

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CHRISTIAN CONSTANDA

Su l'esistenza della soluzione per la flessione delle piastre elastiche micropolari

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 58 (1977), p. 149-153

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__149_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

Su l'esistenza della soluzione per la flessione delle piastre elastiche micropolari

CHRISTIAN CONSTANDA (*)

1. - A. C. Eringen [1] ed A. E. Green e P. M. Naghdi [2] hanno stabilito le equazioni della teoria delle piastre elastiche micropolari, supponendo che gli spostamenti u_i e le microrotazioni φ_i ($i = 1, 2, 3$) abbiano la forma

$$u_\rho = u_\rho^{(0)}(x_1, x_2) + x_3 v_\rho(x_1, x_2), \quad u_3 = w(x_1, x_2),$$

$$\varphi_i = \varphi_i(x_1, x_2), \quad (\rho = 1, 2).$$

Vista la linearità della teoria, si dimostra che il problema generale può essere decomposto in altri due: il problema della tensione piana, caratterizzato dalle funzioni $u_\rho^{(0)}$, φ_3 , ed il problema della flessione, caratterizzato dalle funzioni v_ρ , w , φ_ρ . Quest'ultimo è stato studiato con l'aiuto della variabile complessa in [3]. In questo articolo ci si propone di stabilire per il problema della flessione, attraverso metodi variazionali, un teorema su l'esistenza e l'unicità di una soluzione debole nel senso di [4].

Se si nota: D - il dominio della sezione mediana (nel piano $x_1 0x_2$); c - la sua frontiera, di cui la normale esterna unitaria è $n(n_1, n_2)$; h_0 - lo spessore costante della piastra; $h = h_0/\sqrt{12}$; t_{ij} - le tensioni; m_{ij} - le coppie delle tensioni; f_i - le forze della massa; g_i - le coppie della massa; $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \mu$ - le costanti elastiche del materiale; se si considera che gli indici greci prendono

Indirizzo dell'A.: Department of Mathematics - University of Strathclyde - Glasgow, Great Britain.

i valori 1, 2 e se si accetta la convenzione di sommare gli indici ripetuti, allora le equazioni dell'equilibrio sul problema della flessione sono [1]:

$$(1) \quad L\underline{u} = \underline{F},$$

dove

$$\underline{u} = (v_1, v_2, w, \varphi_1, \varphi_2), \quad \underline{F} = (p_1, p_2, p, q_1, q_2),$$

$$L\underline{u} = (A_1 \underline{u}, A_2 \underline{u}, A \underline{u}, B_1 \underline{u}, B_2 \underline{u}),$$

$$- A_e \underline{u} = \hbar^2(\lambda + \mu)v_{\sigma, \sigma e} + \hbar^2(\mu + \kappa)v_{e, \sigma \sigma} - (\mu + \kappa)v_e + \mu \varepsilon_{e\sigma} \varphi_\sigma - \mu w_{,e},$$

$$- A \underline{u} = (\mu + \kappa)w_{, \sigma \sigma} + \mu v_{\sigma, \sigma} + \kappa \varepsilon_{\sigma e} \varphi_{e, \sigma},$$

$$- B_e \underline{u} = (\alpha + \beta)\varphi_{\sigma, \sigma e} + \gamma \varphi_{e, \sigma \sigma} + \kappa \varepsilon_{\sigma e} (v_\sigma - w_{, \sigma}) - 2\kappa \varphi_e,$$

$$(\dots)_{,e} = \frac{\partial}{\partial x_e} (\dots), \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0, \quad \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1,$$

$$p_e = J_1 f_e + H_1 t_{3e}, \quad p = J_0 f_3 + H_0 t_{33}, \quad q_e = J_0 g_e + H_0 m_{3e},$$

$$J_i \psi = \frac{1}{h_0} \int_{-h_0/2}^{+h_0/2} x_3^i \psi \, dx^3, \quad H_i \psi = \frac{1}{h_0} \left[x_3^i \psi \right]_{x_3 = -h_0/2}^{x_3 = +h_0/2}, \quad (i = 0, 1).$$

2. - Si possono facilmente ottenere le formule di Betti [5]:

$$(2) \quad \int_D \underline{u} L \underline{v} \, da = \frac{2}{h_0} \int_D E(\underline{u}) \, da - \int_c \underline{u} T \underline{v} \, ds,$$

$$(3) \quad \int_D (\underline{u} L \underline{v} - \underline{v} L \underline{u}) \, da = \int_c (\underline{v} T \underline{u} - \underline{u} T \underline{v}) \, ds,$$

dove $\underline{u}, \underline{v}$ sono delle funzioni vettoriali regolari, $E(\underline{u})$ è la densità d'energia interna

$$(4) \quad E(\underline{u}) = h_0 (\hbar^2 E_1 + E_2 + E_3),$$

$$E_1 = \lambda v_{e,e} v_{\sigma, \sigma} + (\mu + \kappa) v_{e, \sigma} v_{e, \sigma} + \mu v_{e, \sigma} v_{\sigma, e},$$

$$(5) \quad \begin{aligned} E_2 &= \alpha \varphi_{e,e} \varphi_{\sigma,\sigma} + \beta \varphi_{e,\sigma} \varphi_{\sigma,e} + \gamma \varphi_{e,\sigma} \varphi_{e,\sigma}, \\ E_3 &= (\mu + \kappa) (v_e v_e + w_{,e} w_{,e}) + 2\kappa \varphi_e \varphi_e + 2\kappa \varepsilon_{\sigma e} \varphi_e (w_{,\sigma} - v_\sigma) + \\ &\quad + 2\mu v_e w_{,e} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \underline{T}u &= (N_1 \underline{u}, N_2 \underline{u}, N \underline{u}, M_1 \underline{u}, M_2 \underline{u}), \\ N_e \underline{u} &= n_\sigma J_1 t_{\sigma e}, N \underline{u} = n_\sigma J_0 t_{\sigma 3}, M_e \underline{u} = n_\sigma J_0 m_{\sigma e}. \end{aligned}$$

3. - Si considera una piastra incastrata, dunque sul contorno della quale sono date le seguenti condizioni al limite :

$$(6) \quad \underline{u} = \underline{0} \quad \text{su } c.$$

Si introduce l'insieme dei vettori

$$U = \{ \underline{u} \in [C^2(D) \cap C^0(D \cup c)] \times \underbrace{\dots \times [C^2(D) \cup C^0(D \cup c)]}_{5 \text{ volte}} \}, \quad \underline{u} \text{ verifica (6)} \}$$

e si organizza U come uno spazio Hilbert reale con l'aiuto della norma

$$\| \underline{u} \|^2 = (\underline{u}, \underline{u}) = \int_D (v_e v_e + w^2 + \varphi_e \varphi_e) da.$$

LEMMA. Se la forma quadratica $\omega(\xi, \xi) = a_{ij} \xi_i \xi_j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), dove a_{ij} sono costanti, è positivamente definita, allora esiste una costante $\nu_0 > 0$ tale che

$$(7) \quad \omega(\xi, \xi) \geq \nu_0 \xi_i \xi_i,$$

qualunque sia il vettore $\xi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$.

TEOREMA 1. Se

$$(8) \quad \begin{aligned} 2\lambda + 2\mu + \kappa &> 0, \quad 2\mu + \kappa > 0, \quad \kappa > 0, \\ 2\alpha + \beta + \gamma &> 0, \quad \gamma + \beta > 0, \quad \gamma - \beta > 0, \end{aligned}$$

allora

a) per ogni coppia di vettori u, v di U si ha

$$(9) \quad (u, Lv) = (v, Lu);$$

b) esiste una costante k^2 (che dipende da D) tale che si ha

$$(10) \quad (u, Lu) \geq k^2 \|u\|^2, \text{ qualunque sia il vettore } u \in U.$$

DIMOSTRAZIONE. La proprietà (9) risulta da (3). Per stabilire (10) si utilizza la lemma precedente, (4), (5), (8) e l'ineguaglianza di Friedrichs, che ha luogo per ogni funzione $\psi \in C^1(D) \cap C^0(D \cap e)$, $\psi = 0$ su e :

$$\int_D \psi_{,\alpha} \psi_{,\alpha} \, da \geq k_0^2 \int_D \psi^2 \, da,$$

dove la costante k_0^2 dipende da D .

Si ha successivamente:

$$E_1 = (\lambda + 2\mu + \kappa) (v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2) + 2\lambda v_{1,1} v_{2,2} + (\mu + \kappa) (v_{1,2}^2 + v_{2,1}^2) + 2\mu v_{1,2} v_{2,1} \geq \nu_1^2 (v_{1,1}^2 + v_{2,2}^2) + \nu_2^2 (v_{1,2}^2 + v_{2,1}^2),$$

$$\int_D k^2 E_1 \, da \geq k_1^2 \int_D v_e v_e \, da, \quad k_1^2 = k^2 k_0^2 \min(\nu_1^2, \nu_2^2);$$

$$E_2 = (\alpha + \beta + \gamma) (\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{2,2}^2) + 2\alpha \varphi_{1,1} \varphi_{2,2} + \gamma (\varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2) + 2\beta \varphi_{1,2} \varphi_{2,1} \geq \nu_3^2 (\varphi_{1,1}^2 + \varphi_{2,2}^2) + \nu_4^2 (\varphi_{1,2}^2 + \varphi_{2,1}^2),$$

$$\int_D E_2 \, da \geq k_2^2 \int_D \varphi_e \varphi_e \, da, \quad k_2^2 = k_0^2 \min(\nu_3^2, \nu_4^2);$$

$$E_3 = (\mu + \kappa) (u_1^2 + u_2^2 + w_1^2 + w_2^2) - 2\mu (u_1 w_1 + u_2 w_2),$$

$$[u_1 = \varphi_1 - w_{2,2}, u_2 = \varphi_2 + w_{1,1}, w_1 = \varphi_1 + v_2, w_2 = \varphi_2 - v_1],$$

$$E_3 \geq \nu_5^2 (u_e u_e + w_e w_e) \geq \nu_5^2 u_e u_e;$$

$$2 \int_D E(\underline{u}) \, da = 2h_0 \int_D (h^2 E_1 + E_2 + E_3) \, da \geq h_0 k_3^2 \int_D (v_e v_e + \varphi_e \varphi_e + u_e u_e) \, da$$

$$= h_0 k_3^2 \int_D [v_e v_e + 2\varphi_e \varphi_e + w_{,e} w_{,e} + 2(\varphi_2 w_{,1} - \varphi_1 w_{,2})] \, da ,$$

$$k_3^2 = 2 \min (k_1^2, k_2^2, v_3^2) ;$$

$$2 \int_D E(\underline{u}) \, da \geq h_0 k_4^2 \int_D (v_e v_e + \varphi_e \varphi_e + w_{,e} w_{,e}) \, da \geq h_0 k^2 \|\underline{u}\|^2 .$$

Vista (2), si ottiene la relazione (10).

4. - Si introduce il funzionale quadratico

$$\Psi(\underline{u}) = (\underline{u}, L\underline{u}) - 2(\underline{u}, \underline{F}) ,$$

e si nota con U_0 la chiusura di U in rapporto alla norma

$$|\underline{u}|^2 = [\underline{u}, \underline{u}] = (\underline{u}, L\underline{u}) .$$

Se $\underline{F} \in L_2(D) \times \dots \times L_2(D)$ e se si considera $\Psi(\underline{u})$ definita su U_0 ,
5 volte

si ottiene [4]:

TEOREMA 2. Esiste un vettore unico $\underline{u}_0 \in U_0$ per il quale $\Psi(\underline{u})$ realizza il suo valore minimo. Questo vettore è il limite in media della sequenza degli approssimanti di Ritz.

Allora $\underline{u}_0 \in W_1(D)$ — lo spazio delle funzioni aventi derivate generalizzate (ai sensi delle distribuzioni) del primo ordine, di cui il quadrato è integrabile su D , e, dunque, \underline{u}_0 è la soluzione debole, nel senso di [4], del problema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. C. ERINGEN, Z.A.M.P., 18, 1967, p. 12.
- [2] A. E. GREEN e P. M. NAGHDI, Quart. J. Mech. Appl. Math., 20, 1967, p. 2.
- [3] C. CONSTANDA, C. R. Acad. Sci. Paris, série A, 278, 1974, p. 1267.
- [4] S. G. MIKHLIN, *Il problema del minimo dei funzionali quadratici* (in lingua russa), Mosca-Leningrado, 1952.
- [5] C. CONSTANDA, Letters Appl. Engng. Sci., 2, 1974, p. 329.

Manoscritto pervenuto in redazione il 2 luglio 1977.