Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Sergio Bressan

Condizioni caratteristiche per le componenti dello « stress » nel caso di corpi convessi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 247-274

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__247_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Condizioni caratteristiche per le componenti dello "stress" nel caso di corpi convessi

SERGIO BRESSAN (*)

In passato [1] ho dimostrato che, se si assegna ad arbitrio una qualunque delle caratteristiche di tensione (rappresentandola con una funzione $g(x_1, x_2, x_3)$) di un continuo, in generale non esiste uno « stress » che soddisfa alle equazioni di Cauchy e al contorno ed ho stabilito le condizioni necessarie e sufficienti perchè ciò avvenga.

Allora ho dimostrato che, nel caso che la configurazione sia di equilibrio e coincida con un parallelepipedo rettangolo, le cercate condizioni sulla g consistono in identità integrali (estesesi a sezioni di C con opportuni strati) i cui secondi membri sono espressi in funzione soltanto delle assegnate forze di volume e al contorno.

In questo lavoro non escludo che il continuo possa essere in movimento supponendo tuttavia che le configurazioni assunte dal sistema siano convesse (anche in caso di quiete).

La cosa mi sembra di un certo interesse, oltre che per se stessa, anche (come accennai allora) per la possibilità di determinare la miglior limitazione inferiore (indipendente dalla natura del mate-

---

(*) Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico, Università via Belzoni 7, 35100 Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale Per la Fisica Matematica, per le applicazioni della Matematica alla Fisica e all'Ingegneria del C.N.R.

[1] Vedi : S. BRESSAN « Condizioni caratteristiche per le componenti dello « stress »» Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XLVII 1972, pag. 187.

riale) per il massimo modulo di ognuno degli sforzi in un continuo soggetto ad assegnate forze di massa, d'inerzia e al contorno.

Se si trascura una maggiore difficoltà e complessità di sviluppi analitici si può dire che le condizioni trovate non sono molto diverse da quelle ottenute nel caso particolare in precedenza dimostrato. Si ha, in sostanza, un solo addendo aggiuntivo nelle espressioni trovate che va a zero nel caso del parallelepipedo.

Introduzione

Sia data una terna trirettangola e levogira $0x_1\, x_2\, x_3$ e un sistema continuo in equilibrio nella configurazione C di contorno Σ soggetto alle forze esterne di contatto f^r e alle forze di massa (conglobando in esse le forze d'inerzia nel caso dinamico) F^r assegnate con continuità. Le equazioni indefinite sono:

$$X^{rs}{}_{/s} = F^r \qquad \text{in } C - \Sigma \tag{1}$$

$$X^{rs} n_s = f^r \qquad \text{su } \Sigma \tag{2}$$

ove n_s sono i coseni della normale $\underline{n}$ a Σ diretta verso l'interno di C. Ritengo in tutto C X^{rs} (soddisfacenti (1) e (2)) continue con derivate parziali prime continue e limitate. Dalle (1) e (2) seguono le:

$$\tag{3} \begin{gathered} \int_C F^r\, dC + \int_\Sigma f^r\, d\Sigma = 0 \\ \int_C (x^r F^s - x^s F^r)\, dC + \int_\Sigma (x^r f^s - x^s f^r)\, d\Sigma = 0\,. \end{gathered}$$

Ricordo che la simmetria delle X^{rs} e la loro supposta continuità sul contorno comportano condizioni di compatibilità, lungo gli eventuali spigoli di Σ, per i dati. Nel seguito riterrò sempre soddisfatte dai dati codeste condizioni.

Suppongo C convesso. Detto (x, y, z) un punto di C, chiamo C_z l'intersezione di C col semispazio $x_3 \leq z$. Σ_z sia invece l'intersezione di C col piano $x_3 = z$ e λ_z sia la sua frontiera.

Chiamo poi $\overline{\Sigma}_z$ la frontiera di C_z privata dei punti di Σ_z.

Considero le (1) e (2) con $r = 3$ che riscrivo nel seguente modo:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &X^{31}{}_{/1} + X^{32}{}_{/2} = F^3 - X^{33}{}_{/3} &&\text{su } \Sigma_z\\ &X^{31}n_1 + X^{32}n_2 = f^3 - X^{33}n_3 &&\text{su } \lambda_z\,. \end{aligned}$$

Osservo che, detto $\underline{T}$ il versore della tangente a λ_z, si ha che la normale principale $\underline{N}$ e la normale $\underline{n}$ alla superficie Σ contorno di C sono entrambi ortogonali a $\underline{T}$ e hanno le prime due componenti proporzionali. Si ha (²)

$$(5)\qquad n_\alpha = N_\alpha \sqrt{1 - n_3^2} \qquad (\alpha = 1, 2)$$

Integro la $(4)_1$ su Σ_z e la $(4)_2$ divisa per $\sqrt{1 - n_3^2}$ su λ_z e tengo conto di (5).

Applicando opportunamente il lemma di Green, si può scrivere:

$$(6)\qquad \int_{\Sigma_z} X^{33}{}_{/3}\, d\Sigma + \int_{\lambda_z} \frac{n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, X^{33}\, d\lambda = \int_{\Sigma_z'} F^3\, d\Sigma + \int_{\lambda_z} \frac{f^3}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda\,.$$

La (6) è la condizione di compatibilità, del problema (4) nelle funzioni incognite $X^{31}\, X^{32}$.

Osservo ancora che, posto:

$$(7)\qquad R^s(z) = \int_{\overline{\Sigma}_z} f^s d\Sigma + \int_{C_z} F^s dC \qquad (s = 1, 2, 3)$$

la prima equazione cardinale della Meccanica applicata alla porzione C_z si può scrivere:

$$(8)\qquad \int_{\Sigma_z} X^{s3}\, d\Sigma = R^s(z) \qquad (s = 1, 2, 3)\,.$$

(²) Considero i due piani ortogonali all'asse x_3 delimitanti lo strato contenente C. Ognuno di essi ha in comune con Σ in generale o un punto, o un segmento o una regione piana convessa. Per comodità chiamo «base inferiore» e «base superiore» (nel senso dell'asse x_3) queste intersezioni. Osservo che in tutti i punti di Σ che non appartengono alle basi è: $n_3^2 \neq 1$.

Derivando le (7) e (8) rispetto a z si ottengono le relazioni:

$$\text{(9)} \quad \int_{\Sigma_z} X^{s^3}{}_{/3}\, d\Sigma + \int_{\lambda_z} \frac{n_3}{\sqrt{1-n_3^2}} X^{s^3}\, d\lambda = \int_{\Sigma_z} F^s\, d\Sigma + \int_{\lambda_z} \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}} f^s\, d\lambda \qquad (s = 1, 2, 3)$$

La (9) per $s = 3$ è identica alla (6).

Caso dei due indici uguali.

Chiamo C'_{xz} e C''_{yz} le intersezioni di C_z coi semispazi $x_1 \leq x$, $x_2 \leq y$ rispettivamente, e σ'_{xz} e σ''_{yz} le intersezioni di Σ_z con, rispettivamente, i semispazi suddetti.

Consideriamo le forze di volume agenti su C'_{xz} e quelle superficiali che siano esterne anche per tutto C. Chiamo R^s_{xz} il loro risultante. E' :

$$\text{(10)} \qquad R^s_{xz} = \int_{C'_{xz}} F^s\, dC + \int_{C'_{xz} \cap \Sigma} f^s\, d\Sigma\,.$$

Analogamente per C''_{yz} pongo:

$$\text{(11)} \qquad R^s_{yz} = \int_{C''_{yz}} F^s\, dC + \int_{C''_{yz} \cap \Sigma} f^s\, d\Sigma\,.$$

Per comodità faccio ancora le seguenti posizioni.

Escludendo gli eventuali punti di Σ ove (se esiste) il piano tangente è parallelo all'asse x_1, chiamo $x_1 = a_1(x_2, x_3)$ e $x_1 = a_2(x_2, x_3)$ le due superfici nelle quali si può pensare divisa la Σ stessa. Analoghe definizioni nel senso dell'asse x_2 e dell'asse x_3 portano a scindere Σ (con esclusione ora degli eventuali punti a piano tangente parallelo a x_2 o a x_3 rispettivamente) nelle superfici $x_2 = b_1(x_1, x_3)$ e $x_2 = b_2(x_1, x_3)$ o rispettivamente $x_3 = c_1(x_1, x_2)$ e $x_3 = c_2(x_1, x_2)$.

Conviene poi porre un'analoga divisione per il contorno λ_z di Σ_z. Nel senso dell'asse x_2 (escludendo gli eventuali punti a tangente parallela allo stesso asse) risulta che $x_2 = b_1(x_1, z)$ e $x_2 = b_2(x_1, z)$ rappresentano i due archi in cui si può pensare divisa la λ_z.

Nel senso dell'asse x_1 (escludendo ora i punti con tangente parallela a x_1) si ha invece $x_1 = a_1(x_2, z)$ e $x_1 = a_2(x_2, z)$.

Ricordando le (7), (10) e (11) pongo ora :

$$\psi_1(z) = \int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} R^3_{xz}\, dx - \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} R^1(\zeta)\, d\zeta \tag{12}$$

$$\psi_2(z) = \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} R^3_{yz}\, dy - \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} R^2(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{13}$$

Si può ora enunciare il seguente :

TEOREMA : *C. n. e s. affinchè una funzione* $g(x_1, x_2, x_3)$ *di classe* G *si possa interpretare come la* X^{33} *di uno « stress » soddisfacente le* (1) *e* (2) *è che sulle « basi » relative all'asse* x_3 *sia soddisfatta la condizione* (2) *per* $r = 3$ [ossia :

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, x_3) = f^3 &&\text{sulla « base » inferiore} \\ &g(x_1, x_2, x_3) = -f^3 &&\text{sulla « base » superiore]} \end{aligned} \tag{14}$$

e che inoltre sussistano le seguenti tre identità in z :

$$\int_{\Sigma_z} g(x_1, x_2, x_3)\, d\Sigma = R^3(z)$$

$$\begin{aligned} &\int_{b_1(x_1,z)}^{b_2(x_1,z)} dx_2 \int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int_{a_1(x_2,z)}^{x} g(x_1', x_2, z)\, dx_1' + \\ &\qquad + \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} d\zeta \int_{a_1(x_2,\zeta)}^{a_2(x_2,\zeta)} dx \int_{l_x} g(x_1, x_2, \zeta) \frac{n_3}{\sqrt{1-n_3^2}}\, d\lambda = \psi_1(z) \\ &\int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx_1 \int_{b_1(x_1,z)}^{b_2(x_1,z} dy \int_{b_1(x_1,z)}^{y} g(x_1, x_2', z)\, dx_2' + \\ &\qquad + \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} d\zeta \int_{b_1(x_1,\zeta)}^{b_2(x_1,\zeta)} dy \int_{l_y} g(x_1, x_2, \zeta) \frac{n_3}{\sqrt{1-n_3^2}}\, d\lambda = \psi_2(z) \end{aligned} \tag{15}$$

ove $R^3(z)$ si ottiene da (7) per $s = 3$, $\psi_1(z)$ e $\psi_2(z)$ sono dati da (12) e (13) e 1_x e 1_y sono rispettivamente i segmenti

$$[x, b_1(x, z).z] \longmapsto [x, b_2(x, z), z] \quad \text{e} \quad [a_1(y, z), y, z] \longmapsto [a_2(y, z), y, z] .$$

La condizione è necessaria.

Valgano le (1) e (2) e sia $g = X^{33}$. Le (14) sono certamente soddisfatte in quanto coincidono colle (2) per $r = 3$. Inoltre la $(15)_1$ è senz'altro soddisfatta in quanto conseguenza delle (1) e (2) rappresentante la prima equazione cardinale della Meccanica applicata alla porzione C_z. Dimostro che sono soddisfatte anche le $(15)_2$ e $(15)_3$. Le (1) e (2) per $r = 3$ (intendo che gli indici greci varino fra 1 e 2 solamente) si possono scrivere:

$$(16) \qquad \begin{aligned} & X^{3\alpha}/_\alpha = F^3 - X^{33}/_3 && \text{su } \Sigma \\ & X^{3\alpha} N_\alpha = (f^3 - X^{33}\, n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} && \text{su } \lambda_z \end{aligned}$$

Per comodità chiamo $\bar{1}_x$ e $\bar{1}_y$ le frontiere, rispettivamente, di σ'_{xz} e σ''_{zy} private la prima del segmento 1_x e la seconda di 1_y. Integrando membro a membro la $(16)_1$ su σ'_{xz} e la $(16)_2$ sulla frontiera di σ'_{xz} si ha:

$$\int_{\sigma'_x} X^{3\alpha}/_\alpha \, d\sigma = \int_{\sigma'_{xz}} (F^3 - X^{33}/_3)\, d\sigma$$

$$\int_{\bar{1}_x} X^{3\alpha} N_\alpha \, d\lambda = \int_{\bar{1}_x} (f^3 - X^{33} n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} \, d\lambda$$

Applicando opportunamente il lemma di Green alla prima e sommando membro a membro colla seconda si ha:

$$(17) \qquad \int_{1_x} X^{31}\, d\lambda = \int_{\bar{1}_x} (f^3 - X^{33} n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda + \int_{\sigma'_{xz}} (F^3 - X^{33}/_3)\, d\sigma .$$

Osservando che è :

$$(18)\qquad \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int\limits_{l_x} X^{31}\, d\lambda = \int\limits_{\Sigma_z} X^{31}\, d\Sigma$$

si può scrivere in base a (8) per $s = 1$:

$$(19)\qquad R^1(z) = \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int\limits_{\bar{l}_x} (f^3 - X^{33} n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda + \int\limits_{\sigma'_{xz}} (F^3 - X^{33} l_3)\, d\sigma$$

da cui si ha :

$$(20)\qquad \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int\limits_{\sigma'_{xz}} X^{33} l_3 d\sigma + \int\limits_{\bar{l}_x} X^{33} \frac{n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int\limits_{l_x} \frac{f^3}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda + \int\limits_{\sigma'_{xz}} F^3\, d\sigma - R^1(z)\,.$$

Sostituendo in (20) z con ζ e integrando rispetto a z fra $c_1(x_1, x_2)$ e z si ottiene :

$$(21)\qquad \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \left[\int\limits_{\sigma'_{xz}} X^{33} d\sigma - \int\limits_{\sigma'_{xc_1}} X^{33} d\sigma \right] + \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int\limits_{c_1}^{z} d\zeta \int\limits_{\bar{l}_x} \frac{X^{33} n_3}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda =$$

$$= \int\limits_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int\limits_{c_1(x_1,x_2)}^{z} d\zeta \left[\int\limits_{\bar{l}_x} \frac{f^3}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda + \int\limits_{\sigma'_{xz}} F^3 d\sigma \right] - \int\limits_{c_1(x_1,x_2)}^{z} R^1(\zeta)\, d\zeta$$

ove con σ'_{xc_1} si è indicata la « base inferiore (nel senso dell'asse x_3).

Il secondo addendo del primo integrale a primo membro della (21) si può esprimere mediante f^3 in base a (2) per $r = 3$. La (21) diventa:

$$(22)\qquad \int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int_{\sigma'_{xz}} X^{33} d\sigma + \int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} dx \int_{c_1}^{z} d\zeta \int_{1_x} X^{33} \frac{n_3}{\sqrt{1-n_3^2}}\, d\lambda =$$

$$= \int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2;z)} R^3_{xz} dx - \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} R^1(\zeta)\, d\zeta$$

che è identica alla $(15)_2$.

Analogamente integrando la $(16)_1$ su σ''_{yz} e la $(16)_2$ sulla frontiera di σ''_{yz} e procedendo in modo analogo si ottiene:

$$(23)\qquad \int_{b_1(x_1,z)}^{b_2(x_1,z)} dy \int_{\sigma''_{yz}} X^{33} d\sigma + \int_{b_1(x_1,z)}^{b_2(x_1,z)} dy \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} d\zeta \int_{1_y} \frac{X^{33} n_3}{\sqrt{1-n_3^2}}\, d\lambda =$$

$$= \int_{b_1(x_1,z)}^{b_2(x_1,z)} R^3_{yz} dy - \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} R^2(\zeta)\, d\zeta$$

che è identica alla $(33)_3$.

La condizione è sufficiente.

Intendo $X^{33} = g$ e suppongo valide le (14) e (15). Per (14) le (2) per $r = 3$ sulle « basi » sono certamente soddisfatte. Scrivo le (1) e (2) per $r = 3$:

$$(24)\qquad \begin{aligned} X^{3\alpha}{}_{/\alpha} &= F^3 - g_{/3} && \text{su } \Sigma_z \\ X^{3\alpha} N_\alpha &= (f^3 - g n_3) \frac{1}{\sqrt{1-n_3^2}} && \text{su } \lambda_z \end{aligned}$$

Integro la $(24)_1$ su Σ_z e la $(24)_2$ su λ_z, applico il lemma di Green e ottengo:

$$\int_{\Sigma_z} (F^3 - g/_3)\, d\Sigma + \int_{\lambda_z} (f^3 - g n_3) \frac{d\lambda}{\sqrt{1 - n_3^2}} = 0 \tag{25}$$

che è la nota condizione di compatibilità del problema (24) nelle funzioni incognite X^{31} e X^{32}. In quanto g soddisfa la $(15)_1$ la (25) è certamente soddisfatta. Basta infatti derivare la $(15)_1$ rispetto a z come ho accennato più sopra.

Dimostro ora che per $(15)_2$ e $(15)_3$, ogni soluzione X^{31}, X^{32} del problema (24) soddisfa, per ogni z, le equazioni cardinali su C_z espresse da (8) per $s = 1$ e $s = 2$ rispettivamente. Per quanto si è detto più sopra la $(15)_2$ equivale a (21); derivando quest'ultima rispetto a z si ottiene la (20) o anche la (19). La (19) equivale alla (8) per $s = 1$.

Analogamente da $(15)_3$ segue la (8) per $s = 2$.

Considerando le (1) e (2) per $r = 1, 2$ che riscrivo nel seguente modo:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} X^{21}/_1 + X^{22}/_2 = F^2 - X^{23}/_3 \\[2ex] X^{11}/_1 + X^{12}/_2 = F^1 - X^{13}/_3 \end{array}\right\} & \text{su } \Sigma_z \\[4ex] \left.\begin{array}{l} X^{21}N_1 + X^{22}N_2 = (f^2 - X^{23}n_3) \dfrac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} \\[3ex] X^{11}N_1 + X^{12}N_2 = (f_1 - X^{13}n_3) \dfrac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} \end{array}\right\} & \text{su } \lambda_z \end{array}\right. \tag{26}$$

Considero il problema $(26)_{1,3}$ coll'aggiunta dalla $(26)_4$ sugli eventuali tratti di λ_z paralleli all'asse x_1, nelle funzioni incognite X^{21} e $X^{\cdot 2}$. La condizione di compatibilità è analoga alla (25), ossia:

$$\int_{\Sigma_z} (F^2 - X^{23}/_3) d\Sigma + \int_{\lambda_z} (f^2 - X^{23}n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda = 0$$

Essa è la (9) per $s = 2$ che appunto segue da (8) per $s = 2$.

La $(26)_2$ dà la X^{11}; Infatti si può porre:

$$X^{11} = \int_{a_1(x_2,z)}^{x_1} (F^1 - X^{13}{}_{/3} - X^{12}{}_{/2})dx_1' + \varnothing(x_2, z) \tag{27}$$

ove le X^{13} e X^{12} sono da ritenersi note in quanto appartenenti a soluzioni dei problemi (24) e (26) rispettivamente.

Lungo il tratto di contorno $x_1 = a_1(x_2, z)$ la $(26)_4$ determina la $\varnothing(x_2, z)$. Infatti ivi si ha:

$$\varnothing(x_2, z)N_1 = (f^1 - X^{13}n_3)\frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} - X^{12}N_2 .$$

Sul tratto $x_1 = a_2(x_2, z)$ deve risultare:

$$X^{11}N_1 = (f^1 - X^{13}n_3)\frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} - X^{12}N_2 . \tag{28}$$

Per comodità pongo:

$$k(x_2, z) = \frac{1}{N_1}(f^1 - X^{13}n_3)\frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}} - X^{12}N_2$$

per cui la (28) si scrive:

$$X^{11} = k(x_2, z) \qquad \big(\text{lungo } x_1 = a_2(x_2, z)\big) \tag{28$'$}$$

Fisso una delle sestuple X^{rs} tali che $X^{33} = g$ e soddisfacenti le (1) in C, le (2) per $r = 2,3$ su Σ, la (2) per $r = 1$ nei punti (regolari) di Σ ove è $N_1 > 0$. Detta $\bar{X}^{rs}$ una qualsiasi altra soluzione dello stesso problema (ossia soddisfacente le (1) e le (2) senza la (28)), pongo:

$$\bar{X}^{rs} = X^{rs} + \Delta X^{rs} . \tag{29}$$

Dico che, date le X^{rs}, mediante la (29) si ottengono le altre soluzioni $\bar{X}^{rs}$ se le ΔX^{31}, ΔX^{21}, ΔX^{32} e ΔX^{22} soddisfano le:

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta X^{31}N_1 + \Delta X^{32}N_2 = 0 & \text{su } \lambda_z \\ \Delta X^{13} = 0 & \text{(sulle basi relative all'asse } x_3\text{)} \\ \int_{l_x} \Delta X^{31}\, d\lambda = 0 & \end{array}\right.$$

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta X^{21}N_1 + \Delta X^{22}N_2 = 0 & \text{su } \lambda_z \\ \Delta X^{12} = 0 & \text{(sulle « basi » secondo l'asse } x_2\text{)} \\ \int_{l_x} \Delta X^{21}\, d\lambda = 0 & \end{array}\right.$$

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta X^{32} = -\int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \frac{\partial X^{31}}{\partial x_1}\, dx_2' \\ \Delta X^{22} = -\int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \frac{\partial X^{21}}{\partial x_1}\, dx_2' \end{array}\right.$$

e la $\bar{X}^{11}$ si costruisce a partire dalle $\bar{X}^{13}$ e $\bar{X}^{12}$ in modo analogo a (27).

La necessità delle condizioni $(30)_{1,2}$ e $(31)_{1,2}$ segue subito da $(16)_2$ e $(26)_{3,4}$. Per la $(30)_3$ (analogamente si procede per la $(31)_3$) basta integrare la $(24)_1$ su σ_{xz}' e la $(24)_2$ sul contorno. Applicando opportunamente il lemma di Green si vede che ogni X^{31} facente parte di una soluzione del nostro problema deve soddisfare la:

$$\int_{1_x} X^{31} d\lambda = \int_{\bar{1}_x} (f^3 - g n_3) \frac{1}{\sqrt{1 - n_3^2}}\, d\lambda + \int_{\sigma_{xz}'} (F^3 - g_{/3})\, d\sigma$$

da cui evidentemente la $(30)_3$.

Per dimostrare la necessità della $(32)_1$ consideriamo la $(24)_1$. Si può scrivere:

$$X^{32} = \int_{b_1(x_1,z)}^{x_2} \left(F^3 - g_{/3} - \frac{X^{31}}{x_1} \right) dx_2' + \mu \, (x_1 \, , z)$$

per cui deve essere:

$$\Delta X^{32} = - \int_{b_1(x_1,z)}^{x_2} \frac{\partial \Delta X^{31}}{\partial x_1} \, dx_2'$$

Analogamente si dimostra la $(32)_2$.

Mediante una verifica diretta è poi facile accertare la sufficinza delle condizioni (30), (31) e (32).

Affinchè la $\bar{X}^{11}$ soddisfi la (28) o meglio la (28′) occorre che ΔX^{13} e ΔX^{12} soddisfino la:

$$\int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} \left(\frac{\partial \Delta^{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Delta X^{12}}{\partial x_2} \right) dx_1 = \Delta X^{11} = X^{11} - k \, (x_2 \, , z) \qquad \text{[sulla } x_1 = a_2 \, (x_2 \, , z)] \tag{33}$$

La (33) segue subito da (28′) una volta sostituite le X^{rs} con le $\bar{X}^{rs}$ e tenuto conto di (27) e (29).

Osservo che è:

$$\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} \Delta X^{11} \, dx_2 = 0 \qquad \text{[sulla } x_1 = a_2(x_2 \, , x_3) \text{ per ogni } x_3] \tag{34}$$

Infatti sia la X^{11} data da (27) sia una qualunque $\bar{X}^{11}$ definita come si è detto, soddisfano a quanto dirò.

Considero la (27) sulla superficie $x_1 = a_2(x_2, x_3)$ e integro ambo i membri in dx_2 fra $b_1(x_1, x_3)$ e $b_2(x_1, x_3)$ e poi in dx_3 fra $c_1(x_1, x_2)$ e z. Si ha:

$$(35)\qquad \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} dx_3 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} X^{11}{}_{(x_1=a_1)} dx_2 = \int_{C_z} F^1 dC - \int_{\Sigma_z} X^{13} d\Sigma +$$

$$+ \int_{\Sigma_{c_1}} X^{13} d\Sigma - \int_{\Sigma^{(z)}_{b_2}} X^{12} d\Sigma + \int_{\Sigma^{(z)}_{b_1}} X^{12} d\Sigma + \int_{c_1(x_1,x_2)}^{z} dx_3 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} \varnothing\,(x_2, x_3) dx_2$$

Per la (8) con $s = 1$ e ricordando le condizioni al contorno si vede che il secondo membro dipende solo dai dati. Essendo ciò valido per ogni z risulta che, sulla superficie $x_1 = a_2(x_2, x_3)$, è:

$$\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} (\overline{X}^{11} - X^{11})\, dx_2 = 0 \qquad [\text{sulla } x_1 = a_2 \text{ per ogni } x_3]$$

ossia la (34) c. d. d..

Pongo ora:

$$(36)\qquad \begin{aligned} \varphi\,(x_2) &= \frac{1}{c_2 - c_1} \int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} \Delta X^{11} dx_3 \\ \psi(x_2, x_3) &= \Delta X^{11} - (\varphi x_2)\,. \end{aligned} \qquad (\text{sulla } x_1 = a_1)$$

Invece del problema (33) colle condizioni (30) e (31) posso limitarmi a considerare separatamente il problema:

$$(37)\qquad \int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} \frac{\partial \Delta X^{12}}{\partial x_2}\, dx_1 = \varphi(x_2) \qquad \big(\text{sulla } x_1 = a_1(x_2, z)\big)$$

nella sola funzione incognita ΔX^{12} colle condizioni (31) e il problema:

$$(38)\qquad \int_{a_1(x_2,z)}^{a_2(x_2,z)} \frac{\partial \Delta X^{13}}{\partial x_3}\, dx_1 = \psi(x_2, z) \qquad \big[\text{sulla } x_1 = a_2(x_2, z)\big]$$

nella sola funzione incognita ΔX^{13} colle condizioni (30). Non si ritiene certo che la ΔX^{12} e ΔX^{13} soluzioni dei problemi (37) e (38) rispettivamente, esauriscano il problema (33). Ci basta far vedere l'esistenza di qualche soluzione.

Per (32) le (30) e (31) si scrivono anche:

$$(30') \quad \begin{cases} \Delta X^{31} N_1 - N_2 \displaystyle\int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \frac{\partial \Delta X^{31}}{\partial x_1}\, dx_2' = 0 & (\text{sulle } x_1 = a_1 \text{ e } x_1 = a_2) \\ \Delta X^{31} = 0 & (\text{sulle «basi» secondo l'asse } x_3) \\ \displaystyle\int_{1_x} \Delta X^{31}\, d\lambda = 0 & \end{cases}$$

$$(31') \quad \begin{cases} \Delta^{21} N_1 - N_2 \displaystyle\int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \frac{\partial \Delta X^{21}}{\partial x_1}\, dx_2' = 0 & (\text{sulle } x_1 = a_1 \text{ e } x_1 = a_2) \\ \Delta X^{12} = 0 & (\text{sulle «basi» secondo l'asse } x_2) \\ \displaystyle\int_{1_x} \Delta X^{21}\, d\lambda = 0\,. & \end{cases}$$

Per mostrare l'esistenza di funzioni ΔX^{21} e ΔX^{31} soddisfacenti a tutte le condizioni che ci interessano conviene, a questo punto, considerare la funzione $t(x_1, x_2, x_3)$ tale che:

$$(39) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} t(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 = 1 & \text{per ogni } (x_2, x_3) \\ \left.\begin{array}{l} t(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_1} = 0 \end{array}\right\} (\text{sulle } x_1 = a_1 \text{ e } x_1 = a_2) & \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_2} = \dfrac{\partial t}{\partial x_3} = 0 & (\text{sulla } x_1 = a_2) \end{cases}$$

Pongo:

$$\Delta X^{21} = t \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \varphi(x_2')\, dx_2' \tag{40}$$

La (40) per (39), (36) e (34) verifica la (37) e le $(31')_{1,2}$.
Analogamente pongo:

$$\Delta X^{31} = t \int_{c_1(x_1,x_2)}^{x_3} \psi\,(x_2\,, x_3')\, dx_3' \,. \tag{41}$$

La (41) per (39), (36) e (34) soddisfa la (38) e le (30').

Per completare la dimostrazione bisogna dunque far vedere che esistono delle ΔX^{21} date da (40) soddisfacenti anche la $(31')_3$. Evidentemente condizione *n.* e *s.* affinchè ciò avvenga è che sia:

$$\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} dx_2 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \varphi(x_2')\, dx_2' = 0\,. \tag{42}$$

Ricordiamo che è:

$$\Delta X^{11} = \psi + \varphi\,.$$

Se si integrano ambo i membri della precedente fra $c_1(x_1\,, x_2)$ e $c_2(x_1\,, x_2)$ si ottiene:

$$\int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} \Delta X^{11} dx_3 = \int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} \varphi dx_3\,. \tag{43}$$

Integrando ambo i membri di (43) fra $b_1(x_1\,, x_3)$ e x_2 e poi ancora fra $b_1(x_1\,, x_3)$ e $b_2(x_1\,, x_3)$ si arriva facilmente a constatare che la (42) equivalente alla seguente condizione:

$$\int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} dx_3 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} dx_2 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \Delta X^{11}\, dx_2' = 0\,. \tag{44}$$

Ricordo che la ΔX^{11} che cerchiamo deve soddisfare la :

$$\Delta X^{11} = k(x_2, x_3) - X^{11} \qquad \text{(sulla } x_1 = a_2)$$

per cui, tenendo conto di (27), dopo semplici calcoli si ottiene la seguente condizione per la X^{12} :

$$(44') \qquad \int_C X^{12} dC = \int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} dx_3 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} dx_2 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} dx_2' \left[\int_{a_1}^{a_2} F^1 dx_1 - \right.$$

$$\left. - \varnothing(x_2, x_3) - k(k_2, x_3) \right] - \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} dx_2 \int_{b_1}^{x_2} dx_2' \int_{a_1}^{a_2} \left(X^{13}_{x_3=c_2} - X^{13}_{x_3=c_1} \right) dx_1$$

ove il secondo membro dipende soltanto dai dati del problema.

L'integrale generale della $(26)_1$ può porsi nella forma :

$$(45) \qquad \begin{cases} X^{21} = \displaystyle\int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} (F^2 - X^{23}{}_{/3})\, dx_1' + \frac{\partial \chi(x_1, x_2, z)}{\partial x_2} \\ X^{22} = - \dfrac{\partial \chi(x_1, x_2, z)}{\partial x_1} \end{cases}$$

ove χ è una funzione di classe c^1 su λ_z e di classe c^2 su Σ_z.

Le condizioni al contorno $(26)_3$ comportano la condizione di compatibilità (27) certamente soddisfatta dai dati in base a (8) per $s = 2$.

Integriamo la (45) su tutto C. Si ha :

$$(46) \quad \int_C X^{21} dC = \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} F^2 dx_1' - \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} \left(X^{23}_{x_3=c_2} - \right.$$

$$\left. - X^{23}_{x_3=c_1} \right) dx_1' + \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} (\chi_{x_2=b_2} - \chi_{x_2=b_1})\, dx_1$$

Tenendo conto della (44′), da (46) si ricava l'ulteriore condizione per la χ:

$$\int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} (\chi_{x_2=b_2} - \chi_{x_2=b_1})\, dx_1 = L \tag{47}$$

ove L è uno scalare che dipende dai soli dati. Esso è costituito dal secondo membro della (44′) a cui vanno tolti i primi due addendi del secondo membro della (46).

Basta dunque che esistano delle funzioni χ soddisfacenti la (47) perchè la dimostrazione sia completata. Infatti la X^{21} data da $(45)_1$ in corrispondenza a detta scelta di χ soddisfa la (44′). Ciò vuol dire che è possibile soddisfare la (42) e in definitiva è possibile risolvere il problema (37) colle condizioni (31). Le soluzioni di questo problema assieme a quelle del problema (38) colle condizioni (30) sono, come si è detto, contenute nella classe delle soluzioni del problema (33) colle condizioni (30) e (31).

Pongo:

$$\nu\,(x_1, x_3) = \tau(x_1, x_3) + N_1 \int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} (X^{23}{}_{/3} - F^2)\, dx_1' \tag{48}$$

ove con $\tau(x_1, x_3)$ indico per brevità il secondo membro della $(26)_3$.

In base a (45) e (48) la $(26)_3$ stessa si può scrivere:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_2} N_1 - \frac{\partial \chi}{\partial x_1} N_2 = \nu(x_1, x_3) \qquad (\text{sulle } x_2 = b_1 \text{ e } x_2 = b_2) \tag{49}$$

Fra le soluzioni della (49) ci sono ad esempio le:

$$\left\{\begin{aligned} \chi[x_1, b_1(x_1, x_3), x_3] &= -\frac{1}{N_2} \int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} \nu\,(x_1, x_3)\, dx_1' - M(x_3) \\ \chi[x_1, b_2(x_1, x_3), x_3] &= -\frac{1}{N_2} \int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} \nu(x_1, x_3)\, dx_1' - N(x_3) \end{aligned}\right. \tag{50}$$

ove M e N sono funzioni della sola x_3.

Per (50) la (47) si scrive:

$$\int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} [N(x_3) + M(x_3)]\, dx_1 = L + \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \left\{ \frac{1}{N_2} \cdot \left[\int_{a_1}^{x_1} \left(v_{x_2=b_2} - v_{x_2=b_1} \right) dx_1' \right] \right\} \tag{51}$$

Data l'arbitrarietà delle funzioni $M(x_3)$ e $N(x_3)$ è certamente possibile soddisfare la (51). Allora la caratteristica di tensione X^{12}, data da $(45)_1$ con la χ soddisfacente la (47), soddisfa la (44′).

È quindi solubile, per quanto si è detto, il problema (33) colle condizioni (30) e (31). Allora la $\bar{X}^{11}$ costruita in modo analogo a (27) colle $\bar{X}^{31}$ e $\bar{X}^{13}$ soddisfa anche la condizione (28′) ossia le $\bar{X}^{rs}$ costituiscono una soluzione del problema (1) e (2) c. d. d..

Caso dei due indici distinti.

Per fissare le idee, supponiamo di voler identificare la funzione $g(x_1, x_2, x_3)$ con la caratteristica di tensione X^{12}.

In modo analogo a (7) pongo:

$$\begin{aligned} R^s(x) &= \int_{\bar{\Sigma}_x} f^s d\Sigma + \int_{C_x} F^s\, dC \\ R^s(y) &= \int_{\bar{\Sigma}_y} f^s\, d\Sigma + \int_{C_y} F^s\, dC \end{aligned} \tag{52}$$

ove è ormai ovvio il significato dei simboli.

Si può ormai enunciare il seguente:

TEOREMA: *C. n. e s. affinché una funzione g* (x_1, x_2, x_3) *di classe G si possa identificare con la* X^{12} *di uno « stress » soddisfacente le* (1) *e* (2), *è che siano soddisfatte le condizioni* (2) *per* $r = 1$ *e* $r = 2$ *sulle* (*eventuali*) *« basi » relative agli assi* x_1 *e* x_2 *rispettivamente* [ossia:

$$\begin{cases} g(x_1, b_1, x_3) = f^1 & g(x_1, b_2, x_3) = -f^1 \\ g(a_1, x_2, x_3) = f^2 & g(a_2, x_2, x_3) = -f^2 \end{cases} \tag{53}$$]

e inoltre sussistano le seguenti due identità in x e y rispettivamente:

$$\int_{\Sigma_z} g(x\,,x_2\,,x_3)\,d\Sigma = R^2(x) \tag{54}$$

$$\int_{\Sigma_y} g(x_1\,,y\,,x_3)\,d\Sigma = R^1(y) \tag{55}$$

ove $R^2(x)$ e $R^1(y)$ si ottengono rispettivamente da $(52)_1$ per $s = 2$ e $(52)_2$ per $s = 1$.

Necessità delle condizioni.

Supponiamo valide la (1) e (2) e sia $g = X^{12}$. Sulle « basi » relative all'asse x_1 le (2) con $r = 1$ danno le prime (53). Le seconde (53) sono date da (2) con $r = 2$ sulle « basi » relative all'asse x_2.

Anche le (54) e (55) sono certamente soddisfatte come conseguenza delle (1) e (2) in quanto rappresentano la prima equazione cardinale della Meccanica applicata una volta alla porzione Cx e l'altra alla porzione Cy.

Sufficienza delle condizioni.

Supponiamo valide le (53), (54) e (55) e intendiamo $X^{12} = g$.

Considero la sezione Σ_x di contorno λ_x (ossia Σ_x è l'intersezione di C col piano $x_1 = x$ e λ_x è l'intersezione di Σ col suddetto piano).

Considero, nelle funzioni incognite X^{22} e X^{23}, il seguente problema (3):

---

(3) Considero il versore T tangente a λ_x e osservo che il versore della normale principale N a λ_x e quello della normale n alla superficie Σ sono entrambi ortogonali a T e hanno le seconde due componenti proporzionali. Si ha:

$$n_\alpha = N_\alpha \sqrt{1 - n^2} \qquad (\alpha = 2,\,3)$$

Osservo che in tutti punti di Σ che non appartengono alle « basi » (nel senso dell'asse x_1) è: $n_1^2 \neq 1$.

$$(56)\quad \begin{cases} X^{22}{}_{/2} + X^{23}{}_{/3} = F^2 - g_{/1} & (su\ \Sigma_x) \\[2mm] X^{22}N_2 + X^{22}N_3 = (f^2 - gn_1)\,\dfrac{1}{\sqrt{1-n_1^2}} & (su\ \lambda_x) \\[2mm] X^{32}N_2 = \dfrac{f^3}{\sqrt{1-n_1^2}} & \text{(sugli eventuali tratti di } \lambda_x \text{ paralleli all'asse } x_3) \end{cases}$$

Analogamente sulla sezione Σ_y di contorno λ_y, considero il seguente problema nelle funzioni incognite X^{11} *e* X^{13}:

$$(57)\quad \begin{cases} X^{11}{}_{/1} + X^{13}{}_{/3} = F^1 - g_{/2} & (su\ \Sigma_y) \\[2mm] X^{11}N_1 + X^{13}N_3 = (f^1 - gn_2)\,\dfrac{1}{\sqrt{1-n_2^2}} & (su\ \lambda_y) \\[2mm] X^{31}N_1 = f^3\,\dfrac{1}{\sqrt{1-n_2^2}} & \text{(sugli eventuali tratti di } \lambda_y \text{ paralleli } a\ x_3). \end{cases}$$

Integro ora membro a membro la $(56)_1$ su Σ_x e la $(56)_2$ su λ_x e applico il lemma di Green. Ottengo:

$$(58)\qquad \int_{\Sigma_x} (F^2 - g/_1)\, d\Sigma + \int_{\lambda_x} (f^2 - gn_1)\,\frac{1}{\sqrt{1-n_1^2}}\, d\lambda = 0$$

Analogamente da $(57)_{1,2}$ si ottiene:

$$(59)\qquad \int_{\Sigma_y} (F^1 - g/_2)\, d\Sigma + \int_{\lambda_y} (f^1 - gn_2)\,\frac{1}{\sqrt{1-n_2^2}}\, d\lambda = 0$$

Le (58) e (59) sono le condizioni di compatibilità dei problemi (56) e (57) rispettivamente. Per vedere se è soddisfatta ad esempio la (58) basta derivare la (54) rispetto ad x. Tenendo conto di $(52)_1$ si ha facilmente la (58). Analogamente derivando la (55) rispetto ad y, per $(52)_2$ si ha la (59).

La (1) per $r = 3$ si può scrivere:

$$(60)\qquad X^{33}{}_{/3} = F^3 - X^{31}{}_{/1} - X^{32}{}_{/2}$$

Ritenendo note le funzioni a secondo membro [X^{31} e X^{32} sono soluzioni dei problemi (56) e (57)] la (60) determina la X^{33}.

È infatti :

$$X^{33} = \int_{c_1(x_1,x_2)}^{x_3} \left[F^3 - X^{31}{}_{/1} - X^{32}{}_{/2} \right] dx_3' + \varnothing' (x_1 , x^2) \tag{61}$$

La (2) per $r = 3$ considerata sulla porzione di contorno $x_3 = c_1 (x_1 , x_2)$ determina la $\varnothing'$. Infatti ivi si ha :

$$X^{33}_{(x_3=c_1)} n_3 = \varnothing' (x_1 , x_2) \, n_3 = f^3 - X^{31} n_1 - X^{32} n^2 \tag{62}$$

Resta ormai da vedere se esistono X^{33} definite da (61) che soddisfano la (2) per $r = 3$ anche sulla porzione di conto $x_3 = c_2 (x_1 , x_2)$. Posto :

$$k(x_1 , x_2) = \frac{1}{n_3} (f^3 - X^{31} n_1 - X^{32} n_2)$$

la condizione cercata è :

$$X^{33} = k(x_1 , x_2) \qquad (su \; x_3 = c_2) \tag{63}$$

Analogamente al caso del teorema precedentemente dimostrato, conviene, a questo punto, determinare su sei funzioni $\varDelta X^{rs}$ le condizioni necessarie e sufficienti affinchè, posto :

$$\bar{X}^{rs} = X^{rs} + \varDelta X^{rs} \tag{64}$$

le $\bar{X}^{rs}$ soddisfino, al pari delle X^{rs}, le :

$$\begin{aligned} &\bar{X}^{12} \equiv g \text{ e le (1) in } C, \text{ le (2) per } r = 2{,}3 \text{ su } \varSigma \text{ e la (2)} \\ &\text{per } r = 1 \text{ nei punti (regolari) di } \varSigma \text{ ove è } N_1 > 0 \end{aligned} \tag{65}$$

Si dimostra che occorre e basta che le ΔX^{31} e ΔX^{32} soddisfino le:

$$
(66)\quad \begin{cases} \Delta X^{11} N_1 + \Delta X^{13} N_3 = 0 \qquad (\text{su } \lambda_y) \\ \Delta X^{31} = 0 \qquad (\text{sulle eventuali «basi» relative all'asse } x_1) \\ \displaystyle\int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} \Delta X^{31}\, dx_1 = 0 \end{cases}
$$

$$
(67)\quad \begin{cases} \Delta X^{22} N_2 + \Delta X^{23} N_3 = 0 \qquad (\text{su } \lambda_x) \\ \Delta X^{32} = 0 \qquad (\text{sulle eventuali basi relative all'asse } x_2) \\ \displaystyle\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b^2(x_1,x_3)} \Delta X^{32}\, dx_2 = 0 \end{cases}
$$

e che la $\bar{X}^{33}$ si costruisca a partire da $\bar{X}^{31}$ e $\bar{X}^{32}$ in modo analogo a (61) e le ΔX^{11} *e* ΔX^{22} siano date da:

$$
(68)\quad \begin{aligned} \Delta X^{11} &= -\int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} \frac{\partial \Delta X^{31}}{\partial x_3}\, dx_1' \\ \Delta X^{22} &= -\int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \frac{\partial \Delta X^{32}}{\partial x_3}\, dx_2' \end{aligned}
$$

La dimostrazione è analoga a quella scritta nel caso dei due indici uguali e per brevità la tralascio.

In base a (68) le (66) e (67) si scrivono:

$$
(66')\quad \begin{cases} -N_1 \displaystyle\int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} \frac{\partial \Delta X^{31}}{\partial x_3}\, dx_1' + \Delta X^{13} N_3 = 0 \ \ (\text{su } x_2 = b_1 \text{ e } x_2 = b_2) \\ \Delta X^{31} = 0 \qquad (\text{sulle eventuali basi relative alall'asse } x_1) \\ \displaystyle\int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} \Delta X^{31}\, dx_1 = 0 \end{cases}
$$

$$- N_2 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \frac{\partial \varDelta X^{32}}{\partial x_3} \, dx_2' + \varDelta X^{23} N_3 = 0 \qquad (\text{su } x_1 = a_1 \text{ e } x_1 = a_2)$$

(67′) $\qquad \varDelta X^{32} = 0 \qquad$ (sulle eventuali « basi » relative all'asse x^2)

$$\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} \varDelta X^{32} \, dx_2 = 0$$

Affinchè la $\bar{X}^{33}$ soddisfi la (63) occorre che $\varDelta X^{31}$ e $\varDelta X^{32}$ soddisfino la :

$$\int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} \left[\frac{\partial \varDelta X^{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta X^{32}}{\partial x_2} \right] dx_3 = \varDelta X^{33} = k(x_1, x_3) - X^{33} \qquad [\text{su } x_3 = c_2(x_1, x_2)]. \tag{69}$$

come si riconosce sostituendo nella (63) le X^{rs} colle $\bar{X}^{rs}$, tenendo conto di (61) e osservando che si cerca di determinare una $\varDelta X^{33}$ che soddisfi la :

$$\varDelta X^{33} = k(x_1, x_3) - X^{33} \qquad (\text{sulla } x_3 = c_2) \tag{70}$$

Pongo :

$$\varphi'(x_1) = \frac{1}{b_2 - b_1} \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} \varDelta X^{33} \, dx_2$$

(71)

$$\psi'(x_1, x_2) = \varDelta X^{33} - \varphi'(x_1)$$

Analogamente a quanto si è fatto nel caso dei due indici uguali, considero, invece del problema (69), (66) e (67), il problema :

$$\int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} \frac{\partial \varDelta X^{31}}{\partial x_1} \, dx_3 = \varphi'(x_1) \qquad (\text{sulla } x_3 = c_2) \tag{72}$$

nella sola funzione incognita ΔX^{31} colle condizioni (66), e il problema analogo :

$$\int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} \frac{\partial \Delta X^{32}}{\partial x_2}\, dx_3 = \psi'\,(x_1\,,\,x_2) \qquad \text{(sulla } x_3 = c_2) \tag{73}$$

nella sola funzione incognità ΔX^{32} colle condizioni (67).

Considero, analogamente a quanto fatto nel caso precedente, una funzione $t(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3)$ soddisfacente le seguenti proprietà :

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{c_1(x_1,x_2)}^{c_2(x_1,x_2)} t\, dx_3 = 1 & \text{(per ogni } x_1\,,\,x_2) \\ \left.\begin{array}{l} t(x_1\,,\,x_2\,,\,x_3) = 0 \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_3} = 0 \end{array}\right\} & \text{(sulle } x_3 = c_1 \text{ e } x_3 = c_2) \\ \dfrac{\partial t}{\partial x_1} = \dfrac{\partial t}{\partial x_2} & = 0 \text{ (sulla } x_3 = c_2) \end{array}\right. \tag{74}$$

Pongo :

$$\Delta X^{31} = t \int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} \varphi'\,(x_1')\, dx_1' \tag{75}$$

La ΔX^{31} data da (75) per (74) e $(71)_1$ verifica le (72) e le $(66')_{1,2}$. Non sarà in generale soddisfatta la $(66')_3$.

È facile verificare che, perchè valga la $(66')_3$, occorre e basta che sia :

$$\int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} dx_1 \int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} \varphi'\,(x_1')\, dx_1' = 0 \tag{76}$$

Analogamente per il problema (73), (67′) si ottiene la condizione di compatibilità :

$$\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} dx_2 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} \psi'\,(x_1\,,\,x_2')\, dx_2' = 0 \tag{77}$$

Ricordo che è:

$$\Delta X^{33} = \varphi'(x_1) + \psi'(x_1, x_2) \tag{78}$$

Integro ambo i membri di (78) fra a_1 e a_2 in dx_1. Poi fra b_1 e x_2 in dx'_2 e poi ancora fra b_1 e b_2 in dx_2.

La condizione (77) porta allora alla seguente condizione:

$$\int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} dx_2 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{x_2} dx'_2 \int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} \Delta X^{33}\, dx_1 = 0 \tag{79}$$

Analogamente, integro ambi i membri di (78) fra b_1 e b_2 in dx_2 Poi integro fra a_1 e x_1 in dx'_1 e poi ancora fra a_1 e a_2 in dx_1.

La (76) comporta la condizione:

$$\int_{a_1(x_2,x_3)}^{a_2(x_2,x_3)} dx_1 \int_{a_1(x_2,x_3)}^{x_1} dx'_1 \int_{b_1(x_1,x_3)}^{b_2(x_1,x_3)} \Delta X^{33}\, dx_2 = 0 \tag{80}$$

Esprimendo X^{33} nelle (79) e (80) mediante (70) e tenendo conto di (61) e (62), dopo facili calcoli si vede che le (79) e (80) possono scriversi:

$$\int_C X^{32}\, dC = \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{b_1}^{x_2} \left[\int_{c_1}^{c_2} F^3\, dx_3 + \Phi'(x_1, x_2) \right] dx'_2 - \\ - \int_{b_1}^{b_2} dx_2 \int_{b_1}^{x_2} \left[\int_{a_1}^{a_2} k\, dx_1 + \int_{c_1}^{c_2} \left(X^{31}_{x_1=a_2} - X^{31}_{x_1=a_1} \right) dx_3 \right] dx'_2 \tag{81}$$

$$\int_C X^{31}\, dC = \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} dx'_1 \int_{b_1}^{b_2} \left[\int_{c_1}^{c_2} F^3\, dx_3 + \Phi'(x_1, x_2) \right] dx_2 - \\ - \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{a_1}^{x_1} dx'_1 \left[\int_{b_1}^{b_2} k\, dx_2 + \int_{c_1}^{c_2} \left(X^{31}_{x_2=b_2} - X^{31}_{x_2=b_1} \right) dx_3 \right] \tag{82}$$

Si osservi che i secondi membri delle (81) e (82) dipendono solo dai dati.

Seguendo un procedimento analogo a quello usato nel caso dei due indici uguali, scrivo l'integrale generale della $(57)_1$.

Si può porre:

$$(83) \qquad \begin{aligned} X^{31} &= \int_{c_1(x_1,x_2)}^{x_3} (F^1 - g_{/2})\, dx_3' + \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x_1} \\ X^{11} &= -\frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

L'integrale generale della $(56)_1$ si scrive, analogamente:

$$(84) \qquad \begin{aligned} X^{23} &= \int_{c_1(x_1,x_2)}^{x^3} (F^2 - X^{21}{}_{/1})\, dx_3' + \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial x_2} \\ X^{22} &= -\frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial x_3} \end{aligned}$$

Nelle (83) e (84) $\chi\,(1)$ e $\chi\,(2)$ sono funzioni di x_1 e x_2 solamente.

Integrando le $(83)_1$ e $(84)_1$ su tutto C e tenendo conto di (81) e (82) si ottengono dopo facili calcoli le seguenti condizioni per la $\chi\,(1)$ e la $\chi\,(2)$ rispettivamente:

$$(85) \qquad \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{b_1}^{b_2} \left(\chi^{(1)}_{x_1=a_2} - \chi^{(1)}_{x_1=a_1}\right) dx_2 = L_1$$

$$(86) \qquad \int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} \left(\chi^{(2)}_{x_2=b_2} - \chi^{(2)}_{x_2=b_1}\right) dx_1 = L_2$$

ove L_1 e L_2 sono degli scalari dipendenti dai dati. Ad esempio L_1 si ottiene aggiungendo al secondo membro della (81′) il seguente termine :

$$\int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} dx_1 \int_{c_1}^{x_3} \left(X^{12}_{x_2=b_2} - X^{12}_{x_2=b_1} - \int_{b_1}^{b_2} F_1\, dx_2 \right) dx'_3$$

La $(56)_2$ in base a (84) si può scrivere :

$$(87) \qquad - \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial x_3} N_2 + N_3 \frac{\partial \chi^{(2)}}{\partial x_2} = \nu_2 (x_1 , x_3) \quad (\text{sulle } x_2 = b_1 \text{ e} x_2 = b_2)$$

ove si è posto :

$$\nu_2 = (\mathrm{f}^2 - g n_1) \frac{1}{\sqrt{1 - n_1^2}} + N_3 \int_{c_1}^{x_3} (X^{21}/_1 - F^2)\, dx'_3$$

Analogamente da $(57)_2$ in base a (83) si ha :

$$(88) \qquad - \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x_3} N_1 + N_3 \frac{\partial \chi^{(1)}}{\partial x_1} = \nu_1 (x_2 , x_3) \quad (\text{sulle } x_1 = a_1 \ e \ x_1 = a_2)$$

ove è :

$$\nu_1 = (f^1 - g n_2) \frac{1}{\sqrt{1 - n_2^2}} + N_3 \int_{c_1}^{x_3} (g/_2 - F^1)\, dx'_3$$

Fra le soluzioni della (88) ci sono ad esempio le :

$$(89) \qquad \begin{aligned} \chi^{(1)} (a_1 , x_2 , x_3) &= - \frac{1}{N_1} \int_{c_1}^{x_3} \nu_1\, dx'_3 - M_1 (x_2) \\ \chi^{(1)} (a_2 , x_2 , x_3) &= - \frac{1}{N^1} \int_{c_1}^{x_3} \nu_1\, dx'_3 + N_1 (x)_2 \end{aligned}$$

ove N_1 e N_1 sono funzioni arbitrarie della sola x_2.

Analogamente fra le soluzioni della (87) ci sono le:

$$\chi^{(2)}(x_1, b_1, x_3) = -\frac{1}{N_2}\int_{c_1}^{x_3} \nu_2\, dx_3' - M_2(x_1)$$

(90)

$$\chi^{(2)}(x_1, b_2, x_3) = -\frac{1}{N_2}\int_{c_1}^{x_3} \nu_2\, dx_3' + N_2(x_1)$$

ove M_2 e N_2 sono funzioni arbitrarie della sola x_1.

Per (89) e (90) le (85) e (86) si scrivono rispettivamente:

$$\int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{b_1}^{b_2} [N_1(x_2) + M_1(x_2)]\, dx_2 = L_1 \tag{85'}$$

$$\int_{c_1}^{c_2} dx_3 \int_{a_1}^{a_2} [N_2(x_1) + M_2(x_1)]\, dx_1 = L_2 \tag{86'}$$

Data l'arbitrarietà delle funzioni M_1, N_1, M_2, N_2 è possibile soddisfare le (85) e (86).

Allora le caratteristiche di tensione X^{31} e X^{32}, date da (83) e (84) con le $\chi^{(1)}$ e $\chi^{(2)}$ soddisfacenti le (85) e (86), soddisfano le (81) e (82). È quindi possibile determinare le ΔX^{31} e ΔX^{32} in modo che la X^{33} soddisfi anche la condizione (63), ossia che le $\bar{X}^{rs}$ costituiscano una soluzione del problema (1) e (2) *c. d. d.*.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 3 1978.