RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDUARDO GONZALEZ

ITALO TAMANINI

**Convessità della goccia appoggiata**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 58 (1977), p. 35-43

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1977__58__35_0>

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 58 (1977)

# Convessità della goccia appoggiata.

EDUARDO GONZALEZ - ITALO TAMANINI (*)

## Introduzione.

Il problema di una goccia di liquido appoggiata ad un piano orizzontale, sottoposta alle forze di gravità, tensione superficiale ed interazione fra liquido e superficie di appoggio, è stato recentemente studiato dal primo dei due autori. In [1] e [2] vengono usate tecniche variazionali per dimostrare un teorema di esistenza ed un primo risultato di regolarità della soluzione di tale problema.

I risultati ottenuti vengono completati in questo lavoro, nel quale dimostriamo la convessità (e quindi, la regolarità fino al bordo) della soluzione.

L'idea fondamentale che viene usata, consiste nel confrontare la soluzione del problema della goccia appoggiata con quella del problema analogo in assenza di gravità.

Rimandiamo all'articolo espositivo di R. Finn [3] per le questioni matematiche che hanno origine da fenomeni di capillarità, ed ai lavori [1] e [2] per le notazioni ed i risultati che utilizzeremo.

## 1. - Posizione del problema.

Col nome di « problema della goccia appoggiata » intenderemo il problema di minimizzare il funzionale

(*) Indirizzo degli AA.: Dipartimento di Matematica e Fisica della Libera Università degli Studi di Trento - 38050 Povo (Trento).

Lavoro eseguito nell'ambito dello GNAFA - CNR.

$$F_\nu(E) = \int_{t>0} |D\varphi_E| + \nu \int_{t=0} \varphi_E \, dH_{n-1} + \int_E t \, dx \tag{1.1}$$

nella classe

$$\mathcal{E} = \left\{ E \subset R^n \cap \{t > 0\} \ : \ \int |D\varphi_E| < +\infty \ , \ H_n(E) = 1 \right\} \tag{1.2}$$

(se $x \in R^n$, scriveremo anche $x = (y, t)$ con $y \in R^{n-1}$, $t \in R$).

La costante $\nu$ corrisponde, nel problema fisico, al coseno dell'angolo compreso fra la normale esterna alla superficie della goccia, nei punti di contatto col piano di appoggio $\{t=0\}$, ed il semiasse $t < 0$: nel seguito, tale angolo sarà chiamato semplicemente « angolo di attacco ». Relativamente a questo problema, ricordiamo i seguenti risultati stabiliti in [1] e [2]:

(1.3) *Esistenza del minimo.*

*Per* $-1 < \nu \leq 1$, *esiste un insieme* $E_0$ *di* $\mathcal{E}$, *tale che* $F_\nu(E_0) = \min\limits_{\mathcal{E}} F_\nu$. *Le sezioni orizzontali di* $E_0$ *sono dischi* $n-1$ *dimensionali, centrati sull'asse* $t$. Segue da ciò che *il minimo* $E_0$ *può guardarsi come l'insieme di rotazione definito da una funzione* $\varrho_0(t)$:

$$E_0 = \{(y, t) : y \in R^{n-1}, \ t > 0 \ , \ |y| < \varrho_0(t)\} .$$

*Tale funzione è limitata, ed esiste inoltre* $T > 0$ *tale che* $\varrho_0(t) > 0$ *per* $0 < t < T$, $\varrho_0(t) = 0$ per $t > T$.

(1.4) *Regolarità del minimo.*

*La parte della frontiera di* $E_0$, *contenuta nella striscia* $\{0 < t < T\}$, *è una varietà analitica* $n-1$ *dimensionale*; *anche il vertice della goccia, ossia il punto* $(0, \dots, 0, T)$, *è un punto di analiticità di* $\partial E_0$.

## 2. - La goccia in assenza di gravità.

Per studiare alcune proprietà qualitative della soluzione del problema della goccia appoggiata, è utile considerare il funzionale

$$(2.1) \qquad G_\nu(E) = \int_{t>0} |D\varphi_E| + \nu \int_{t=0} \varphi_E \, dH_{n-1} \,,$$

definito ancora per $E \in \mathcal{E}$, con $-1 < \nu \leq 1$. $G_\nu$ rappresenta l'energia di una goccia di liquido non soggetta alla forza di gravità. Come immediata conseguenza della diseguaglianza isoperimetrica (vedi [4], [5]), si ottiene che il minimo $B_0$ del funzionale $G_\nu$ su $\mathcal{E}$ è l'intersezione, col semispazio $\{t > 0\}$, di una sfera di centro $c_0$ (situato sull'asse $t$) e raggio $R_0$; centro e raggio sono determinati in modo che tale intersezione abbia misura 1, e che il coseno dell'angolo di attacco sia uguale a $\nu$. Ossia,

$$(2.2) \qquad B_0 = \{(y\,, t) \,:\, t > 0\,, \, |y| < r_0(t) = (R_0^2 - (t - c_0)^2)^{\frac{1}{2}}\} \,,$$

con $R_0$ e $c_0$ determinati dalle condizioni

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} & H_n(B_0) = 1 \\ & \nu = r_0'(0)\left[1 + r_0'^2(0)\right]^{-\frac{1}{2}} \\ & (r_0'(0) = +\infty \quad \text{se} \quad \nu = 1)\,. \end{aligned}$$

## 3. - Il risultato di convessità.

In questo paragrafo dimostreremo che *l'insieme $E_0$, minimo del funzionale $F_\nu$ su $\mathcal{E}$, è convesso.*

Basterà evidentemente provare che $\forall\, t \in (0\,, T)$ vale $\varrho_0''(t) \leq 0$, dove al solito

$$(3.1) \qquad E_0 = \{(y\,, t) \,:\, t > 0\,, \, |y| < \varrho_0(t)\}\,.$$

Supponiamo per assurdo che esista $t_0 \in (0\,, T)$, tale che $\varrho_0''(t_0) > 0$. Consideriamo la famiglia delle palle $B \subset R^n$, con centro sull'asse $t$, tali che

$$(t_0\,, \varrho_0(t_0)) \in \partial B \quad , \quad \text{ossia del tipo}$$

$$(3.2) \qquad B = B(c\,, r) = \{(y\,, t) : |y| < r(t) = (R^2 - (t - c\,)^2)^{\frac{1}{2}}\}$$

$$\text{con} \quad r(t_0) = \varrho_0(t_0)\,.$$

Per $c$ sufficientemente grande, si avrà che

$$B \cap \{t \geq t_0\} \supset E_0 \cap \{t \geq t_0\}\,, \tag{3.3}$$

mentre vale l'inclusione opposta se $c$ è molto negativo. Si potrà dunque trovare un valore $\hat{c}$, tale che la corrispondente palla $\hat{B} = B(\hat{c}\,, \hat{r})$ verifichi, oltre alle (3.2), (3.3), la seguente condizione:

$$F = \partial\hat{B} \cap \partial E_0 \cap \{t > t_0\} \neq \varnothing\,. \tag{3.4}$$

Posto $\hat{t} = \min\,\{t:\ (y\,, t) \in F\}$ (l'esistenza del minimo segue dalla continuità di $\hat{r}\,, \varrho_0$ e dall'ipotesi $\varrho_0''(t_0) > 0$ , mentre ovviamente $\hat{r}''(t_0) < 0$), risulta che

$$\begin{aligned} &t_0 < \hat{t} \leq T \\ &\hat{r}(\hat{t}) = \varrho_0(\hat{t}) \\ &H_n[(\hat{B} - E_0) \cap \{t_0 < t < \hat{t}\}] > \\ &\qquad > H_n\,[(E_0 - \hat{B}) \cap \{t > \hat{t}\}] = 0\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A questo punto, un facile argomento di continuità mostra l'esistenza di una palla $B_1 = B\,(c_1\,, r_1)$, verificante (3.2) e tale che

$$\begin{aligned} &H_n[(B_1 - E_0) \cap \{t_0 < t < t_1\}] = \\ &\qquad = H_n[(E_0 - B_1) \cap \{t > t_1\}] > 0\,, \end{aligned} \tag{3.6}$$

dove si è posto

$$t_1 = \min\,\{t : t_0 < t < T\,,\ r_1(t) = \varrho_0(t)\}\,. \tag{3.7}$$

Per quanto visto nel paragrafo precedente, $B_1 \cap \{t > t_0\}$ minimizza il funzionale $\displaystyle\int_{t > t_0} |D\varphi_B|$ fra tutti gli insiemi $B \subset R^n$ tali che

$$\begin{aligned} &H_n[B \cap \{t > t_0\}] = H_n[B_1 \cap \{t > t_0\}] \\ &\varphi_B = \varphi_{B_1} = \varphi_{E_0} \quad \text{per} \quad t = t_0\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ora definiamo due nuovi insiemi $E_1$, $E_2$ contenuti nella striscia $\{0 < t < T\}$:

$$E_1 = \begin{cases} E_0 & \text{per } 0 < t \leq t_0 \\ B_1 & \text{per } t_0 < t < t_1 \\ E_0 \cap B_1 & \text{per } t \geq t_1 \end{cases} \tag{3.9}$$

$$E_2 = \begin{cases} E_0 & \text{per } 0 < t < t_1 \\ E_0 \cup B_1 & \text{per } t \geq t_1 . \end{cases} \tag{3.10}$$

È evidente che

$$H_n(E_1) = H_n(E_0)$$

$$\int_{E_1} t dx < \int_{E_0} t\, dx . \tag{3.11}$$

D'altra parte, $E_2$ verifica (3.8), e quindi

$$\int_{t>t_0} |D\varphi_{B_1}| \leq \int_{t>t_0} |D\varphi_{E_2}| . \tag{3.12}$$

Posto infine $A = \{t \geq t_1 : r_1(t) \geq \varrho_0(t)\}$, scrivendo la (3.12) sotto la forma equivalente

$$\int_A |D\varphi_{B_1}| + \int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{B_1}| \leq \int_A |D\varphi_{E_2}| + \int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{E_2}|$$

e ricordando la (3.10), si ottiene

$$\int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{B_1}| \leq \int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{E_2}| = \int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{E_0}| . \tag{3.13}$$

Dalle (3.9), (3.13) si ottiene allora

$$\int_{t>t_0} |D\varphi_{E_1}| = \int_{A} |D\varphi_{E_1}| + \int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{E_1}|$$

$$= \int_{A} |D\varphi_{E_0}| + \int_{\{t>t_0\}-A} |D\varphi_{B_1}| \leq \int_{t>t_0} |D\varphi_{E_0}| \,.$$

Questa relazione, assieme alla (3.11), porta all'assurdo $F_\nu(E_1) < < F_\nu\,(E_0)$.

## 4. - Regolarità al bordo.

Studiamo adesso la regolarità della goccia nei punti situati sugli iperpiani $\{t = 0\}$ , $\{t = T\}$ .

Da quanto si è appena dimostrato segue che $\varrho_0'(t)$ è una funzione non crescente in $(0\,, T)$ : esiste quindi il $\lim\limits_{t\to 0+} \varrho_0'(t) \in R \cup \{+\infty\}$ e, come facile conseguenza del teorema del valor medio, si ha che $\varrho_0 \in C^1([0\,, T))$ .

Pertanto, $\varrho_0$ *realizza il minimo del funzionale*

$$L_\nu(\varrho) = \omega_{n-1} \left\{ \int_0^T \left[(n-1)\,\varrho^{n-2}(t)\left(1 + \varrho'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}} + t\varrho^{n-1}(t)\right]dt + \nu\varrho^{n-1}(0) \right\} \tag{4.1}$$

*fra le funzioni* $\varrho \in C^1([0, T))$, *tali che*

$$\int_0^T \omega_{n-1}\, \varrho^{n-1}\,(t)\; dt = 1 \,. \tag{4.2}$$

La corrispondente equazione di Eulero, che è necessariamente verificata da $\varrho_0$ su $(0\,, T)$, si scrive :

$$\operatorname{curv} \varrho(t) = \left(\frac{\varrho'(t)}{\left(1 + \varrho'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}}\right)' = \frac{n-2}{\varrho(t)\left(1 + \varrho'^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}} + t + \text{cost.} \tag{4.3}$$

Si può allora osservare che, come conseguenza dei risultati ottenuti, la goccia assume il dato $\nu$ al bordo: ricordando che $\varrho_0$ minimizza (4.1) col vincolo (4.2), si ottiene infatti

$$\nu = \varrho_0'(0)\left(1 + \varrho_0'^2(0)\right)^{-\frac{1}{2}} = \cos\alpha\,, \tag{4.4}$$

dove il dato $\alpha$ rappresenta l'angolo di attacco. Inoltre si può facilmente mostrare che esiste $t_0 \in [0\,, T)$, tale che $\varrho_0$ è crescente in $[0\,, t_0]$ e decrescente in $[t_0\,, T)$.

Infatti, non può essere $\varrho_0'(t) > 0 \ \ \forall\, t \in [0, T)$, perchè altrimenti, posto $E_1 = \{(y\,, t) : (y\,, T-t) \in E_0\}$, si avrebbe $F_\nu(E_1) < F_\nu(E_0)$, assurdo.

Basta porre allora $t_0 = 0$ nel caso che

$$\varrho_0'(t) < 0 \quad \forall\, t \in [0\,, T)\ ,\ t_0 = \min\{t \in [0\,, T) \,:\, \varrho_0'(t) = 0\}$$

in caso contrario, e osservare che la condizione $\varrho_0'' \leq 0$ implica la monotonia in senso lato della funzione $\varrho_0$, mentre la (4.3) esclude eventuali tratti di costanza.

In questo modo si conclude che la parte della frontiera di $E_0$, contenuta nella striscia $\{t_0 < t < T\}$, è grafico nella direzione dell'asse $t$: con un procedimento analogo a quello seguito in [2], si ottiene che $\partial E_0 \cap \{t > t_0\}$ è grafico di una funzione analitica delle variabili $y \in R^{n-1}$.

Il risultato di regolarità stabilito in [2] è così completato, anche per quanto riguarda il comportamento della soluzione vicino al piano d'appoggio e rispettivamente al piano passante per il vertice.

## 5. - Confronto fra $E_0$ e $B_0$.

In questo paragrafo dimostriamo che, come è naturale aspettarsi, la superficie di appoggio bagnata dalla goccia è maggiore della corrispondente superficie nel caso di assenza di gravità. Il ragionamento usato è analogo a quello del paragrafo 3.

Come al solito, indichiamo con $E_0$ il minimo del funzionale (1.1) nella classe (1.2), con $B_0$ il corrispondente minimo del funzionale senza peso (2.1): $\varrho_0$ e rispettivamente $r_0$ sono le funzioni che li rappresentano come insiemi di rotazione (si vedano le (1.3), (2.2)). Supponiamo che risulti $\varrho_0(0) < r_0(0)$.

Esisterà allora una palla $B_1$ tale che

$$B_1 = \left\{ (y, t) : |y| < r_1(t) = \left(R_1^2 - (t - c_1)^2\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

(5.1)
$$r_1(0) \geq r_0(0)$$
$$\nu = r_1'(0) \left(1 + r_1'^2(0)\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$H_n[(B_1 - E_0) \cap \{0 < t < t_1\}] = H_n(E_0 - B_1) > 0$$

dove si è posto

$$t_1 = \min \{ t : r_1(t) = \varrho_0(t) \} . \tag{5.2}$$

Per quanto visto nel paragrafo 2, $B_1 \cap \{ t > 0 \}$ minimizza il funzionale $\int\limits_{t>0} |D\varphi_B| + \nu \int\limits_{t=0} \varphi_B \, dH_{n-1}$ fra tutti gli insiemi contenuti nel semispazio $\{ t > o \}$, che verificano la condizione

$$H_n(B) = H_n \left[B_1 \cap \{t > o\}\right] .$$

Definiamo ancora $E_1$, $E_2$ come in (3.9), (3.10), con $t_0 = 0$; con argomentazioni analoghe a quelle del paragrafo 3, si trova che $F_\nu(E_1) < F_\nu(E_0)$, in contrasto con l'ipotesi di minimalità di $E_0$.

Dev'essere quindi $\varrho_0(0) \geq r_0(0)$, che è quanto si voleva provare.

## BIBLIOGRAFIA

[1] E. Gonzalez, *Sul problema della goccia appoggiata*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 55 (1976), 289-302.

[2] E. Gonzalez, *Sulla regolarità della goccia appoggiata*, Questo stesso volume.

[3] R. Finn, *Capillarity Phenomena*, Uspehi Mat. Nauk 29 (1974), 131-152.

[4] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Memorie Acc. Naz. Lincei, Serie 8, 5 (1958).
[5] E. Gonzalez, G. Greco, *Una nuova dimostrazione della proprietà isoperimetrica dell'ipersfera*, Ann. Univ. Ferrara. 23 (1977), 251-256.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 maggio 1977.