frac{1}{2}$: è sufficiente scegliere $K_n = n$, $v_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, -\frac{1}{\sqrt{n}} + 1\right)$.

Possiamo ora riassumere le considerazioni fatte in questo paragrafo, che ci permettono di concludere il discorso sul problema posto inizialmente:

Teorema 3.3. Siano E, H spazi di Hilbert; $L: E \to H$ surgettivo; $g: E \to \mathbb{R}$ convessa, s.c.i., superiormente limitata sui limitati e t.c. $g(v) \geq \vartheta(\|v\|)$ con $\vartheta(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} +\infty$. Allora:

a) $\exists\ e_0 \in K$ t.c. $g(e_0) \leq g(e)\quad \forall\ e \in K$

b) $\exists\ e_n \in E$ t.c. $f_n(e_n) \leq f_n(e)\quad \forall\ e \in E$

c) $n^\alpha(g(e_0) - f_n(e_n)) \to 0\quad \forall_\alpha < \frac{1}{2}$.

Dim. La a) e la b) sono conseguenza immediata del fatto che, per la coercitività di g, f ed f_n sono coercitive, nonchè convesse e s.c.i. Per il teor. 3.2 si ha, d'altronde, che $f_n \to f$ di ordine $\geq \alpha$ con $\alpha < \frac{1}{2}$; essendo inoltre verificate le ipotesi del teor. 3.1 si ottiene la c).

Osservazione 3.2. Per quanto riguarda la convergenza dei punti di minimo, ricordiamo che essa si ottiene nelle ipotesi del teor. 2.1 se si introduce l'ipotesi seguente (v. Mosco [6] pag. 543).

Dato $u \in \operatorname{dom} f$, $\exists\ \beta: [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ continua in zero, t.c. $\beta(0) = 0$ e strettamente crescente, t.c.:

(*) $\beta(\|v - u\|) \leq \min \lim_{n\to\infty} |f_n(v) - f(u)|$ uniformemente al variare di v nei limitati.

Ovviamente, nell'ipotesi che $f_n \xrightarrow{M\alpha} f$, è sufficiente per la convergenza dei punti di minimo avere:

$$\beta(\|v - u\|) \leq \min_{n\to\infty} \lim n^{\alpha}|f_n(v) - f(u)|, \text{ anzichè la } (*).$$

Infine è chiaro che una ipotesi del tipo:

$$\|v - u\| \leq n^{\gamma}|f_n(v) - f(u)|\ , \ 0 \leq \gamma < \tfrac{1}{2}\,,$$

permette di concludere che $n^{\alpha-\gamma}\|u_n - u\| \to 0 \quad \forall\, \alpha < \frac{1}{2}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AUBIN, *Estimate of the error in the approximation of optimization problems with contraints by problems without contraints*, in *Control theory and calculus of variations*, edited by A. V. Balakrishnan. Academic Press 1969.

[2] BALAKRISHNAN, *A computational approach to the maximum principle*, Journal of computer and system sciences 5, 163-191, 1971.

[3] BALAKRISHNAN, *On a new computing - technique in optimal control*, S. I. A. M. Journal Control. Vol. 6, 149-173, 1968.

[4] EKELAND-TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod, Gautier-Villar 1974.

[5] MARCELLINI, *Su una convergenza di funzioni convesse*, Boll. U.M.I. Serie IV, Vol. VIII, 137-158, 1973.

[6] MOSCO, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*. Advances in Mathematics, 3, 510-585, 1969.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 luglio 1976.