Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Emma Previato

Gruppi nel cui reticolo duale la relazione di Dedekind è transitiva

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 58 (1977), p. 287-308

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__287_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

Gruppi nel cui reticolo duale la relazione di Dedekind è transitiva.

EMMA PREVIATO (*)

Nel presente lavoro vengono esaminati i gruppi iperciclici (1) nel cui reticolo $\check{\mathfrak{L}}(G)$, duale del reticolo $\mathfrak{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G, la relazione di Dedekind è transitiva ($\check{D}$-gruppi).

Si ottiene una descrizione completa di tali gruppi, contenuta negli enunciati dei teoremi 2.3, 3.8, 4.1 e 4.2 ; tali gruppi costituiscono una sottoclasse propria della classe dei gruppi iperciclici in cui la relazione di Dedekind è transitiva ([6]).

1. – Elementi di Dedekind-duali.

Un elemento h di un reticolo $\mathfrak{L}$ si dice elemento di Dedekind-duale in $\mathfrak{L}$ (brevemente $\check{d}$-elemento) se e solo se h è elemento di Dedekind nel reticolo duale di $\mathfrak{L}$; in forma esplicita, dati comunque gli elementi a, b di $\mathfrak{L}$, sono soddisfatte le relazioni seguenti :

i) da $a \geq b$ segue $(b \cup h) \cap a = b \cup (h \cap a)$.

ii) da $h \geq b$ segue $(b \cup a) \cap h = b \cup (h \cap a)$.

(*) Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico dell'Università, Padova.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca Matematica del C.N.R.

(1) Un gruppo G si dice iperciclico se e solo se ogni immagine omomorfa non identica di G possiede un sottogruppo normale ciclico non identico.

Osservazione 1. Da i), ii) si deduce immediatamente che h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ se per ogni $k \leq h$ risulta k di Dedekind in $\mathfrak{L}$.

Osservazione 2. $\mathfrak{L}$ è un reticolo modulare se e solo se ogni elemento di $\mathfrak{L}$ è $\breve{d}$-elemento.

Ci saranno utili le seguenti proprietà dei $\breve{d}$-elementi di un reticolo, ottenute dualizzando proprietà analoghe relative ad elementi di Dedekind in un reticolo ([10], pp. 74-76, e [5], paragrafo 1).

1.1. Sia h un elemento del reticolo $\mathfrak{L}$.

i) h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ se e solo se per ogni $k \in \mathfrak{L}$ l'applicazione $\varphi^k : x \longmapsto x \cup k$ realizza un isomorfismo tra gli intervalli $[h/h \cap k]$ e $[h \cup k/k]$; il suo inverso è dato da $\varphi_h : x \longmapsto x \cap h$.

ii) se h e k sono $\breve{d}$-elementi, allora $h \cap k$ è $\breve{d}$-elemento.

iii) se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e se $k \leq h$ è $\breve{d}$-elemento nel reticolo $[h] = \{x \in \mathfrak{L} \mid x \leq h\}$, allora k è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$.

iv) se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e $k \in \mathfrak{L}$, allora $h \cap k$ è $\breve{d}$-elemento in $[k]$.

v) se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e $k \in \mathfrak{L}$, allora $h \cup k$ è $\breve{d}$-elemento nel reticolo $[\mathfrak{L}/k] = \{x \in \mathfrak{L} \mid x \geq k\}$.

Daremo ora alcune proprietà dei $\breve{d}$-elementi in un $\breve{D}$-reticolo, ossia un reticolo $\mathfrak{L}$ avente in $\mathfrak{L}$ la relazione di Dedekind transitiva: se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ e k è $\breve{d}$-elemento in $[\mathfrak{L}/h]$, allora k è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$.

1.2. Proposizione. In un $\breve{D}$-reticolo $\mathfrak{L}$ l'insieme dei $\breve{d}$-elementi costituisce un sottoreticolo.

Dimostrazione. Siano h, k $\breve{d}$-elementi in $\mathfrak{L}$. Allora $h \cup k$ è $\breve{d}$-elemento in $[\mathfrak{L}/h]$ (1.1 *v*)); poichè $\mathfrak{L}$ è un $\breve{D}$-reticolo, è dunque $h \cup k$ $\breve{d}$-elemento, come pure $h \cap k$ per 1.1 ii).

1.3. Proposizione. In un $\breve{D}$-reticolo algebrico [2] $\mathfrak{L}$, una unione qualsiasi di $\breve{d}$-elementi, è un $\breve{d}$-elemento.

---

[2] Diremo algebrico un reticolo che sia completo, e in cui ogni elemento sia unione di elementi compatti (per una definizione di elemento compatto cfr. [2], p. 186). Ricordiamo che, se G è un gruppo, $\mathfrak{L}(G)$ è algebrico.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{h_\alpha\}$ una famiglia di $\breve{d}$-elementi, sia k un elemento qualunque di $\mathfrak{L}$, e poniamo $h = \cup_\alpha h_\alpha$. Usiamo la condizione i) di 1.1. Se $h \cap k \leq x \leq h$, risulta $(x \cup k) \cap h \geq x$; viceversa, se y è un elemento compatto contenuto in $(x \cup k) \cap h$, allora $y \leq (\bigcap_{\beta \in F} x_\beta) \cup k$, ove F è un insieme finito e $\{x_\beta\}$ è una famiglia di elementi compatti la cui unione è x. Sia ora F' un insieme finito tale che $\bar{h} = \bigcup_{\alpha \in F'} h_\alpha \geq y$, e $\bar{h} \geq \bar{x} = \bigcup_{\beta \in F} x_\beta$. Ora, tenuto conto di 1.2, risulta $y \leq (\bar{x} \cup k) \cap \bar{h} = \bar{x} \cup (k \cap \bar{h}) \leq x$, e in conclusione $(x \cup k) \cap h \leq x$. L'applicazione $\varphi^k : [h/h \cap k] \to [h \cup k/k]$ è pertanto iniettiva, e la sua inversa sinistra è data da φ_h; si dimostra analogamente che è suriettiva.

1.4. PROPOSIZIONE. Il prodotto cartesiano di una famiglia di $\breve{D}$-reticoli è un $\breve{D}$-reticolo.

DIMOSTRAZIONE. Verifica immediata.

1.5. PROPOSIZIONE. Sia $\mathfrak{L}$ un reticolo algebrico, e sia $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ la famiglia degli elementi compatti di $\mathfrak{L}$. Dato un elemento h di $\mathfrak{L}$, sia $\{h_\beta\}_{\beta \in J}$ la famiglia degli elementi compatti contenuti in h. Allora h è un $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$ se e solo se per ogni insieme finito $F \subseteq I$, ed $F' \subseteq J$, posto $\bar{g} = \bigcup_{\alpha \in F} g_\alpha$, $\bar{h} = \bigcup_{\beta \in F'} h_\beta$, $s = h \cap \bar{g}$, l'applicazione $\varphi_{\bar{h} \cup s}$ risulta isomorfismo fra i reticoli $[\bar{h} \cup \bar{g}/\bar{g}]$ e $[\bar{h} \cup s/s]$.

DIMOSTRAZIONE. La necessità si prova osservando che la $\varphi_{\bar{h} \cup s}$ è una restrizione dell'isomorfismo $\varphi_h : [h \cup \bar{g}/\bar{g}] \to [h/s]$. Per la sufficienza, usiamo 1.1); sia k un qualunque elemento di $\mathfrak{L}$, e sia $h \cap k \leq x \leq h$. Allora $(x \cup k) \cap h \geq x$; viceversa, se $y \leq (x \cup k) \cap h$ è un elemento compatto, sia $y \leq (\bigcup_{\gamma \in F''} x_\gamma) \cup (\bigcup_{\alpha \in F} g_\alpha)$ con $x_\gamma \leq x$ compatti, $g_\alpha \leq k$ compatti, e sia $\bar{h} = \bigcup_{\beta \in F'} h_\beta \geq y$, $\bar{h} \geq \bar{x} = \bigcup_{\gamma \in F''} x_\gamma$; allora per ipotesi $y \leq (\bar{x} \cup \bar{g}) \cap (\bar{h} \cup s) = \bar{x} \cup s \leq x$, e in conclusione $(x \cup k) \cap h = x$. Analogamente si prova la suriettività della mappa $\varphi^k : [h/h \cap k] \to [k \cup h/k]$.

Si verifica infine, utilizzando 1.1:

1.6. PROPOSIZIONE. Se $\mathfrak{L}$ è un $\breve{D}$-reticolo e se h è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}$, allora $[h]$ ed $[\mathfrak{L}/h]$ sono entrambi $\breve{D}$-reticoli.

2. – $\breve{D}$-gruppi iperciclici aperiodici.

2.1. Proposizione. Sia G un $\breve{D}$-gruppo e sia $\{H_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$ una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici. Allora $H_\alpha \leq_{\breve{d}} G$ (H_α è $\breve{d}$-elemento in $\mathfrak{L}(G)$) per ogni $\alpha \leq \gamma$.

Dimostrazione. Usiamo induzione (transfinita) su α; se $\alpha=1$, H_1 è un sottogruppo normale ciclico di G, e $H_1 \leq_{\breve{d}} G$ (Osservazione 1), Se $\alpha = \beta + 1$, allora $H_{\beta+1}/H_\beta \leq_{\breve{d}} G/H_\beta$ (Osservazione 1), e dunque $H_{\beta+1} \leq_{\breve{d}} G$, in quanto G è $\breve{D}$-gruppo. Infine, se α è un ordinale limite, $H_\alpha \leq_{\breve{d}} G$ per 1.3.

2.2. Proposizione. Sia G un $\breve{D}$-gruppo aperiodico, e sia $\{H_\alpha\}_{\alpha\leq\gamma}$ una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici. Se H_{α_0} è abeliano, per un $\alpha_0 \leq \gamma$, allora ogni elemento c di G induce su H_{α_0} un automorfismo potenza.

Dimostrazione. Usiamo induzione su α_0; H_1 è normalizzato da c, ed è ciclico, quindi l'affermazione è vera. Se α_0 è ordinale limite, c normalizza ogni sottogruppo ciclico di H_{α_0}, e questo prova di nuovo l'asserto. Sia dunque $\alpha_0 = \beta+1$, e sia $H_{\alpha_0} = < b , H_\beta >$; c normalizza ogni sottogruppo di H_β (ipotesi iduttiva), inoltre ogni sottogruppo di $H_{\beta+1}$ è $\breve{d}$-elemento in G, essendo $H_{\beta+1}$ abeliano e $H_{\beta+1} \leq_{\breve{d}} G$(2.1). Se $b^n \in H_\beta$ per un $n > 0$, si conclude facilmente avendosi $c^{-1}bc = b^r h$, per un $h \in H_\beta$, e dunque $c^{-1} b^n c = b^{\pm n} = (b^r h)^n$, per cui $(b^{r\pm 1} h)^n = 1$, e dunque $h \in < b >$. Se invece $H_{\beta+1}/H_\beta$ è aperiodico, risulta $c^{-1} bc = b^{\varepsilon_1} h$, con $\varepsilon_1 = \pm 1$, $h \in H_\beta$. Distinguiamo due casi:

a) $< c > \wedge H_{\beta+1} = \{1\}$.

Da $h \in < b , c >$ si deduce $< b , h > \cup < c > = < b > \cup < c >$ e poichè $< b , h > \leq_{\breve{d}} G$ sarà $< b , h > = < b >$, come si voleva.

b) $< c > \cap H_{\beta+1} = < c^s >$, con $s > 1$.

Sarà $c^{-1} hc = h^{\varepsilon_2}$, e dunque $b = c^{-s} bc^s = b^{\varepsilon_1^s} h^{\varepsilon_1^{s-1} + \varepsilon_1^{s-2} \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_2^{s-1}}$; risulta allora $\varepsilon_1^s = 1$, essendo $< b > \cap < h > = \{1\}$ e, se $h \neq 1$, $\varepsilon_1^{s-1} + \varepsilon_1^{s-2} \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_2^{s-1} = 0$, quindi $\varepsilon_1 = - \varepsilon_2$, ed s pari. Escludiamo anzitutto il caso $\varepsilon_2 = -1$. Infatti, posto $s = 2^m t$, con t dispari, è $(2^m + 1)\, t$ dispari, e dunque $(h \neq 1)$ $< c^{2^m t} h > \cap$

$\cap < c^{(2^m+1)t}\, h > = \{1\}$; d'altra parte, $< c^{2^m t}\, h > \cup < c^{(2^m+1)t}\, h > = < c^t, h >$, quindi essendo $< c^{2^m t}\, h > \leq_{\breve{d}} G$ risulta $[< c^{2^m t}\, h > / \{1\}] \simeq [< c^t, h > / < c^{(2^m+1)t}\, h >]$, mentre il fatto che $(c^t\, h)^{2^m+1} = c^{t(2^m+1)}\, h$ dice che il secondo reticolo ha elementi periodici non nulli, una contraddizione. Dovrà quindi essere $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = -1$.

$b_1)$ $< h > \nleq < c >$.

Allora $[< b , c > / < h , c >]$ è un reticolo finito, dato che $[< b , c > / < c >]$ è il reticolo di un gruppo ciclico; pertanto $| < b , c > : < h , c > | < \infty$ (come si può vedere ad esempio ragionando modulo $< h >$); $[< h , c > / < h , c^2 >]$ ha lunghezza ≤ 1 quindi in conclusione $| < b , c > : < h , c^2 > | < \infty$. Ma allora il gruppo aperiodico $< b , c >$ è abeliano perchè $< h , c^2 >$ è contenuto nel suo centro e un gruppo il cui centro ha indice finito ha il derivato di ordine finito ([7]. Theorem 4.12); assurdo.

$b_2)$ $< h > \leq < c >$.

Risulta $c^{-1}\, bc = b^{-1}\, c^m$, $m \neq 0$; $b = c^{-m}\, bc^m = b^{(-1)^m}$, dunque m è pari. Risulta inoltre $(2+m)m+1$ dispari, dunque $< c^{(2+m)m}\, b > \cap < c^{(2+m)m+1}\, b > = \{1\}$, $< c^{(2+m)m}\, b > \cup < c^{(2+m)m+1}\, b > = < c , b >$, da cui, essendo $< c^{(2+m)m}\, b > \leq_{\breve{d}} G$, segue $[< c^{(2+m)m}\, b > / \{1\}] \simeq [< c , b > / c^{(2+m)m+1}\, b >]$, mentre si ha $(cb)^{2m+1} = c^{(2+m)m+1}\, b$, e dunque a $< cb >$ corrisponde un elemento ciclico finito in $\mathfrak{L} < c^{(2+m)m}\, b >$, una contraddizione. Pertanto $< b > \triangleleft < b , c >$.

2.3. Teorema. *Un gruppo iperciclico aperiodico G è $\breve{D}$-gruppo se e solo se è abeliano.*

Dimostrazione. Proviamo la necessità. Sia $\{H_\alpha\}_{\alpha \leqslant \gamma}$ una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici, tale che $\bigcup_\alpha H_\alpha = G$. Proviamo, per induzione su α, che H_α è abeliano. Se $\alpha = 1$, H_α è ciclico; se α è ordinale limite, è possibile trovare un sottogruppo abelliano che contenga due elementi generici di H_α. Sia dunque $\alpha = \beta + 1$ e sia $H_\alpha = < H_\beta , c >$. Per 2.2, c induce su H_β un automorfismo potenza. Se tale potenza non è 1, allora c non induce su $< c^2 , H_\beta >$ un automorfismo potenza, mentre $< c^2 , H_\beta >$ è abeliano normale: ciò è in contraddizione con 2.2.

3. – $\breve{D}$-gruppi iperciclici periodici.

3.1. Lemma. Un gruppo finito supersolubile G è un $\breve{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto, usando induzione sulla classe di nilpotenza, che un p-gruppo finito P che sia $\breve{D}$-gruppo è modulare. $P/Z(P)$ è modulare per ipotesi induttiva (per l'Osservazione 1 è $Z(P) \leq_{\breve{d}} P$) ; allora per la $\breve{D}$-proprietà è $\langle Z(P), x \rangle \leq_{\breve{d}} P$ per ogni $x \in P$, e da $\langle x \rangle \leq_{\breve{d}} \langle Z(P), x \rangle \leq_{\breve{d}} P$ segue $x \leq_{\breve{d}} P$. Ne segue che ogni sottogruppo di P è $\breve{d}$-elemento (1.2), e dunque P è modulare (Osservazione 2).

Sia ora G un $\breve{D}$-gruppo supersolubile finito ; proviamo che G è modulare per induzione sull'ordine di G. Sia $\langle g \rangle$ un sottogruppo normale di ordine primo p di G. Allora $G/\langle g \rangle$ è $\breve{D}$-gruppo, quindi è modulare, da cui per ogni $h \in G$ è $\langle g, h \rangle \leq_{\breve{d}} G$. La conclusione si otterrà provando che $\langle h \rangle \leq_{\breve{d}} \langle g, h \rangle$, nè è restrittivo supporre $|h| = q^n$, q un numero primo (1.2). Se $p = q$, allora $\langle g, h \rangle$ è modulare, essendo un p-gruppo con proprietà $\breve{D}$. Sia ora $p \neq q$; usiamo induzione su n per provare che $\langle h \rangle \leq_{\breve{d}} \langle g, h \rangle$. Se $n = 1$ $\langle g, h \rangle$ è un gruppo modulare avendo ordine pq. Se $n > 1$, per la $\breve{D}$-proprietà e l'ipotesi induttiva si avrà $\langle h^q \rangle \leq_{\breve{d}} \langle g, h^q \rangle \leq_{\breve{d}} \langle g, h \rangle$. Infine, il reticolo $[\langle g, h \rangle / \langle h^q \rangle]$ ha lunghezza due e dunque è modulare, così $\langle h \rangle$ è $\breve{d}$-elemento in $[\langle g, h \rangle / \langle h^q \rangle]$, da cui $\langle h \rangle \leq_{\breve{d}} \langle h, g \rangle$, come si voleva.

3.2. Lemma. Sia G un $\breve{D}$-gruppo iperciclico periodico ; se N è il sottogruppo di G generato dagli elementi $g \in G$ tali che $\langle g \rangle \leq_{\breve{d}} G$, allora :

i) N è reticolarmente invariante in G,

ii) N è modulare,

iii) per $H \leq N$ è $H \leq_{\breve{d}} G$.

Dimostrazione. i) è ovvia. iii) ogni elemento x di N è contenuto in un sottogruppo $\langle g_1, \dots, g_t \rangle$ con $\langle g_i \rangle \leq_{\breve{d}} G$; ora $\langle g_1, \dots, g_t \rangle$ è un $\breve{D}$-gruppo (1.2) ed è finito essendo G localmente finito. Per 3.1 $\langle g_1, \dots, g_t \rangle$ è modulare, per cui $\langle x \rangle \leq_{\breve{d}} \langle g_1, \dots, g_t \rangle \leq_{\breve{d}} G$, da cui $\langle x \rangle \leq_{\breve{d}} G$. Tenuto conto di 1.3, la iii) è dimostrata ; ii) ne segue usando l'Osservazione 2.

3.3. Proposizione. Un p-gruppo iperciclico G con $p \neq 2$ è $\breve{D}$-gruppo se e solo se è modulare.

Dimostrazione. Dimostriamo la necessità. Il sottogruppo N di G generato dagli elementi $g \in G$ tali che $<g> \leq_{\breve{d}} G$ è modulare per 3.2. Supponiamo per assurdo $N \neq G$ e consideriamo un elemento $x \in G$ tale che $<x, N>/N \lhd G/N$ e $|<x, N>/N| = p$. Supponiamo anzitutto $|x| = p$. x normalizza ogni elemento y di N, avendosi $|<x, y> : <y>| = p$; essendo poi $p \neq 2$, il gruppo $<x, y>$ è modulare $([9])$; ne segue $<x> \leq_q <x, y>$, dunque $<x> \leq_q <x, N>$ e infine $<x> \leq_{\breve{d}} <x, N>$ (Osservazione 1). Ma $<x> \leq_{\breve{d}} <x, N> \leq_{\breve{d}} G$ comporta $<x> \leq_{\breve{d}} G$, in contraddizione col fatto che $x \notin N$. Sia ora $|x| = p^n$, $n > 1$; possiamo usare induzione su n per dimostrare $<x> \leq_{\breve{d}} <x, N>$, nelle ipotesi $<x, N> \leq_{\breve{d}} G$ e $<y> \leq_{\breve{d}} G$ per ogni $y \in N$. Il caso $n = 1$ è risolto per quanto visto sopra. Consideriamo il sottogruppo $\Omega_1(N)$ di N generato dagli elementi di ordine p. N è modulare, quindi $\Omega_1(N)$ è abeliano elementare, inoltre $\Omega_1(N) \leq_{\breve{d}} G$, pertanto il gruppo $G/\Omega_1(N)$ è ancora un $\breve{D}$-gruppo, $N/\Omega_1(N)$ è tale che ogni suo sottogruppo è $\breve{d}$-elemento, quindi in $G/\Omega_1(N)$ si può applicare l'ipotesi induttiva per concludere $<x, \Omega_1(N)>/\Omega_1(N) \leq_{\breve{d}} <x, N>/\Omega_1(N)$, da cui per la $\breve{D}$-proprietà $<x, \Omega_1(N)> \leq_{\breve{d}} <x, N>$. Ma $<x>$ è normalizzato da ogni elemento z di $\Omega_1(N)$ essendo $|<x, z> : <x>| \leq p$, quindi è anche $<x> \leq_{\breve{d}} <x, \Omega_1(N)>$ e infine $<x> \leq_{\breve{d}} G$, come si voleva.

La sufficienza è ovvia.

3.4. Proposizione. Un 2-gruppo iperciclico G non modulare è $\breve{D}$-gruppo se e solo se è un (q)-gruppo $G = <c, A>$, con A 2-gruppo divisibile (non identico), $c^{-1}ac = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ [3].

Dimostrazione. Necessità. Sia G un 2-gruppo iperciclico, non modulare con proprietà $\breve{D}$; consideriamo il sottogruppo N di G generato dagli elementi $g \in G$ tali che $<g> \leq_{\breve{d}} G$. N è modulare (3.2), quindi $N \neq G$. Sia c un elemento di G tale che $|<c, N>|N| = 2$ e $<c, N> \lhd G$; proviamo che, se N ha esponente finito, allora $<c> \leq_{\breve{d}} G$. Infatti, se $<g>$ è un $\breve{d}$-elemento di ordine 2, risulta

[3] Per una descrizione dei 2-gruppi (risolubili) con proprietà (q), cfr. [3]. Per gruppo divisibile si intende sempre gruppo abeliano divisibile.

$|<c\,,g>:<c>|\leq 2$; ne segue $<c\,,\Omega_{i-1}(N)>\ \leq_{\breve{d}}<c\,,\Omega_i(N)>$, e dunque $<c>\leq_{\breve{d}}<c,\Omega_1(N)>\leq_{\breve{d}}<c,\Omega_2(N)>\leq_{\breve{d}}\ldots\leq_{\breve{d}}<c\,,\Omega_t(N)>=$ $=<c\,,N>$; per la transitività, $<c>\ \leq_{\breve{d}} G$. Ma allora per definizione di N sarebbe $c\in N$, contro l'ipotesi. Pertanto N non ha esponente finito, ed essendo modulare è abeliano.

Possiamo quindi considerare il quoziente $<c\,,N>/<c>\cap N$, che è ancora $\breve{D}$-gruppo (3.2) ; per semplicità di scrittura, supponiamo $<c>\cap N=\{1\}$, quindi $|c|=2$. Essendo $|<c\,,g>:<g>|=2$ per ogni $g\in N$, c induce su N un automorfismo potenza di ordine 2. Supponiamo che sia $N^2\neq N$, e sia $h\in N\,,h\in N^2$. Essendo $<c\,,N>/N^2$ un gruppo abeliano elementare, risulta $<c\,,N^2>\ \leq_{\breve{d}}$ $<c\,,N>$; da $<ch>\ \cap\ <c\,,N^2>=\{1\}$ segue dunque $[<cg>/\{1\}]\simeq[<cg\,,ch>/<ch>]$ per ogni $g\in N$, mentre $|cg|=2$ e, per $|g|>2$, risulta $|<cg\,,ch>:<ch>|>2$ in quanto $g^{-1}h\in$ $\in<cg\,,ch>$, assurdo. N è dunque divisibile.

Abbiamo ragionato modulo $<c>\ \cap\ N$; nel caso generale, proviamo che c induce su A un automorfismo potenza, ove $N=A\times B$, ed A è il massimo sottogruppo divisibile di N. Infatti, sia $|c|=2^n$ e sia $a\in A$ arbitrario. Se a_1 è tale che $a=a_1^{2^n}$, da $c^{-1}a_1c=a_1^{-1}c^m$ ($c^m\in N$) segue $c^{-1}ac=(a_1^{-1}c^m)^{2^n}=(a_1^{2^n})^{-1}=a^{-1}$, come si voleva.

Proviamo infine che $G=\ <A\,,c>$; anzitutto è $<N\,,c>=$ $=<A\,,c>$, infatti, se $<c>\cap N=\ <ab>\ ,a\in A\,,b\in B$ risulta $N=A\times<b>$. Supponiamo per assurdo che esista un $d\in G$ tale che $<c\,,N>$ ha indice 2 in $<d\,,c\,,N>$ e $<d\,,c\,,N>$ è un $\breve{D}$-gruppo (basta scegliere $<d\,,c\,,N>\ \lhd\ G$). Se $<d\,,c\,,N>/N$ è abeliano elementare, allora $<d\,,N>\ \leq_{\breve{d}} G$ e dunque, per quanto visto sopra per il gruppo $<c\,,N>$ d induce su A un automorfismo potenza non identico (se fosse identico, sarebbe $<d>\ \leq_{\breve{d}} G$) ; ma allora $<cd\,,A>$ è un gruppo abeliano, e dunque $<cd>\ \leq_{\breve{d}}$ $<cd\,,A>\ \leq_{\breve{d}}\ <cd\,,N>\ \leq_{\breve{d}} G$, per cui $cd\in N$, assurdo. Sia dunque $<d\,,c\,,N>/N$ un gruppo ciclico ; se si prova che d induce su A un automorfismo potenza, allora si perviene ad un assurdo, in quanto $c=d^2h\in\mathfrak{C}(A)$. A tale scopo possiamo ragionare modulo $<d>\cap N$, quindi supporre $|d|=4$. Allora ogni elemento di $\Omega_1(N)$ induce su $<d>$ l'identità (diversamente non darebbe luogo a un $\breve{d}$-elemento). Supponiamo ora che d normalizzi ogni sottogruppo ciclico di N di ordine 2^s, e sia $|a|=2^{s+1}$; allora $d^{-1}ad=aa_1$, con $|a_1|\leq 2^s$; ma essendo $<a\,,a_1>\cup<d>=<a>\cup<d>$ e $<d>\cap<a\,,a_1>=$ $=\{1\}$ deve risultare $<a\,,a_1>=<a>$, in quanto $<a\,,a_1>$ è $\breve{d}$-elemento ; quindi d normalizza $<a>$, come si voleva. Risulta dunque $< A , c > = G$, $\mathcal{C}_G(A) = < A , c^2 > = N$ ha indice 2 in G, ogni sottogruppo di N è $\breve{d}$-elemento, e qunque è quasi normale in G (è immediato verificare che in un p-gruppo finito un $\breve{d}$-elemento è quasi normale), ma allora G è un (q)-gruppo $\big($[3], Teorema $C2$, sufficienza$\big)$.

Sufficienza. Consideriamo nel (q)-gruppo $G = < A , c >$ un $\breve{d}$-elemento H, e in $[G/H]$ un $\breve{d}$-elemento K. Essendo $\mathcal{C}_G(A) = < A , c^2 >$ normale in G, e abeliano, ogni suo sottogruppo risulta quasi normale in G, e dunque $\breve{d}$-elemento (Osservazione 1). Non è pertanto restrittivo assumere $c \in K$. Se anche H contiene c, allora $A \leq H = G$; infatti supponiamo $a \notin H$, e scegliamo $a_1 \in A$ tale che $a = a_1^{2^r}$, $2^r > |c|$; allora $[< c >/< ca_1 > \cap H] \simeq [< c , a_1 >/< ca_1 >]$, ma il primo reticolo ha lunghezza 1 essendo $< ca_1 > \cap H = < c^2 >$, una contraddizione. Supponiamo ora $c \notin H$, dunque $H \leq \mathcal{C}_G(A)$. Anche in questo caso, vogliamo provare che $K \geq A$, ossia $K = G$. A tale scopo non è restrittivo suppore $|c| = 2$, infatti $c^2 \in K$, d'altra parte modulo $< c^2 >$ H è ancora $\breve{d}$-elemento e K è $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$.

Supponiamo dunque $a \notin K$; il reticolo $[< c > \cup H/H]$, che ha lunghezza 1 essendo H quasinormale, deve essere isomorfo a $[< c , a > \cup H/< ca> \cup H]$; quest'ultimo reticolo, per la quasinormalità di H, è isomorfo a $\big[< c , a >/< ca > \cup (< c , a > \cap H)\big]$; poichè $H \leq \mathcal{C}_G(A)$ risulta $< c , a > \cap H = < a > \cap H$, e dunque, avendo $< ca >$ ordine 2, con una scelta opportuna di a si perviene a una contraddizione. Il teorema è quindi dimostrato.

3.5. LEMMA. *Un $\breve{D}$-gruppo iperciclico periodico G che sia privo di sottogruppi divisibili è modulare.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il sottogruppo N di G definito da $N = < g \in G / < g > \leq_{\breve{d}} G >$. Supponiamo per assurdo $N \neq G$ e scegliamo un p-elemento $x \in G$ tale che $< x , N >/N \lhd G/N$ e $|< x , N >/N| = p$. Proviamo che risulta $< x > \leq_{\breve{d}} G$, una contraddizione. Il gruppo N, essendo modulare (3.2) e risolubile, sarà prodotto diretto di P_0^*-gruppi generalizzati di tipo $A < g >$, con A abeliano elementare, di gruppi primari di esponente finito e di gruppi primari di esponente infinito, quindi abeliani $\big($[9]$\big)$. Tali sottogruppi sono caratteristici in N, e dunque normali in G; consideriamo un tale sottogruppo L di N tale che, eventualmente, $x^p \neq 1$ appartenga ad L; $< x > L$ è un $\breve{D}$-gruppo, essendo isomorfo al quoziente di $< x , N >$ su un $\breve{d}$-elemento (il complemento di L in N). Se L è del tipo $A<g>$, risulta $<x> \leq_{\breve{d}} <x, A> \leq_{\breve{d}} <x> (A<g>)$, in quanto si posono formare quozienti finiti, che sono $\breve{D}$-gruppi e dunque modulari (3.1). Se L è q-gruppo, $L<x>$ risulta modulare in virtù di 3.3 e 3.4. Risulta dunque, detto L_1 il complemento di L in N, $<x, L_1>/L_1 \leq_{\breve{d}} <x, N>/L_1$ $(= <x, L> \cup L_1/L_1 \simeq <x, L>)$; quindi $<x, L_1>$ è un $\breve{D}$-gruppo e $<x> \cap L_1 = \{1\}$. Possiamo considerare ora i $\breve{D}$-gruppi $<x>L_2$, ove L_2 è P^*_0-gruppo o gruppo primario modulare; se L_2 è P^*_0-gruppo, come sopra si conclude che $<x>L_2$ è modulare; se $L_2 = Q$ è q-gruppo di esponente finito si ha $<x> \leq_{\breve{d}} <x> \Omega_1(Q) \leq_{\breve{d}} <x> \Omega_2(Q) \leq_{\breve{d}} \dots \leq_{\breve{d}} <x> Q$, da cui $<x> \leq_{\breve{d}} Q<x>$, e dunque $<x>Q$ è modulare; se $Q = L_2$ ha esponente infinito, allora x induce l'identità su Q poichè evidentemente $<x, Q>/Q^{q^n}$ è abeliano, non appena $n > 1$. D'altra parte, x centralizza ogni gruppo L_2, eccetto al più uno, infatti $<x>(L_2 \times \tilde{L}_2)$ deve risultare modulare non appena ha esponente finito. Il reticolo di $<x, L_1>$ si scompone pertanto nel prodotto diretto di due reticoli, uno dei quali contiene $<x>$ come $\breve{d}$-elemento. Si può concludere che $<x> \leq_{\breve{d}} G$.

Facciamo a questo punto un'osservazione che ci sarà utile più volte nel seguito: sia N un sottogruppo normale del gruppo periodico iperciclico G. Se N è modulare, si può parlare del massimo sottogruppo divisibile di N, diciamolo N_1. Allora, se G/N è privo di sottogruppi divisibili, anche G/N_1 ne è privo. Infatti, se A/N_1 è divisibile, lo è anche A/N per cui $A \leq N$; ora A è abeliano perchè i suoi sottogruppi di Sylow non hanno esponente finito, e dunque A è divisibile $(A \ni a = x^n y = x^n z^n = (xz)^n, y \in N_1)$.

3.6. Lemma. Sia G un $\breve{D}$-gruppo iperciclico periodico. Posto $N = {} = <g \in G / <g> \leq_{\breve{d}} G>$, G/N risulta modulare, inoltre ogni elemento non identico di G/N induce un automorfismo potenza non identico sul massimo sottogruppo divisibile di N.

Dimostrazione. Diciamo N_1 il massimo sottogruppo divisibile di N.

Sia inoltre M il sottogruppo di G/N generato dai $\breve{d}$-sottogruppi ciclici. Proviamo che $M/N \simeq \leq Aut N_1$; infatti se $x \in M$ ed $x \notin N$, allora $x \notin \mathcal{C}(N_1)$. Diversamente, si avrebbe $<x> \leq_{\breve{d}} <x, N_1> \leq$ $\leq_{\breve{d}} <x, N> \leq_{\breve{d}} G$ (3.5 e osservazione successiva), e dunque $<x> \leq_{\breve{d}} G$, ma allora $x \in N$. Osserviamo inoltre che ogni elemento di M/N induce su N_1 un automorfismo potenza. Sia infatti $x \in M\text{-}N$

e $|x| = p^n$. Se $y \in N_1$ e $|y| = q^m$ con $p \neq q$, non può essere $< y >^{\times} \neq < y >$, altrimenti il gruppo $< y >^{\times} \cup < y >$ avrebbe ordine $q^m p^\alpha$, assurdo essendo contenuto nel q-sottogruppo di Sylow di N_1. Se $p = q$, consideriamo in N_1 il sottogruppo C, complemento del q-sottogruppo di Sylow; risulta $< x , N_1 > \leq_{\breve{d}} G$ (3.5) e dunque $< x , N_1 > / C$ un $\breve{D}$-gruppo primario. In virtù di 3.3, 3.4, x induce un automorfismo potenza su N_1/C. In conclusione M/N è isomorfo a un sottogruppo di $AutP(N_1)$, quindi non può avere un sottogruppo divisibile, e dunque M deve coincidere con G (3.5); questo prova entrambe le affermazioni.

3.7. PROPOSIZIONE. Sia G un gruppo iperciclico periodico non modulare, con $\mathfrak{L}(G)$ indecomponibile. G è un $\breve{D}$-gruppo se e solo se soddisfa alle seguenti condizioni: G possiede un sottogruppo divisibile B, B è privo di 2-elementi, B è di Hall in G, ogni sottogruppo di B è normale in G (ma $\mathfrak{C}(B) \neq G$), e per G/B si verifica uno dei seguenti tre casi:

i) G/B è ciclico di ordine p^n, oppure;

ii) G/B è 2-gruppo (iperciclico) non modulare con proprietà $\breve{D}$, oppure;

iii) $G/B = < x > E/B$ è un P_0^*-gruppo (generalizzato), con $|x| = q^m$, $E \leq \mathfrak{C}(B)$ e, per ogni $b \in B$ di ordine r^s potenza di un primo r, risulta $x^{-1} bx = b^{m_s}$. con $m_s^q \not\equiv 1$ mod. r. [4].

DIMOSTRAZIONE. Dato il gruppo G come nell'enunciato, dimostriamo la necessità; sia $N = < g \in G | < g > \leq_{\breve{d}} G >$, sia N_1 il massimo sottogruppo divisibile di N, e sia B il sottogruppo di N_1 generato dagli elementi di ordine dispari. Verifichiamo che il sottogruppo B soddisfa le condizioni enunciate.

Dalla definizione di B segue che esso è divisibile; per dimostrare che è di Hall in G vediamo anzitutto che:

(1) se $p \in \omega(G/N)$ e $p \neq 2$, allora $p \notin \omega(N_1)$.

Ricordiamo che, in conseguenza di 3.6, è $N_1 \neq \{1\}$ e ogni elemento di G induce su N_1 un automorfismo potenza. Ora, supponiamo per

---

[4] Poichè x induce su B un automorfismo potenza, per ogni intero positivo s esiste un intero m_s tale che $0 < m_s < r^s$, $m_s \equiv m_{s-1}$ mod. r^{s-1} e per ogni elemento di B di ordine p^s, è $x^{-1} bx = b^{m_s}$ ([8], 4.1.1).

assurdo che un sottogruppo (divisibile) di N_1 sia p-gruppo; sia P il p-Sylowgruppo di N e sia $1 \neq \bar{x} \in G/N$ tale che $|x| = p^n$ e $|<x, N>/N| = p$; risulta $P <x>$ un p-gruppo abeliano, infatti è $\breve{D}$-gruppo, essendo isomorfo al quoziente di $<x> N$ sul complemento di P in N, e $p \neq 2$. Sia Q un q-Sylowgruppo di N tale che x non centralizzi $Q \cap N_1$ (un tale Q esiste per 3.6); essendo $<x>(Q \times P)$ un $\breve{D}$-gruppo, risulta $<Q, x> \leq_{\breve{d}} <Q, P, x>$. Non è restrittivo suppore $<x> \cap P = \{1\}$, essendo un $\breve{D}$-gruppo anche $<x>(Q \times P)/<x> \cap P$. Se ora $z \in P$ e $|z| > |x|$, risulta $<zx> \cap Q <x> = \{1\}$, e dunque i reticoli $[<yx>/\{1\}]$ e $[<yx, zx>/<zx>]$ sono isomorfi, per ogni $y \in Q$. Ma questo non è vero, non appena l'altezza di $<y>$ supera quella di $<x>$, infatti $|yx| = |x|$, mentre $yz^{-1} \in <yx, zx>$.

Sia ora $2 \neq p \in \omega(N/N_1)$; se risulta anche $p \in \omega(N_1)$, vediamo che P, il p-Sylowgruppo di N, è contenuto in $Z(G)$, quindi, essendo P di Hall per (1), il reticolo di G è decomponibile, assurdo. Sia x un elemento di G che non centralizza P, e sia $|x| = q^n$; risulta $q \neq p$, in virtù di (1), perchè $x \notin N$ e $p \neq 2$; inoltre x induce un automorfismo potenza su P, infatti: P è abeliano, ogni $<y> \leq P$ è $\breve{d}$-elemento, per cui $<x, y> = <x><y>$, e $<x, y> \cap N = <x^t> \times <y>$, abeliano e normale in $<x, y>$. Detto P_1 il massimo sottogruppo divisibile di P, il $\breve{D}$-gruppo $<x> P/P_1$ risulta modulare (3.5), quindi $<x, P_1> \leq_{\breve{d}} <x, P>$. Non è restrittivo supporre $|x| = q$, infatti si può ragionare modulo $\mathfrak{C}_{<x>}(P)$, che è $\breve{d}$-elemento in $<x, P>$. Se $y \in P \setminus P_1$, risulta $<xy> \cap <x> P_1 = \{1\}$, e dunque $[<xz>/\{1\}] \simeq [<xz, xy>/<xy>]$ per ogni $z \in P_1$, assurdo perchè $<xz, xy>$ contiene zy^{-1} che può avere ordine comunque grande, mentre $|xz| = q = |xy|$.

Resta così provato che B è di Hall in G. G/N_1 per 3.5 e per l'osservazione seguente, è modulare. Supponiamo che in G/N_1 un fattore diretto sia un P_0^*-gruppo generalizzato $<x> E/N_1$, con E/N_1 p-gruppo abeliano elementare, $|x| = q^n$. Proviamo che

(3) $E \leq \mathfrak{C}(N_1)$.

Supponiamo che un $a \in E$, $|a| = p$, non centralizzi un r-Sylowgruppo R di N_1. R non è un 2-gruppo, perchè $p > 2$ e a induce su R un automorfismo potenza; pertanto, $R \leq B$ è di Hall in G. Nel quoziente sul complemento di R in N_1, abbiamo un $\breve{D}$-gruppo $<x> E$ ove risulta $<a> R \leq_{\breve{d}} <x> E$, per cui $[<a>/\{1\}] \simeq [<a, x>/<x>]$, quindi $<a, x> = <a> <x>$ e infine $<a> \triangleleft$

$< a , x >$. Inoltre $[< za >/\{1\}] \simeq [< za > \cup < x >/< x >]$, per $z \in R$; se $x \in \mathcal{C}(R)$, allora $< x > \cup < za > \ni x , x^{\partial}$ e dunque anche a, assurdo perchè $<za>$ ha ordine p. Se poi x non centralizza R, la contraddizione sta nel fatto che il gruppo $< z, a > < x >$ ha i sottogruppi di Sylow ciclici, mentre z non centralizza a e x non centralizza nè z nè a. Pertanto $E \leq \mathcal{C}(N_1)$.

Supponiamo ora che x non centralizzi un r-Sylowgruppo R di B; se $x^{-1} zx = z^m$, per $z \in R$, dimostriamo che $m^q \not\equiv 1$ mod. r. Infatti, se ciò non avviene, non è restrittivo assumere $|z| = r$, e dunque $(xz)^q = x^q$; ma, essendo $< x , R >$ $\breve{d}$-elemento in $< x , E >$, allora $[< xz >/< x^q >] \simeq [< xz , xa >/< xa >]$, il che è assurdo perchè in $< xz , xa >$ c'è un sottogruppo in cui $< xa >$ ha indice p, e uno in cui ha indice r.

Vediamo ora che

(4) un p-gruppo P/N_1 che sia fattore diretto in G/N_1 è ciclico.

Nel caso $p = 2$ e P/B $\breve{D}$-gruppo non modulare, l'affermazione segue da 3.4.

Supponiamo dunque $p \neq 2$, oppure $p = 2$ e P/B modulare. In ogni caso P/B è fattore diretto in G/B. Se fosse $P \leq \mathcal{C}(B)$, il reticolo di G sarebbe decomponibile, quindi esiste un $k \in P$ che non centralizza un r-Sylowgruppo R di B, $|k| = p^n$. Ragioniamo nel quoziente di G sul complemento di R in B, e supponiamo che k^p centralizzi R. Ora supponiamo per assurdo di poter scegliere un elemento g tale che $|g| = p$ e $|< g , k > R/R| = p^{n+1}$. Poichè $< k , R >$ è $\breve{d}$-elemento, è $[<k>/\{1\}] \simeq [<g , k>/<g>]$, quindi $|<g , k>| = p^{n+1}$ e g normalizza $<k>$. Allora possiamo ragionare modulo $< k^p >$, che è $\breve{d}$-elemento. Ora g centralizza k; essendo anche $[< xk >/\{1\}] \simeq [<xk , g>/<g>]$, g deve centralizzare x per ogni $x \in R$, e infine $[<xk>/\{1\}] \simeq [< xk , gk >/<gk>]$, mentre $< xk , gk >$ contiene gx^{-1} che ha ordine $p|x|$, assurdo. Rimane da escludere la possibilità che P/B sia il gruppo dei quaternioni di ordine 8. Siano a, b generatori di P/B, con $|a| = |b| = 4$. Si possono scegliere a, b in modo che $a^2 = b^2$; infatti se $b^2 = a^2 z$, per $z \in B$, basta prendere per a un opportuno generatore di un sottogruppo di Sylow di $< a , z >$. Allora, essendo $[< a >/< a^2 >] \simeq [< a , b >/< b >]$, risulta $<a , b> \simeq P/B$. Sia R un Sylowgruppo di B che non è nel centro di P; poichè il gruppo degli automorfismi potenza di R è abeliano, a^2 deve centralizzare R, dunque a induce su R l'inversione. Da $[< az >/< a^2 >] \simeq [<az , b>/<b>]$ segue che $|<az , b>| = 8$, ossia b induce su az l'inversione, ma allora b centralizza z; sostituendo b con ab, si perviene ad un assurdo.

Vediamo ora che nel gruppo G/B c'è un solo fattore diretto. Innanzitutto, poichè G/N_1 è modulare, e quindi prodotto di gruppi coprimi modulari, allora G/B è prodotto di gruppi coprimi modulari e di un 2-gruppo, che è $\breve{D}$-gruppo non modulare oppure, come si è visto, è ciclico. Infatti non può presentarsi il caso di un P_o^*-gruppo $< x > E/N_1$ con $|x| = 2^n$, se il 2-sottogruppo T di N_1 è non banale. Altrimenti x, dovendo centralizzare gli elementi di ordine 2 in T, deve centralizzare T per la condizione vista in (3). Ma allora, ragionando modulo il complemento di T in N_1, ogni 2-sottogruppo è $\breve{d}$-elemento, essendo contenuto in $< x , T >$ che è abeliano, ogni p-sottogruppo è $\breve{d}$-elemento perchè $E \leq \mathcal{C}(N_1)$, quindi il gruppo $< x , E >$ sarebbe modulare, un assurdo. Ora, se $p \neq q$ sono elementi di $\omega(G/B)$, relativi a fattori distinti, allora ogni p-elemento k centralizza ogni q-elemento g. Infatti, sia $p > q$; risulta $<B , k> \leq_{\breve{d}} G$ e $<B , k> \cap <g> = \{1\}$, quindi $[< g , k >/<g>] \simeq [<k>/\{1\}]$, il che implica $|<g , k >| = |g| \cdot |k|$ e $<g , k> \simeq < g , k > B/B$, abeliano. Allora, siano P/B e Q/B due fattori diretti di G/B; P/B e Q/B possono essere gruppi primari o P_o^*-gruppi; in ogni caso, per quanto visto, esiste un p-elemento $k \in P$ che non centralizza B e tale che $P/B = < k , L >/B$, con $L \leq \mathcal{C}(B)$. Ma se diciamo $B_1 = \mathcal{C}_B(k)$, risulta $B = B_1 \times B_2$, e il sottogruppo S di G generato da tutti i p-elementi è un fattore diretto di Hall in G, che non contiene q-elementi: è di Hall in quanto contiene B_2 e centralizza B_1, ed ogni q-elemento centralizza ogni p-elemento. Allora $\mathfrak{L}(G)$ sarebbe decomponibile, una contraddizione. Anche iii) risulta ora completamente provata, nel senso che x non può centralizzare alcun Sylowgruppo di N_1, altrimenti (essendo anche $E \leq \mathcal{C}(N_1)$) tale sottogruppo sarebbe un sottogruppo di Hall centrale ed $\mathfrak{L}(G)$ sarebbe decomponibile, contro l'ipotesi.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. A tale scopo, consideriamo un $\breve{d}$-sottogruppo H di G e un sottogruppo K che sia d-elemento in $[G/H]$; il nostro scopo è provare $K \leq_{\breve{d}} G$. Diciamo N_1 il sottogruppo divisibile di G tale che, nel caso ii), N_1/B sia il massimo sottogruppo divisibile di G/B (tale «massimo» esiste data la struttura del gruppo, cfr. 3.4), negli altri casi $N_1 = B$. È chiaro che ogni sottogruppo di $\mathcal{C}_G(N_1)$ è quasinormale in G, essendo G un (q)-gruppo (cfr. [3]), e $\mathcal{C}_G(N_1)$ abeliano. Allora, per l'osservazione 1, ogni sottogruppo di $\mathcal{C}_G(N_1)$ è $\breve{d}$-elemento e dunque non è restrittivo supporre $K \nleq \mathcal{C}_G(N_1)$. Allora esiste un $k \in K$ tale che $K = < k , T >$, con $R \leq \mathcal{C}_G(N_1)$; decomponiamo $N_1 = N_2 \times N_3$, ove $k \in \mathcal{C}(N_2)$, mentre k induce su ogni Sylowgruppo di N_3 un automorfismo potenza non identico. Vediamo anzitutto che $K \geq N_3$. Non è restrittivo supporre che N_3 si riduca ad un sottogruppo di Sylow P di N_1, ragionando in un opportuno quoziente ; inoltre, sostituendo k con una sua potenza, possiamo supporre che l'automorfismo indotto su P sia di ordine primo q, e ragionare modulo $< k^q >$. Se anche H contiene k, devono essere isomorfi i reticoli $[< k > / \{1\}]$ e $[< k , z > / < hz >]$, per $z \in P$ e $z \notin K$; assurdo per z opportuno. Se H non contiene k, deve essere $[< H , k > / H] \simeq [< H , k , z > / < H , kz >]$, ma $[< H , k , z > / < H , kz >] \simeq [< k , z > / < kz > \cup (H \cap < k , z >)]$; essendo $< k , z > \cap H = < z > \cap H$, per una scelta opportuna di z abbiamo una contraddizione.

Dobbiamo ora provare che $K \leq_{\breve{d}} G$, sapendo che $K \leq \mathcal{C}(N_2)$ e $N_3 \leq K$. In base alla proposizione 1.5, è sufficiente provare che, dato un insieme finito di elementi di K $k_1, \ldots, k_m$, e dato un insieme finito di elementi di G $h_1, \ldots, h_n$, risulta

(*) $[< k_1, \ldots, k_m > \cup S/S] \simeq [< k_1, \ldots, k_m, h_1, \ldots, h_n > / < h_1, \ldots, h_n >]$,

ove $S = K \cap < h_1, \ldots, h_n >$. Ma chiaramente è sufficiente provare che ogni sottogruppo di K contenente S è permutabile con $< h_1, \ldots, h_n >$, e dunque che $< S , k >$ è permutabile con $< h >$, se $< h > \cap K = S$. Trattiamo anzitutto i primi casi, i) e ii). Se $| k | = q^n$, $k_1^{q^m} = k$ e $< k_1 > N_1 = G$, allora consideriamo $< k_1^\beta y > \cap K$, per $y \in N_1$. Possiamo supporre $| < k_1^\beta y > |$ una potenza di q, dal momento che ogni sottogruppo di N_1 è quasinormale; sia $\beta = q^r \gamma$, con γ primo con q ; se $r > m$, allora evidentemente $k_1^\beta y \in K$, poichè K contiene N_3. Se $r \leq m$, allora $(k_1^\beta y)^{q^{m-r}} = k^\gamma y'$, ove $y' \in N_3$, perchè k centralizza N_2. Ma allora nulla cambia sostituendo k con $k^\gamma y'$, e possiamo supporre che $< k_1^\beta y >$ contenga $< k >$; allora un sottogruppo ciclico di K unito con $< k > = S = < k_1^\beta y > \cap K$ dà un gruppo del tipo $< z > < k >$, $z \in N_1$, che è permutabile con $< k_1^\beta y >$, come si voleva. Rimane da trattare il caso iii). Supponiamo dapprima $x \notin K$, ma $x^{q^n} \in K$. Un elemento di R, di ordine potenza di q, è del tipo $x^\alpha a^\beta y$, con $|a| = p$, $y \in B$; naturalmente, se $\alpha \equiv 0$ mod. q, è $\beta \equiv 0$ mod. p. Allora, se $\alpha = q^m \gamma$, γ primo con q, e se $m < n$, risulta $(x^\alpha a^\beta y)^{q^{n-m}} = x^{q^n \gamma} y' \in K$, e si conclude come sopra. Se invece $x \in K$, non possiamo sperare di avere ancora la situazione $S \cup < k >$ permutabile con $< h >$, per ogni $k \in K$; basta pensare a $< x >$ e $< xa >$, che non sono permutabili per $|a| = p$, mentre se $a \notin K$ è $< xa > \cap$

$\cap K = < x^q >$. Dovremo quindi verificare direttamente l'isomorfismo tra i reticoli ($*$) ; osserviamo anzitutto che $N_1 \leq K$, e dunque se nella scrittura di $h_1, \dots, h_n$ compaiono almeno potenze q-esime di x, il gruppo $< h_1, \dots, h_n >$ è prodotto di un sottogruppo di K per un sottogruppo (normale) di ordine p^r. Pertanto supporremo $h_1 = x^\alpha ay$ con $\alpha \not\equiv 0$ mod. q, $|a| = p$, $y \in N_1$; non è restrittivo, sostituendo x con $x^\alpha y$, assumere $\alpha = 1$, $y = 1$.

In particolare, il gruppo $\bar{H} = < h_1, \dots, h_n >$ contiene x^q. Ora, se $h_i = x^\beta a' y'$, con $|a'| = p$, $y' \in N_1$, $\beta \not\equiv 0$ mod. q, risulta $(x^\beta a' y')^q = x^{\beta q} y'^\gamma$ con $(\gamma, |y'|) = 1$ per ipotesi, dunque $y' \in \bar{H}$, ossia il gruppo $\bar{H}$ è generato da xa e da un sottogruppo $E_1 \times B_1$, ove $|E_1| = p^s$, $B_1 \leq B$. Analogamente, un sottogruppo $\bar{K}$ contenuto in K e contenente $S = \bar{H} \cap K$ e $x^\beta bz$, $|b| = p$, $z \in B$, $\beta \not\equiv 0$ mod. q (altrimenti $\bar{K}$ sarebbe permutabile con $\bar{H}$), conterrà in particolare $x^\beta b$, che non è restrittivo assumere uguale a x^β, e dunque $x \in \bar{K}$, per cui $\bar{K} = < x > (E_2 \times B_2)$, $|E_2| = p^t$, $B_2 \leq B$. Dobbiamo ora verificare che risultano isomorfi gli intervalli $[\bar{K}/S]$ e $[\bar{K} \cup \bar{H}/\bar{H}]$ (tramite gli isomorfismi $\varphi^{\bar{H}}$ e $\varphi_{\bar{K}}$). A tale scopo, verifichiamo che per $S \leq X \leq \bar{K}$ risulta $(X \cup \bar{H}) \cap K \leq X$ (condizione sufficiente per l'iniettività di $\varphi^{\bar{H}}$) ; poichè questo è ovvio se X è permutabile con $\bar{H}$, supponiamo che anche X sia del tipo $< x > (E_2 \times B_2)$; allora un elemento di $\big(< x > (E_2 \times B_2) \cup < ax > (E_1 \times B_1)\big) \cap K = (< x, a > \big((E_1 \cup E_2) \times (B_1 \cup B_2)\big) \cap K$ è del tipo $x^\alpha a^\beta cy \in K$ con $c \in E_1 \cup E_2$, $y \in B_1 \cup B_2 \leq K$, e dunque $a^\beta c \in K$. Poichè $B_1 \leq K$, allora $B_1 \leq \bar{H} \cap K = S \leq \bar{K}$, dunque $B_1 \leq B_2$. Per concludere che $x^\alpha a^\beta cy \in < x > (E_2 \times B_2)$, basterà quindi provare che $a^\beta c \in E_2$. Consideriamo a tale scopo il p-Sylowgruppo A di K, abeliano elementare. Poichè il gruppo $< x, A \cup E_1 \cup < a > >$ è modulare, e poichè $<xa> E_1 \cap <x> A \leq \leq < x > E_2$, risulta $(< x > E_2 \cup < xa > E_1) \cap < x > A = < x > E_2$, come si voleva. Per provare la suriettività di $\varphi^{\bar{H}}$, scelto un $X = <ax>(E_3 \times B_3)$, tale che $<ax>(E_1 \times B_1) \leq X \leq <a, x>(E_1 E_2) \times (B_1 B_2)$, vediamo che risulta $B_3 \leq B_2$ e dunque $(B_3 \cap \bar{K}) \cup B_1 = B_3$; per gli elementi di $<ax> E_3$, si ragiona come sopra nel gruppo modulare $< x, a, A, E_1 >$.

3.8. Teorema. Sia G un gruppo iperciclico periodico. G è un $\check{D}$-gruppo se e solo se è un prodotto (discreto) di una famiglia $\{R_i\}$ di sottogruppi di Hall in G, ove R_i è un p-gruppo modulare o un P_0^*-gruppo (generalizzato), oppure ha la struttura descritta in 3.7.

DIMOSTRAZIONE. Si applica 1.4 ad una decomposizione di $\mathfrak{L}(G)$ in reticoli indecomponibili, e si conclude usando 3.7.

4. – $\breve{D}$-gruppi misti iperciclici.

È conveniente distinguere in due classi i gruppi misti: quelli separati, in cui l'insieme degli elementi periodici è un sottogruppo (e che sono dunque generati dagli elementi aperiodici), e quelli non separati.

Osserviamo che un gruppo iperciclico misto e separato G possiede un sottogruppo finito e non identico che sia $\breve{d}$-elemento; infatti il sottogruppo T generato dagli elementi periodici è normale in G, quindi esiste un sottogruppo normale ciclico, e non identico, contenuto in T ([1], Lemma 2); questo sottogruppo è un $\breve{d}$-elemento finito.

4.1. TEOREMA. Sia G un gruppo misto iperciclico, separato. G è un $\breve{D}$-gruppo se e solo se è modulare, oppure:

i) il sottogruppo periodico T di G è abeliano,

ii) G/T è abeliano di rango uno,

iii) ogni elemento aperiodico $g \in G$ induce sul p-Sylowgruppo T_p di T un automorfismo potenza $\alpha_p : x \longmapsto x^{m_p}$ tale che $m_p \equiv 1$ mod. p, $m_2 \not\equiv 1$ mod. 4 e T_2 è divisibile.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo dapprima la necessità della condizione. Sia N il sottogruppo di G unione di tutti i sottogruppi ciclici finiti che sono $\breve{d}$-elementi, M il sottogruppo tale che M/N sia l'unione di tutti i sottogruppi ciclici finiti di G/N che sono $\breve{d}$-elementi. Il $\breve{D}$-gruppo G/M è aperiodico in virtù di 3.6, perciò abeliano (2.3), M è un $\breve{D}$-gruppo periodico. Proviamo che M è abeliano.

Decomposto M nel prodotto diretto di gruppi coprimi reticolarmente indecomponibili, se uno di tali gruppi, diciamolo R, è modulare, allora, modulo il complemento di R in M, ogni sottogruppo ciclico di R è $\breve{d}$-elemento; ma allora è normalizzato da ogni elemento aperiodico: infatti se a è aperiodico e $< g >$ è finito, nel gruppo $< a , g >$ anche il gruppo $< g > \cup < g >^a$ è $\breve{d}$-elemento, ma allora $[< a , g >/< a >] \simeq [< g >/\{1\}] \simeq [< g > \cup < g >^a/\{1\}]$; e dunque $< g >$ è normale. Allora, essendo il gruppo generato dagli elementi aperiodici, ogni sottogruppo di R è normale, pertanto R è abeliano o Hamiltoniano. Poichè un gruppo Hamiltoniano è privo di automorfismi potenza, non è possibile che R sia Hamiltoniano, altrimenti sarebbe centralizzato dagli elementi aperiodici, e dunque nel centro di G. Supponiamo ora che R sia del tipo descritto in 3.7, quindi $R = < k > EN_1$, ove N_1 è divisibile (e coincide con il sottogruppo B nei casi i) e iii) di 3.7, mentre nel caso ii) N_1/B è il massimo sottogruppo divisibile di R/B), $|k| = q^n$, E è un p-gruppo, $p > q$, eventualmente identico. Consideriamo un $\breve{D}$-gruppo $<a>$ $(< k > EN_1)$, con a aperiodico; non è restrittivo supporre che a centralizzi $<k> EN_1/N_1$, sostituendo eventualmente a con una sua potenza opportuna. Allora $<a> N_1 \leq_{\breve{d}} <a , k > EN_1$; ragionando modulo $< k > \cap N_1$, si ha $[< a >/\{1\}] \simeq [< a , k >/<k>]$, reticolo di un gruppo infinito, e dunque $< k >^a$ non può essere diverso da $< k >$ in quanto il gruppo $< k > \cup < k >^a$ è finito. Ma allora $< k >$ deve essere normale in $< k > N_1$, assurdo. Pertanto il sottogruppo di torsione $M = T$ di G è abeliano; inoltre ogni elemento aperiodico induce su T un automorfismo potenza. Se ora $p \neq 2$ e P è il p-Sylowgruppo di T, nel quoziente di G sul complemento di P in T consideriamo il $\breve{D}$-gruppo $< a > P$, con a apedico. Se a non induce su P una potenza $m \equiv 1$ mod. p, esiste un r primo con p tale che a induca su P una tale potenza ([8], 4.1.2). Allora $< a^r , P >$ è un gruppo quasi-Hamiltoniano, e dunque ogni suo sottogruppo è $\breve{d}$-elemento. Se $x \in P$, $|x| = p$, risulterà dunque $[< x\, a^r >/< a^{rp} >] \simeq [< xa^r , a^p >/< a^p >]$ un reticolo di lunghezza l. Ma, detti l ed n due numeri interi tali che $lr + np = 1$, si ha $(xa^r)^l a^{np} = x^l a^{rl} a^{np} = x^l a \in < xa^r , a^p >$; ora, se $a^{-1} xa = x^m$, risulta $(x^l a)^p = x^{l(1+m+\ldots+m^{p-1})} a^p$; ma $1 + m + \ldots + m^{p-1} = \dfrac{m^p - 1}{m - 1} \not\equiv 0$ mod. p, infatti $m^p \equiv m \not\equiv 1$ mod. p; allora $< xa^r , a^p >$ contiene $< x >$, e dunque anche $< a >$, quindi ci sono due gruppi diversi che contengono $< a^p >$, assurdo. Se ora P è un 2-gruppo, a centralizza i sottogruppi di ordine 2, poichè li normalizza; se la potenza indotta da a non è $\equiv 1$ mod. 4, deve risultare anzitutto $P^2 = P^4$, altrimenti il $\breve{D}$-gruppo periodico $< a , P >/< a^2 , P^4 >$ non sarebbe modulare pur avendo esponente finito. Ora, se ci fosse un elemento $y \in P$ di ordine 2 non appartenente a P^2, essendo $< a , P^2 > \leq_{\breve{d}}$ $< a , P >$ $(< a , P >/P^2$ è abeliano) dovrebbe risultare $[< ax >/$ $< a^2 >] \simeq [ax , ay >/<ay >]$ per ogni $x \in P^2$, con $|x| = 4$, mentre $< ax , ay >$ contiene xy^{-1}, che ha ordine 4.

Proviamo ora che, se G non è abeliano, G/T ha rango uno. Sia a un elemento aperiodico che non centralizza T, e supponiamo per assurdo che esista un elemento aperiodico b tale che $< a > \cap < b > = \{1\}$. Possiamo supporre che $< b , T >$ sia quasi-Hamiltoniano, sostituendo eventualmente b con b^2. Risulta quindi $< bx > \leq_{\breve{d}} G$ per ogni $x \in T$; ora, se $a^{-1} ba = bt$ con $1 \neq t \in T$, risulta $t \in < a, b >$, mentre il reticolo $[< a , b >/< a >] \simeq [< b >/\{1\}]$ deve essere il reticolo di un gruppo ciclico infinito. Pertanto a centralizza b, e analogamente centralizza bx per ogni $x \in T$, il che è assurdo perchè ne segue che a centralizza T.

Sufficienza della condizione: consideriamo un gruppo G, non modulare e soddisfacente a i)-iii). Siano $H \leq_{\breve{d}} G$ e K $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$. Proviamo che, se $K \nleq G^2$, allora K contiene il 2-Sylowgruppo P di T. K contiene un elemento aperiodico a che induce su P una potenza $\not\equiv 1$ mod. 4, e supponiamo che K non contenga x^2, $|x| = 4$. Se $a \in H$, risulta $[< a >/< a^2 >] \simeq [< a , ax >/< ax >]$, assurdo; allora sia $H \leq G^2$, e dunque $H \leq_q G$ ([4], Teorema 1.3). Dimostriamo che $< ax > \cap H = < a , x > \cap H$; infatti da $< a x > \cap H \lneqq < a , x > \cap H$ segue $(< a , x > \cap H) \cup < ax > = < a , x > \cap (H \cup < ax >) \geq < ax , x^2 > > < ax >$. Ma da $x^2 \in H \cup < ax >$ segue $x^2 = h(ax)^m$; se $(m , 2) \neq 1$, $x^2 = ha^m$ implica $x^2 \in K$, contro l'ipotesi se invece $(m , 2) = 1$, $x^2 = ha^m x$ e dunque $x \in K$, ancora contro l'ipotesi. Allora, essendo H un elemento di Dedekind, il reticolo $[< a , x > \cup H/< ax > \cup H] \simeq [< a , x >/< ax >]$ ha lunghezza due, mentre il reticolo $[< a > \cup H/< a^2 > \cup H]$ ha lunghezza minore di o uguale a uno, e dunque K, che contiene $< a >$, non può essere un $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$. K deve pertanto contenere tutti gli elementi di ordine 2, ma lo stesso ragionamento vale in $G/\Omega_1(P)$, e per induzione si conclude $K \geq P$. Ora. per provare $K \leq_{\breve{d}} G$, in base alla proposizione 1.5 è sufficiente provare che, dato un insieme finito $h_1 , \dots , h_n$ di elementi di G, e posto $S = K \cap < h_1 , \dots , h_n >$, e dato un insieme finito di elementi di K $k_1 , \dots , k_m$, risulta $[< k_1 , \dots , k_m > \cup S/S] \simeq [< h_1 , \dots , h_n , k_1 , \dots , k_m >/< h_1 , \dots , h_n >]$. Ma chiaramente è sufficiente provare che ogni sottogruppo di K contenente S è permutabile con $< h_1 , \dots , h_n >$, e dunque che $< S , k >$ è permutabile con $< h >$, se $< h > \cap K = S$. Sia dunque $< h > \nleq G^2$ (altrimenti $< h > \leq_q G$), e anche $< k > \nleq G^2$, per cui h e k soso due elementi aperiodici. Poichè $< h , k > T/T$ è ciclico, sarà $h = c^r$, $k = c^s t$, con c aperiodico, $t \in T$, $(r , 2) = (s , 2) = 1$. Sia $t = t_1 t_2$, con $(|t_1| , |t_2|) = 1$, $|t_2|$ una potenza di 2. Poichè

$K \geq P$, allora $K \cap < h > \, \geq \, < c^{sm} >$, con m numero dispari opportuno tale che $(c^s t_1)^m = c^{sm} = c^{rn}$. Ma allora $< k > \cup S$ contiene $(c^s t_1 t_2)^m = c^{sm} t_2^{\alpha^{m-1}+\ldots+\alpha+1}$, se $c^{-s} t_2 c^s = t_2^\alpha$; essendo per ipotesi $\alpha = -1 + 4\beta$, si avrà $t_2^{\alpha^{m-1}+\ldots+\alpha+1} = (t_2 t_2^{-1+4\beta})^{1+\gamma\ldots+\gamma^{(m-1)/2}} t_2$, e dunque $< k > \cup S$ contiene t_2, ossia $< k > \cup S = < c^s t_1 > < t_2 > S$; ma $< h >$ è permutabile con S, con $< t_2 >$ che è normale, e con $< c^s t_1 >$ perchè $c^s t_1$ *e* h sono contenuti nel gruppo $< c > < t_1 >$, quasi-Hamiltoniano. Si è quindi dimostrato che $K \leq_{\breve{d}}^{\breve{q}} G$.

4.2 Teorema. Sia G un gruppo ipercilico misto non separato. G è $\breve{D}$-gruppo se e solo se G è un (q)-gruppo del tipo $< c, A >$, con A gruppo (misto) divisibile, $|c| = 2^m$, $c^{-1}ac = a^{-1}$ per ogni $a \in A$.

Dimostrazione. Proviamo dapprima la necessità della condizione. Sia N il sottogruppo di G generato da tutti i $\breve{d}$-sottogruppi ciclici finiti, M il sottogruppo tale che M/N sia generato da tutti i $\breve{d}$-sottogruppi ciclici finiti di G/N. Allora G/M non ha $\breve{d}$-sottogruppi ciclici finiti, ed è un gruppo misto, altrimenti G sarebbe separato. Poniamo, per comodità, $M = \{1\}$, e consideriamo una serie ascendente di G, invariante e a fattori ciclici, $\{G_\alpha\}_{\alpha \leqslant \gamma}$; sia β_0 il minimo ordinale tale che G_{β_0} contiene un elemento periodico; chiaramente $\beta_0 = \beta + 1$, e non è restrittivo assumere $|G_{\beta_0}/G_\beta| = p$, numero primo. Deve risultare $p = 2$ ([1]), e se $c \in G_{\beta_0}$, con $|c| = 2$, allora c induce un automorfismo potenza non identico su G_β (2.2, caso a)). G_β è divisibile, infatti se $G_\beta^q \neq G_\beta$ per qualche numero primo q, allora $< c, G_\beta > / G_\beta^q$ è $\breve{D}$-gruppo di esponente finito, quindi modulare, e dunque $< c, G_\beta^q >$ è $\breve{d}$-elemento, ma allora $[< c > / \{1\}] \simeq [< c, ca > / < ca >]$, reticolo infinito, non appena $a \notin G_\beta^q$ e a è aperiodico, assurdo. Vediamo ora che $|G : G_\beta| = 2$; infatti, se b è tale che $< b > G_{\beta_0}/G_{\beta_0}$ sia aperiodico, e normale in G/G_{β_0}, allora al più b^2 centralizza G_β, e dunque si avrebbe il $\breve{D}$-gruppo $< c, < b^2 > \times G_\beta >$ con $< b^2 > \times G_\beta$ non divisibile, assurdo per quanto visto. Supponiamo dunque che vi sia un $\breve{D}$-gruppo $< b, c, G_\beta >$ con $|< b, c, G_\beta > / G_\beta >| = 2q$. Sia $q \neq 2$; $< b, G_\beta >$ è un $\breve{D}$-gruppo; non è aperiodico per quanto visto sopra, infatti non è divisibile; allora contiene un elemento di ordine q, ed è abeliano (2.2, caso a)), assurdo perchè ci sarebbe un $\breve{d}$-elemento ciclico finito in G/M. Sia $q = 2$. Ogni 2-Sylowgruppo di $< b, c, G_\beta >$ deve avere ordine 2, perchè se avesse ordine 4 ci sarebbe un 2-elemento che centrallizza G_β, e allora dovrebbe stare in M. $< b, G_\beta >$ è un $\breve{D}$-gruppo, e dunque non può essere aperiodico ; sia dunque d un elemento periodico in $<b, G_\beta>$; sarà $|d| = 2$. Se ora $c^{-1}dc = da$, con a aperiodico $\neq 1$, e se $a_1^2 = a$, allora $|da_1| = 2$ e $c^{-1}(da_1)c = daa_1^{-1} = da_1$, così $< da_1 >$ è normalizzato da c, assurdo perchè darebbe luogo a un gruppo di ordine 4. Togliamo ora l'ipotesi $M = \{1\}$, e consideriamo il gruppo R tale che $R/M = G_\beta$; R è un $\breve{D}$-gruppo misto e separato, quindi sappiamo che la sua parte periodica è abelliana ; proviamo che R è abeliano. Se P è un p-Sylowgruppo di R con $p \neq 2$, possiamo considerare il gruppo quoziente rispetto al complemento di P in M ; $< c > \cap P = \{1\}$, c normalizza ogni sottogruppo di P (tali sottogruppi sono $\breve{d}$-elementi), dunque induce su P l'inversione. Ora $< a, P > \leq_{\breve{d}} G$ per ogni $a \in R$ aperiodico. Non può essere $c^{-1}ac = a^{-1}t$ con $1 \neq t \in P$, altrimenti risulterebbe $[< a >/\{1\}] \neq [< a, c >/ < c >]$. Quindi, per a aperiodico qualunque, c induce l'inversione su ta e dunque a centralizza t. Vediamo ora che $R^p = R$, ossia P è divisibile (ricordiamo che R/P era divisibile). Infatti, se $y \in R \setminus R^p$ è periodico, e se $a \in R^p$ è aperiodico, da $< c, R^p > \leq_{\breve{d}} G$ segue $[< ca >/\{1\}] \simeq [< ca, cy >/< c\, y >]$, mentre cy ha ordine 2 e $< ca, cy >$ contiene $y^{-1}a$, aperiodico. Supponiamo ora che P sia il 2-Sylowgruppo di R ; ragioniamo anzitutto modulo $< c^2 > = < c > \cap P$. Applicando lo stesso ragionamento usato nel caso $p \neq 2$, e osservando che c induce su P l'inversione perchè induce l'inversione su ta, per ogni $t \in P$ e a aperiodico, in particolare un a che centralizza t, si conclude che R è abeliano ed $R^2 = R$. Abbandoniamo ora l'ipotesi $c^2 = 1$. Di nuovo R è abeliano ; infatti essendo $<c^2>$ un sottogruppo normale finito ed $R/< c^2 >$ divisibile, si ha $< c^2 > \leq Z(R)$; ora per $x, y \in R$ e $x_1^n c^{2\alpha} = x$, ove $n = |c^2|$, è $x^{-1}yx = x_1^{-n}yx_1^n = y$. Allora $R = A \times < d >$, ove A è il massimo sottogruppo divisibile di R, $c^{-1}ac = a^{-1}$ per ogni $a \in A$ ed ogni sottogruppo di R è $\breve{d}$-elemento, e di conseguenza quasinormale in G (i sottogruppi finiti di ordine dispari sono normali, quelli di ordine pari sono normalizzati dagli elementi di R e sono quasinormali nei 2-gruppi ; se $< x >$ è aperiodico, allora x è centralizzato dagli elementi di R, mentre se y è un 2-elemento, allora $< x^{|d|} >$ è normalizzato da y, $< x, y >/< x^{|d|} >$ è un 2-gruppo, quindi $< x >$ è quasinormale in esso.). Quindi G è un (q)-gruppo ([4], sufficienza del teorema 2.3).

Sufficienza della condizione. Siano $H \leq_{\breve{d}} G$, K $\breve{d}$-elemento in $[G/H]$; dal momento che ogni sottogruppo di $\mathcal{C}_G(A)$ è $\breve{d}$-elemento in G, essendo G (q)-gruppo e $\mathcal{C}_G(A)$ abeliano, supponiamo $c \in K$, e dimostriamo che allora $K \geq A$, ossia $K = G$. Infatti, se anche H

contiene c, dato un elemento aperiodico $a \in A$, se $a \notin H$ è $[<c>/<c^2>] \simeq [<a, c>/<ac>]$, assurdo. Supponiamo invece $H \leq \mathcal{C}_G(A)$, e ragioniamo modulo $<c^2>$. Supponiamo $a \notin K$, $a \in A$. Dovendo risultare $[<H, c>/<c^2, H>] \simeq [<H, c, a>/<H, ca>]$ ed essendo $H \leq_q G$, si ha pure $[<H, c, a>/<H, ca>] \simeq [<c, a>/<ca> \cup (<a> \cap H)]$; quindi $a^p \in H$ per qualche numero primo p dipendente da a; ma allora $A \leq H$, come si voleva.

BIBLIOGRAFIA

[1] R. Baer, *Supersoluble groups*, Proc. Amer. Math. Soc., **6** (1955), pp. 16-32.

[2] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. (1967).

[3] F. Menegazzo, *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Padova, **40** (1968), pp. 1-15.

[4] F. Menegazzo, *Gruppi nei quali la relazione di quasi-normalità è transitiva*, II, Rend. Sem. Mat. Padova, **42** (1969), pp. 389-399.

[5] F. Menegazzo, *Dual-Dedekind subgroups in finite groups*, Rend. Sem. Mat. Padova, **45** (1971), pp. 99-111.

[6] E. Previato, *Gruppi in cui la relazione di Dedekind è transitiva*, Rend. Sem. Mat. Padova, **54** (1975), pp. 215-229.

[7] D. J. S. Robinson, *Finiteness conditions and generalized soluble groups*, Erg. der Mathematik, Band 62, Springer Verlag, Berlin.

[8] D. J. S. Robinson, *Groups in which normality is a transitive relation*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 60, part 1 (1964), pp. 21-38.

[9] M. Suzuki, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Springer (1958).

[10] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, Chelsea (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° settembre 1977 e in forma revisionata il 29 maggio 1978.