Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Gabriele Darbo

Un'algebra locale reticolata che interviene nella teoria dei sistemi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 60 (1978), p. 115-139
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1978__60__115_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

REND. SEM. MAT. UNIV. PADOVA, Vol. 60 (1978)

Un'algebra locale reticolata che interviene nella teoria dei sistemi.

GABRIELE DARBO (*)

1. Considerazioni introduttive al concetto di sistema.

Il termine « sistema » è spesso usato per indicare certi oggetti fisici o relativi modelli matematici, talvolta come sinonimo di « macchina ». È strettamente collegata al concetto di sistema una certa totalità di segnali d'ingresso o input a cui il sistema fa corrispondere certi segnali di uscita o output.

Alcuni approcci alla teoria dei sistemi si fondano sul concetto di stato interno: un input entrante nel sistema si combina con lo stato interno, modificandolo e producendo in uscita un output corrispondente. Una tale impostazione può esser più adatta (ma forse non sempre) a descrivere le macchine digitali in cui gli input formano un monoide (ad esempio quello delle parole su un certo insieme di simboli) e analogamente per gli output.

Il punto di vista *comportamentistico* appare più conveniente per i sistemi cosiddetti analogici.

Seguendo questa via, un sistema è completamente descritto da una trasformazione dello spazio degli input nello spazio degli output senza far uso di alcuno spazio di stati interni, avendo questi un carattere convenzionale e per lo più non essendo accessibili all'osservazione. In questo caso i segnali sono funzioni del tempo e quindi sia lo spazio degli input sia quello degli output sono spazi funzionali.

(*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università - Vila L. B. Alberti 4 - Genova.

In seguito verrà usato il termine « sistema » per oggetti descritti dal punto di vista comportamentistico, il termine « macchina » essendo preferibile riservare agli oggetti descritti mediante stati interni.

Supporremo dunque che un sistema, per ora ancora non precisato come nozione teorica, sia completamente caratterizzato da una certa trasformazione funzionale

$$T: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$$

$\mathfrak{X}$ e $\mathfrak{Y}$ essendo gli spazi dei segnali d'ingresso e di uscita rispettivamente.

Naturalmente si richiederà che la trasformazione T soddisfi oltre che a certe condizioni di continuità, alla condizione di *non anticipatività*. Quest'ultima condizione esprime l'impossibilità, per un sistema, di previsione del futuro. Essa si precisa nella forma seguente:

« Siano $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$ due input (funzioni del tempo t) coincidenti fino all'istante t_0; allora gli autput corrispondenti Tx_1 e Tx_2 dovranno coincidere fino a t_0 ».

Si potrebbe aggiungere che la non anticipatività (come pure la continuità) è vista come conseguenza di un *principio di causalità*, non facile a precisarsi. Riteniamo comunque non opportuna la semplice identificazione di non anticipatività e « causalità ».

1.1. *Verso la nozione di universo di sistemi.*

Sia $\mathfrak{X}$ lo spazio delle funzioni reali C^∞ a supporto inferiormente limitato. Diremo che una successione di funzioni $x_n(t)$ converge verso la funzione nulla in $\mathfrak{X}$ se la successione (x_n) ha supporto inferiormente limitato *uniformemente* e inoltre la convergenza a zero è uniforme sugli intervalli limitati sia per le funzioni che per le derivate di ogni ordine.

La convergenza verso una funzione $x(t)$ sarà per definizione la convergenza a zero nel senso detto per la successione delle differenze $(x_n - x)$.

Gli operatori differenziali a coefficienti costanti operano su $\mathfrak{X}$ in modo « continuo » rispetto alla nozione di convergenza precedentemente definita.

Indicato con D l'operatore di derivazione, ogni operatore differenziale a coefficienti costanti è della forma $P(D)$ dove P è un polinomio. Lo spazio $\mathfrak{X}$ diviene così un $\mathbb{R}[D]$-modulo.

Poichè $\mathfrak{X}$ in quanto $\mathbb{R}[D]$-modulo è divisibile e privo di torsione, si può estendere la sua struttura algebrica a quella di spazio vettoriale sul corpo $\mathbb{R}(D)$ degli operatori differenziali fratti. Gli operatori differenziali fratti rappresentano quindi dei particolari « sistemi » lineari la cui *funzione di trasferimento* $f(s)$ è una funzione razionale.

È da notare che le funzioni di $\mathfrak{X}$ non sono tutte dotate di trasformata di Laplace. Tuttavia ha sempre significato l'operazione di convoluzione di un *segnale* $x \in \mathfrak{X}$ per la cosiddetta risposta all'impulso unitario che, per un operatore differenziale fratto, è una particolare distribuzione a supporto in $\mathbb{R}_+$.

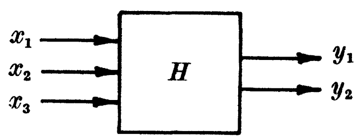
Si può osservare che ciascun operatore differenziale fratto opera con « continuità » su $\mathfrak{X}$, nel senso che commuta con il limite di successioni convergenti.

Aggiungiamo ancora che detti operatori sono invarianti per traslazione temporale (cioè commutano con le traslazioni nel tempo).

È molto conveniente, considerando reti di sistemi, descriverle mediante i cosiddetti diagrammi a blocchi. Si possono considerare sistemi a p ingressi e q uscite rappresentati da matrici di operatori. Ad esempio se H è una matrice a tre righe e due colonne in $\mathbb{R}(D)$ essa definisce un sistema a tre ingressi e due uscite

$$H: \mathfrak{X}^3 \to \mathfrak{X}^2$$

e viene rappresentato come segue

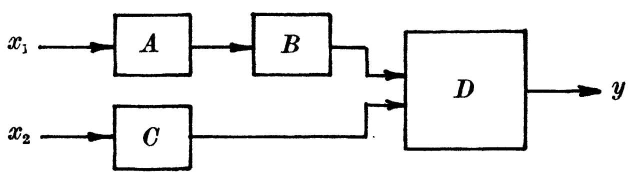


essendo

$$y_1 = H_{11}x_1 + H_{12}x_2 + H_{13}x_3 \,,$$

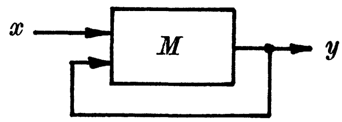
$$y_2 = H_{21}xt + H_{22}x_2 + H_{23}x_3 \,.$$

Una rete di sistemi, quando non contiene cicli (come la seguente)

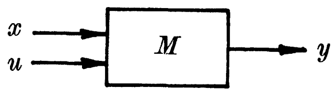


definisce sempre un sistema del tipo considerato. Non è così se vi sono cicli, i cosiddetti cicli di feedback, come nell'esempio seguente

(1)



Il sistema M (ad anello aperto) è a due ingressi ed una uscita



(2) $$y = M_1 x + M_2 u .$$

Il ciclo di feedback non è sempre atto a definire un nuovo sistema: si ha, se $M_2 \neq 1$, il sistema

$$y = u ,$$
$$y = M_1 x + M_2 u ,$$

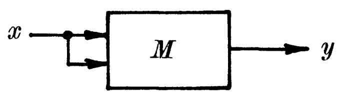
da cui eliminando u

$$y = \frac{M_1}{1 - M_2} x .$$

Se $M_2 = 1$ e $M_1 \neq 0$ il « sistema » (1) « accetta » solo l'input $x = 0$.
Se infine $M_2 = 1$ e $M_1 = 0$ l'output rimane indeterminato.

In questi casi il feedback non è una operazione ammissibile. Un'altra operazione è quella di *identificazione degli input*, che trasforma il sistema (2) nel seguente (3)

(3)



Come si vede, la costruzione di reti di sistemi è riconducibile alle seguenti tre operazioni.

a) *somma diretta*,

b) *identificazione*,

c) *operazione di feedback.*

Un universo di sistemi è una classe di sistemi chiusa rispetto alla formazione di reti arbitrarie, o, se si vuole, chiusa rispetto alle operazioni *a*), *b*), *c*).

Un esempio di universo di sistemi (lineari) è quello costituito dalle trasformazioni

$$T\colon \mathfrak{X}^q \to \mathfrak{X}^p$$

definite da una matrice $T = (T_{ij})$ di tipo $p \times q$ i cui elementi T_{ij} sono operatori differenziali fratti con funzione di trasferimento *razionale e nulla all'infinito.*

Gli operatori differenziali fratti con funzione di trasferimento nulla all'infinito costituiscono l'ideale massimo dell'algebra locale $\mathcal{K}$ delle funzioni razionali regolari all'infinito.

Ciò suggerisce di considerare lo spazio dei segnali (o più in generale le sue potenze dirette) come $\mathcal{K}$-moduli.

L'ammissibilità universale delle operazioni *a*), *b*), *c*) risulta immediata conseguenza del fatto che $\mathcal{K}$ è un'algebra locale. Nel caso attuale, ogni sistema ha la funzione di trasferimento nulla all'infinito; ciò si interpreta fisicamente colla proprietà di attenuazione delle alte frequenze, tipica di ogni sistema (filtro) fisicamente realizzabile. Questo è in qualche modo un carattere intimamente connesso al rapporto di causalità fra input e output ed è talvolta assunto come postulato.

In ciò che segue, mediante una opportuna scelta di un'algebra locale presenteremo lo strumento matematico adatto alla costruzione di universi di sistemi, anche non lineari, fisicamente significativi.

2. Nozioni fondamentali sui gruppi reticolati abeliani.

Per comodità del lettore, si riportano alcune nozioni fondamentali della teoria dei gruppi reticolati. Per maggiori approfondimenti si rinvia alla pubblicazione: Bigard et al., *Groupes et anneaux réticulés* (1977), [1].

2.1. Consideriamo un gruppo abeliano G munito di una relazione d'ordine $<$. Diremo che G è un *gruppo ordinato* se per ogni $a, b, x \in G$, $a < b \Rightarrow a + x < b + x$. L'insieme degli $x \in G$ tali che $x > 0$ è chiamato *cono positivo* di G. Viene indicato con G_+. Gli elementi di G_+ sono detti positivi.

La relazione $a \prec b$ è equivalente alla $b - a \in G_+$. L'ordine di G è completamente individuato dal cono positivo, purchè soddisfi le condizioni

$$G_+ + G_+ \subset G_+ , \qquad G_+ \cap G_- = \{0\} ,$$

dove si è posto $G_- = - G_+$.

È ovvio che un gruppo G è totalmente ordinato se e solo se

$$G = G_+ \cup G_- .$$

2.2. Def. *Dicesi gruppo reticolato un gruppo ordinato con ordinamento reticolare*: cioè un gruppo ordinato G per cui dati due elementi $a, b \in G$ esiste il minimo maggiorante $a \vee b$ e il massimo minorante $a \wedge b$.

2.3. In un gruppo reticolato valgono le seguenti relazioni (relazioni di cogredienza)

$$(a + c) \vee (b + c) = (a \vee b) + c ,$$

$$(a + c) \wedge (b + c) = (a \wedge b) + c .$$

Queste relazioni discendono dal fatto che la applicazione

$$x \mapsto x + c$$

è un automorfismo di reticolo.

Valgono altresì le relazioni

$$(-a) \vee (-b) = -(a \wedge b) ,$$

$$(-a) \wedge (-b) = -(a \vee b) .$$

2.4. Ricordiamo che un gruppo G è senza torsione se per ogni $\in G$ e n intero positivo,

$$nx = 0 \quad \text{implica} \quad x = 0 .$$

È immediato allora che *ogni gruppo reticolato è senza torsione*. Vale inoltre la seguente

PROPOSIZIONE. *Ogni gruppo reticolato è un reticolo distributivo; valgono cioè le relazioni*:

(1) $$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) ,$$

(2) $$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) .$$

Dimostriamo la (1) essendo la (2) deducibile per dualità.
Si ha intanto

$$x \vee (y \wedge z) < x \vee y ,$$

$$x \vee (y \wedge z) < x \vee z ,$$

da cui

(3) $$x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z) .$$

Poniamo $t = y \wedge z$. Si ha $y - t > 0$ dunque $x < x + t - t < t \vee x + y - t$. Poichè è

$$t \vee x - t > 0 , \qquad \text{ne segue che } y < (t \vee x) + y - t .$$

Perciò

(4) $$x \vee y < t \vee x + y - t ;$$

analogamente si dimostra che

(5) $$x \vee z < t \vee x + z - t .$$

Dalle (4) e (5), tenendo conto della relazione di cogredienza, segue

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) < (y \wedge z) \vee x ,$$

che assieme alla (3) porge la (1).

2.5. DEF. *Sia G un gruppo reticolato. Porremo per definizione, se $x \in G$,*

parte positiva di x $= P(x) = 0 \vee x$,

parte negativa di x $= N(x) = 0 \vee (-x)$,

valore assoluto di x $= |x| = x \vee (-x)$.

Risultano verificate le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
&x = P(x) - N(x) ,\\
&|x| = P(x) + N(x) = P(x) \vee N(x) ,\\
&P(x) > 0 ,\\
&N(x) > 0 ,\\
&P(x) \wedge N(x) = 0 ,\\
&|x| > 0 ,\\
&|x| = 0 \cdot\Leftrightarrow\cdot\; x = 0 ,\\
&|x + y| < |x| + |y| ,\\
&n \text{ intero positivo } \cdot\Rightarrow\cdot\; |nx| = n(x) ,\\
&|x \vee y| < |x| \vee |y| .
\end{aligned}$$

2.6. Diamo ancora alcune definizioni che ci serviranno in seguito:

DEF. *Un gruppo reticolato dicesi archimedeo se non contiene alcun sottogruppo limitato che non sia ridotto all'elemento neutro.*

DEF. *Sia G un gruppo reticolato. Un sottoinsieme $A \subset G$ diremo solido se per ogni $x \in A$ e $y \in G$ vale l'implicazione*

$$|y| < |x| \;:\Rightarrow:\; y \in A .$$

In particolare se A è un sottogruppo, si dirà sottogruppo solido se tale è in quanto sottoinsieme.

DEF. *Sia G un gruppo reticolato. Diremo che G è completo (risp. σ-completo) se ogni sottoinsieme limitato superiormente e non vuoto (numerabile) ha minimo maggiorante.*

Dunque ogni gruppo reticolato completo è σ-completo.
Valgono allora alcuni teoremi che riportiamo senza dimostrazione.

TEOREMA. *Ogni gruppo reticolato σ-completo è archimedeo.*

TEOREMA. *Ogni gruppo archimedeo G ammette un «completato» $\hat{G}$.*
Il completato $\hat{G}$ di G si costruisce con un procedimento alla Dedekind analogo a quello usato per completare il corpo razionale.

TEOREMA. *Ogni sottogruppo solido di un gruppo completo è completo.*

3. Su alcune algebre che intervengono nella teoria dei sistemi.

Nello studio dei sistemi causali, particolarmente nella teoria del feedback [2] e nella teoria dei dispositivi si presentano certe algebre locali dotate di struttura reticolare. Una di queste particolarmente significativa è un'algebra di convoluzione di misure. In ciò che segue si espongono alcuni aspetti fondamentali che possono costituire la base di possibili generalizzazioni.

3.1. In seguito indicheremo con $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei numeri reali positivi o nulli. Indicheremo con Λ la $\mathbb{R}$-algebra di convoluzione delle misure reali localmente finite aventi il supporto in $\mathbb{R}_+$.

Per definire quest'algebra si può seguire una via « più concreta » in cui una misura $\alpha \in \Lambda$ viene caratterizzata dalla sua funzione di ripartizione. Tale funzione il cui valore nel punto $\tau \in \mathbb{R}$ indicheremo con $\alpha(\tau)$, è una funzione a variazione limitata in ogni intervallo limitato, nulla per $\tau < 0$, potrà essere assunta continua a destra. Così le misure appartenenti a Λ, si pongono in corrispondenza bijettiva con le loro funzioni di ripartizione.

Il prodotto di convoluzione $\alpha\beta$ di due misure $\alpha, \beta \in \Lambda$ si lascia esprimere mediante l'integrale di Stieltjes come segue:

$$\alpha\beta(t) = \int \alpha(t-\tau)\, d\beta(\tau) .$$

Si trova che l'algebra Λ è associativa, commutativa e priva di divisori dello zero. Converrà identificare i numeri reali con le corrispondenti misure concentrate nello zero. In particolare il numero reale 1, si identifica con la misura di Dirac, la cui funzione di ripartizione $1(t)$ è il gradino unitario.

DEF. *Indicheremo con Λ_+ l'insieme delle misure positive di Λ.*

Il cono Λ_+ definisce un ordinamento reticolare su Λ. Una misura positiva è una misura la cui funzione di ripartizione è crescente. Ogni misura $\alpha \in \Lambda$ si decompone canonicamente nella differenza di misure positive: la corrispondente decomposizione delle funzioni di ripartizione è quella di Jordan. Detta $P(\alpha)$ la parte positiva di α, $N(\alpha)$ la parte negativa, si avrà:

$$N(\alpha) = P(-\alpha)$$

nonchè

$$\alpha = P(\alpha) - N(\alpha)$$

con $P(\alpha)$, $N(\alpha) \in \Lambda_+$.

Tramite la P si possono esprimere le operazioni reticolari $\vee$ e $\wedge$ come segue:

$$\alpha \vee \beta = \alpha + P(\beta - \alpha) = \beta + P(\alpha - \beta) ,$$

$$\alpha \wedge \beta = \alpha - P(\alpha - \beta) = \beta - P(\beta - \alpha) ,$$

nonchè il *valore assoluto* di α

$$|\alpha| = P(\alpha) + P(-\alpha) = P(\alpha) + N(\alpha) .$$

3.2. *Proprietà del valore assoluto.*

Il valore assoluto di una misura $\alpha \in \Lambda$ è una misura positiva avente per funzione di ripartizione la variazione totale:

$$|\alpha|(t) = \text{variazione totale di } \alpha(\tau) \text{ nell'intervallo } -\infty \dashv t .$$

Ponendo, come si è già fatto nei gruppi reticolati, se α, $\beta \in \Lambda$

$$\alpha > \beta \cdot\Leftrightarrow\cdot \alpha - \beta \in \Lambda_+$$

si possono esprimere alcune proprietà del valore assoluto, come segue: *per ogni* α, $\beta \in \Lambda$

1) $|\alpha| > 0$, $|\alpha| = 0 \cdot\Leftrightarrow\cdot \alpha = 0$,
2) $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$,
3) $|\alpha\beta| < |\alpha|\,|\beta|$,
4) *se* $\lambda \in \mathbf{R}$: $|\lambda\alpha| = |\lambda|\,|\alpha|$,
5) $|1| = 1$.

Ricordiamo che il numero reale 1 è stato identificato con la misura di Dirac (massa unitaria concentrata nell'origine).

Se $\alpha \in \Lambda$, il valore nel punto 0 della corrispondente funzione di ripartizione è

$$\alpha(0) \in \mathbf{R} \subset \Lambda .$$

La misura $\alpha - \alpha(0)$ è una misura priva di concentrazione nello zero. Si potrà sempre scomporre una misura α come segue:

$$\alpha = \alpha(0) + (\alpha - \alpha(0)) .$$

Oltre alle precedenti proprietà del valore assoluto è importante la seguente:

6) $|\alpha| = |\alpha(0)| + |\alpha - \alpha(0)|$.

È opportuno osservare che la notazione $|\alpha|$ non porta ad equivoci poichè se $\alpha \in \mathbf{R}$ il valore assoluto in quanto numero reale si identifica col valore assoluto in quanto misura.

3.3. *Seminorme e topologia in Λ.*

DEF. *Se $\alpha \in \Lambda$ porremo:*

$$|\alpha|_\tau = |\alpha|(\tau) , \qquad \tau \in \mathbf{R}_+ .$$

Sussistono le seguenti relazioni:

1) $|\alpha| < |\beta| \cdot\Rightarrow\cdot |\alpha|_\tau \leqslant |\beta|_\tau$,
2) $|\alpha + \beta|_\tau \leqslant |\alpha|_\tau + |\beta|_\tau$,
3) $\lambda \in \mathbf{R} \cdot\Rightarrow\cdot |\lambda\alpha|_\tau = |\lambda| \cdot |\alpha|_\tau$,
4) $|\alpha\beta|_\tau \leqslant |\alpha|_\tau \cdot |\beta|_\tau$,

per $\alpha, \beta \in \Lambda$, $\tau \in \mathbf{R}_+$.

Per definire una topologia in Λ si osservi che $|\cdot|_\tau$ al variare di τ in $\mathbf{R}_+$ descrive una famiglia di seminorme. Poichè $|\alpha|_\tau$ è funzione crescente di τ, basta far variare τ in $\mathbf{N}$ (cofinale in $\mathbf{R}_+$) per definire la medesima topologia. Tale topologia su Λ proviene anche da una metrica di Frechét data dalla distanza:

$$\operatorname{dist}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|\alpha - \beta|_n}{1 + |\alpha - \beta|_n} .$$

Con la topologia dianzi definita Λ diviene una $\mathbf{R}$-algebra topologica.

Per quanto riguarda la compatibilità tra topologia e struttura d'ordine sussiste il seguente

TEOREMA 1. *Il cono* Λ_+ *è chiuso in* Λ,

la cui dimostrazione è banale. Ne segue che la relazione d'ordine si conserva nel passaggio al limite.

TEOREMA 2. *L'algebra* Λ *è completa in quanto spazio metrico.*

TEOREMA 3. Λ *è un'algebra reticolata completa; cioè ogni parte* $A \subset \Lambda$ *non vuota e limitata superiormente (inferiormente) ammette minimo maggiormente (risp. massimo minorante).*

Dunque Λ è un'algebra archimedea.
In seguito avremo bisogno di alcuni lemmi:

LEMMA 1. *Per ogni* $\alpha \in \Lambda$ *e per ogni reale* $\varepsilon > 0$ *esiste una decomposizione del tipo*

$$\alpha = \mu + \sigma$$

tale che

$$\text{supporto di } \mu \subset 0 \vdash\!\dashv \varepsilon\,,$$

$$\text{supporto di } \sigma \subset \varepsilon \vdash + \infty\,.$$

Le misure μ e σ, caretterizzate dalle funzioni di ripartizione seguenti:

$$\begin{cases} \mu(t) = \alpha(t) & \text{per } t < \varepsilon \\ \mu(t) = \alpha(\varepsilon) & \text{per } t \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma(t) = 0 & \text{per } t < \varepsilon \\ \sigma(t) = \alpha(t) - \alpha(\varepsilon) & \text{per } t \geqslant \varepsilon\,, \end{cases}$$

soddisfano le condizioni richieste.

DEF. *Per* $\alpha \in \Lambda$ *poniamo*:

$j(\alpha) =$ minimo del supporto di α *se il supporto non è vuoto*.

Altrimenti:

$$j(\alpha) = + \infty\,.$$

LEMMA 2. *Se $\alpha, \beta \in \Lambda$ si ha*

1) $j(\alpha+\beta) \geqslant \min(j(\alpha), j(\beta))$,

2) $j(\alpha\beta) = j(\alpha) + j(\beta)$,

3) $|\alpha| < |\beta| \cdot\Rightarrow\cdot j(\alpha) \geqslant j(\beta)$.

Dimostrazione banale.

LEMMA 3. *Se (β_n) è una successione in Λ tale che*

$$\lim_{n\to+\infty} j(\beta_n) = +\infty$$

allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$ è convergente.

Infatti, posto

$$\sigma_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \beta_k ,$$

per ogni $\tau \in \mathbf{R}_+$ si ha

$$|\sigma_{n,p}|_\tau = 0$$

per n abbastanza grande e p qualunque, in virtù della 1) del Lemma 2.

DEF. *Diremo che un elemento $\alpha \in \Lambda$ è quasi-nilpotente se*

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = 0 .$$

Possiamo ora dimostrare il

TEOREMA 4. *Sia $\alpha \in \Lambda$. Le seguenti condizioni a), b), c) sono equivalenti:*

a) $|\alpha|_0 < 1$,

b) α è quasi nilpotente,

c) la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n$ converge.

Dimostriamo che *a*) $\Rightarrow$ *b*).

Possiamo prendere h reale tale che

$$|\alpha|_0 < h < 1 .$$

Poichè $|\alpha|_\tau$ è funzione di τ continua a destra esiste un reale $\varepsilon > 0$ tale che

$$|\alpha|_\varepsilon \leqslant h\,.$$

Consideriamo, per tale ε la decomposizione

$$\alpha = \mu + \sigma$$

con le proprietà descritte nel Lemma 1.

Si ha

$$|\mu|_\varepsilon = |\mu|_\infty \leqslant h$$

nonchè

$$j(\sigma) \geqslant \varepsilon$$

inoltre è

$$\alpha^n = (\mu + \sigma)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu^{n-k}\sigma^k$$

da cui

$$|\alpha^n|_\tau \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k} |\sigma|_\tau^k\,.$$

Qualunque sia τ fissato in $\mathbf{R}_+$, sia m intero positivo tale che

$$m\varepsilon > \tau\,,$$

allora per ogni $n \geqslant m$ si ha

$$|\alpha^n|_\tau \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^{n-k} |\sigma|_\tau^k \leqslant h^{n-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} h^{m-k} |\sigma|_\tau^k \leqslant$$
$$\leqslant h^{n-m}\, n^m \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} |\sigma|_\tau^k \leqslant h^{n-m} n^m \exp\left(|\sigma|_\tau\right)\,.$$

Quindi per ogni $n \geqslant m$ e p qualunque

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha^k|_\tau \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} h^{n-m} n^m \exp\left(|\sigma|_\tau\right)\,.$$

Ciò significa che la serie reale

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha^k|_\tau$$

converge, qualunque sia $\tau \in \mathbf{R}_+$. Per la completezza di Λ (rispetto alla metrica) risulta convergente la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k .$$

L'implicazione $c) \Rightarrow b)$ si dimostra nel modo consueto, mentre l'implizione $b) \Rightarrow a)$ è conseguenza della continuità del morfismo (di $\mathbf{R}$-algebre topologiche)

$$\alpha \mapsto \alpha(0) : \Lambda \to \mathbf{R}$$

che porta, ovviamente, quasi-nilpotenti di Λ in quasi-nilpotenti di $\mathbf{R}$.

Possiamo ora dimostrare il teorema fondamentale seguente:

TEOREMA 5. *Se $\beta \in \Lambda$ e $\beta(0) \neq 0$, β è invertibile.*

Infatti se poniamo

$$\alpha = 1 - \frac{\beta}{2\beta(0)}$$

avremo

$$|\alpha|_0 = \tfrac{1}{2}$$

e quindi in virtù del Teorema 3 la serie geometrica di ragione α converge.

Posto

$$\xi_n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{n-1} ,$$

$$\xi = \lim_{n \to +\infty} \xi_n ,$$

dall'identità

$$(1 - \alpha)\xi_n = 1 - \alpha^n ,$$

passando al limite per $n \to +\infty$ risulta

$$(1 - \alpha)\xi = 1 .$$

pertanto ξ è l'inverso di $1 - \alpha$ e $2\beta(0)\xi$ è l'inverso di β.

COROLLARIO. *L'algebra Λ è un'algebra locale e l'ideale massimo J è costituito dagli elementi $\alpha \in \Lambda$ tali che $\alpha(0) = 0$.*

Infatti J è il nucleo del morfismo di $\mathbb{R}$-algebra $\alpha \mapsto \alpha(0): \Lambda \to \mathbb{R}$ ed è quindi un ideale massimale. Essendo ogni elemento del complementare invertibile, ne segue che J è ideale massimo in Λ.

Si noti che Λ si presenta (in quanto $\mathbb{R}$-spazio vettoriale reticolato) come somma diretta $\mathbb{R} \oplus J$ di sottospazi *ortogonali*, come risulta dalla relazione (6) di 3.2.

3.4. Osservazione. L'insieme J_a delle misure di Λ assolutamente continue è un ideale chiuso (e solido) di Λ. Detta Λ_a l'$\mathbb{R}$-algebra generata da J_a, anche Λ_a è un'algebra locale e nell'ordinamento subordinato è un'algebra reticolata completa sia reticolarmente che metricamente.

L'algebra Λ_a ha un indubbio interesse nelle applicazioni poichè si identifica con la chiusura della sottoalgebra degli operatori differenziali fratti la cui funzione di trasferimento è regolare all'infinito.

Si può anche considerare l'ideale J_c delle misure di Λ continue (cioè prive di atomi) e la corrispondente sottoalgebra Λ_c avente J_c come ideale massimo, ecc.

In generale ogni ideale chiuso e solido di Λ genera una sottoalgebra locale reticolata completa sia reticolarmente che metricamente avente quell'ideale come ideale massimo.

Esercizi:

1) Il cono Λ_+ è privo di punti interni.

2) Ogni «segmento» di Λ è compatto.

3) Ogni successione di Cauchy in Λ contiene una sottosuccessione reticolarmente limitata.

4) Ogni successione (β_n) in Λ, crescente e superiormente limitata converge e si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \beta_n = \bigvee_n \beta_n .$$

5) Se $\alpha \in \Lambda$, $j(\alpha) > 0$ allora qualunque sia la successione (c_n) di elementi di Λ, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha^n$$

converge.

6) Se $\alpha \in \Lambda$ e $\alpha(0)$ è interno all'intervallo di convergenza della serie $\sum_n a_n x^n$ a coefficienti reali, anche la serie $\sum_n a_n \alpha^n$ converge.

7) Sia f una funzione analitica reale in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}$; definire opportunamente $f(\alpha)$ per $\alpha \in \Lambda$ e $\alpha(0) \in \Omega$.

8) Studiare il gruppo moltiplicativo di Λ servendosi della funzione esponenziale.

9) Se ε è un numero reale strettamente positivo, l'insieme

$$I_\varepsilon = \{x | x \in \Lambda \quad \& \quad j(x) \geqslant \varepsilon\}$$

è un ideale di Λ. Inoltre è

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (I_\varepsilon)^n = \{0\} .$$

10) Se $\alpha < 1$ e $\alpha(0) > 0$ allora $1/\alpha < 1$.

4. Spazi pseudo-metrici.

DEF. *Sia X un insieme. Diremo pseudo-metrica su X una applicazione*

$$\varrho \colon X \times X \to \Lambda_+$$

per la quale sono soddisfatte le seguenti proprietà

1) $\varrho(x, y) = 0 \cdot\Leftrightarrow\cdot x = y,$

2) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x),$

3) $\varrho(x, z) < \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$

qualunque siano $x, y, z \in X$.

DEF. *Un insieme X munito di una pseudo-metrica, si dirà spazio pseudo-metrico.*

Sia X uno spazio pseudo-metrico (con pseudo-metrica ϱ); allora porremo:

$$\operatorname{dist}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\varrho(x, y)(n)}{1 + \varrho(x, y)(n)} .$$

La funzione dist (x, y) è una metrica (reale) che chiameremo metrica associata alla pseudo-metrica ϱ.

Diremo che uno spazio pseudo-metrico è completo, se tale è rispetto alla metrica associata.

4.1. *Applicazioni pseudo-lipschitziane tra spazi pseudo-metrici.*

DEF. *Sia $f\colon X \to Y$ una applicazione tra spazi pseudo-metrici. Diremo che f è pseudo-lipschitziana se esiste una costante $L \in \Lambda_+$ tale che per $x_1, x_2 \in X$ si abbia*

$$\varrho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < L\varrho(x_1, x_2) .$$

Si è indicato sempre con lo stesso simbolo ϱ le pseudo-metriche nei rispettivi spazi. Ciò faremo anche in seguito se il contesto evita gli equivoci. La costante L si dirà costante di Lipschitz.

4.2. OSSERVAZIONE. Una applicazione pseudo-lipschitziana è sempre continua (e anzi uniformemente) rispetto alle metriche associate. Non è in generale lipschitziana rispetto a queste.

DEF. *Diremo che una applicazione pseudo-lipschitziana f di uno spazio pseudo-metrico X in sè è una pseudo-contrazione se f ammette una costante di Lipschitz L quasi nilpotente $\big($cioè tale che $|L|_0 < 1\big)$.*

Possiamo ora dimostrare il seguente

TEOREMA 6 (del punto fisso). *Se X è uno spazio pseudo-metrico completo e $f\colon X \to X$ è una pseudo-contrazione allora la f ha uno ed un solo punto fisso in X.*

La dimostrazione è quella standard: sia $x_0 \in X$; poniamo per $n \geqslant 0$

$$x_{n+1} = f(x_n) .$$

Si ha quindi per ogni n

$$\varrho\big(f(x_{n+1}), f(x_n)\big) < L\varrho(x_{n+1}, x_n)$$

cioè

$$\varrho(x_{n+2}, x_{n+1}) < L\varrho(x_{n+1}, x_n)$$

da cui, tenendo conto della relazione triangolare

$$\varrho(x_{n+p}, x_n) < \sum_{k=n}^{n+p} L^k \varrho(x_1, x_0) < \frac{L^n}{1-L} \varrho(x_1, x_0) .$$

Poichè L può assumersi quasi-nilpotente, la successione (x_n) è di Cauchy e per la completezza di X converge verso un punto $\bar{x}$ fisso per la f.

Per quanto riguarda l'unicità, supponiamo che $\bar{x}$ e $\bar{\bar{x}}$ siano punti fissi. Allora

$$\varrho(f(\bar{x}), f(\bar{\bar{x}})) < L\varrho(f(\bar{x}, \bar{\bar{x}})) ,$$

ossia

$$\varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < L\varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < L^2 \varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < \dots$$

cioè per ogni n

$$\varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < L^n \varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}})$$

al limite, per $n \to +\infty$

$$\varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) < 0$$

e per l'antisimmetria dell'ordine

$$\varrho(\bar{x}, \bar{\bar{x}}) = 0$$

da cui

$$\bar{x} = \bar{\bar{x}} .$$

4.3. *Prodotti di spazi pseudo-metrici.*

DEF. *Siano X e Y spazi pseudo-metrici. Il prodotto cartesiano $X \times Y$ si intenderà munito della pseudo-metrica seguente:*

$$\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \varrho(x_1, x_2) + \varrho(y_1, y_2) .$$

TEOREMA 7. *Il prodotto di spazi pseudo-metrici completi è uno spazio pseudo-metrico completo.*

Basta osservare che sussistono le seguenti diseguaglianze per le rispettive metriche associate:

$$\text{dist}(x_1, x_2) \leqslant \text{dist}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) ,$$

$$\text{dist}(y_1, y_2) \leqslant \text{dist}((x, y), (x_2, y_2)) ,$$

essendo $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$, per cui una successione di Cauchy in $X \times Y$ si proietta su X e su Y in successioni di Cauchy.

4.4. *Dipendenza del punto fisso da un parametro.*

Siano X e Y spazi pseudo-metrici e

$$f\colon X \times Y \to Y$$

una applicazione pseudo-lipschitziana.

Se $L_1, L_2 \in \Lambda_+$ sono due costanti tali che

$$\varrho\big(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)\big) < L_1 \varrho(x_1, x_2) + L_2 \varrho(y_1, y_2)$$

per $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$, diremo che L_1 e L_2 sono costanti di Lipschitz parziali.

Se L_2 è quasi-nilpotente, l'applicazione

$$f(x, -)\colon Y \to Y$$

è una pseudo-contrazione dipendente dal parametro $x \in X$. Se Y è completo, il punto fisso di detta pseudo-contrazione sarà funzione di x, diciamo $\varphi(x)$. Allora l'applicazione

$$\varphi\colon X \to Y$$

è pseudo-lipschitziana con costante $L_1/(1 - L_2)$.

4.5. *Spazi pseudo-normati.*

DEF. *Sia $\mathfrak{X}$ un Λ-modulo. Diremo pseudo-norma una applicazione*

$$\|-\|\colon \mathfrak{X} \to \Lambda_+$$

soddisfacente le seguenti condizioni:

1) $\|x\| = 0 \cdot\Leftrightarrow\cdot x = 0$,
2) $\|x + y\| < \|x\| + \|y\|$,
3) $\|\alpha x\| < |\alpha|\, \|x\|$,
4) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ *se* $\lambda \in \mathbb{R}$,

dove $x, y \in \mathfrak{X}$ e $\alpha \in \Lambda$.

Un Λ-modulo $\mathfrak{X}$ munito di una pseudo-norma diremo spazio pseudo-normato.

È chiaro che in uno spazio pseudo-normato si ha una pseudometrica ponendo

$$\varrho(x, y) = \|x - y\| , \qquad x, y \in \mathfrak{X} .$$

4.6. Osservazione. Ogni spazio normato (sul corpo reale) può essere considerato, in modo canonico come spazio pseudo-normato, in quanto il morfismo di $\mathbf{R}$-algebra $\Lambda \to \mathbf{R}$ gli conferisce una struttura di Λ-modulo e la norma (a valori in $\mathbf{R}_+$) è anche pseudo-norma, essendo $\mathbf{R}_+ \subset \Lambda_+$.

La metrica associata è una metrica di Frechét.

4.7. *Esempi di spazi pseudo-normati.*

Ovviamente Λ si può considerare come spazio pseudo-normato, la pseudo-norma essendo il valore assoluto. Analogamente ogni ideale di Λ è uno spazio pseudo-normato. Altri esempi si possono ottenere mediante somme dirette definendo la pseudo-norma come somma delle pseudo-norme dei componenti.

4.8. *Morfismi tra spazi pseudo-normati.*

Def. *Siano $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ spazi pseudo-normati; diremo morfismo Λ-lineare ogni applicazione*

$$f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$$

che sia morfismo di Λ-modulo ed esista una costante $L \subset \Lambda_+$ tale che per ogni $x \in \mathfrak{X}$ si abbia:

$$\|f(x)\| \prec L\|x\| .$$

È ovvio che ogni morfismo Λ-lineare è pseudo-lipschitziano in quanto applicazione tra spazi pseudo-metrici e quindi continuo uniformemente rispetto alle metriche associate. È altresì evidente che i morfismi Λ-lineari formano una categoria. Di questa categoria, una importante sottocategoria piena è quella individuata dagli spazi pseudo-normati completi.

Un ampliamento della categoria dei morfismi Λ-lineari è costituito dalla categoria dei morfismi pseudo-lipschitziani. Quest'ultima è la più ampia categoria che ci interessa considerare. Per l'applicazione alla teoria dei sistemi ha interesse una categoria intermedia formata da quei morfismi lipschitziani che mandano lo zero nello zero e che commutano, con i «ritardi» cioè col prodotto per le misure di Dirac; tutti i morfismi Λ-lineari sono di questo tipo.

4.9. *Somme dirette di spazi pseudo-normati.*

DEF. *Sia* $(\mathfrak{X}_i)_{i\in J}$ *una famiglia finita di spazi pseudo-normati. Definiamo uno spazio pseudo-normato dotando la somma diretta*

$$\mathfrak{X} = \bigoplus_{i\in J} \mathfrak{X}_i$$

della pseudo-norma

$$\|x\| = \sum_{i\in J} \|x_i\|$$

per un generico elemento $x = (x_i)$ *di* $\mathfrak{X}$.

Ovvia è la definizione di somma diretta di morfismi, con evidenti proprietà funtoriali.

Interesserà in particolare la potenza di uno spazio pseudo-normato

$$\mathfrak{X}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{X} .$$

È da notare che la somma diretta di spazi pseudo-normati completi è ancora uno spazio completo.

5. Costruzione di universi di sistemi.

Per concludere facciamo una applicazione delle cose dette alla costruzione di universi di sistemi.

Sia $\mathfrak{X}$ uno spazio pseudo-normato *completo* che chiameremo *spazio dei segnali.* Definiamo un *sistema* a p ingressi e q uscite come un morfismo pseudo-lipschitziano

$$T: \mathfrak{X}^p \to \mathfrak{X}^q$$

che ammetta una costante di Lipschitz appartenente all'ideale massimo J.

È immediato che la totalità dei sistemi del tipo dianzi definito è chiusa rispetto alle tre operazioni *a*), *b*), *c*) di cui si è accennato nella parte prima, e quindi rispetto alla formazione di reti. Abbiamo così un universo che, essendo completamente determinato dalla assegnazione dello spazio dei segnali, indicheremo con $\mathcal{S}(\mathcal{X})$.

Rimanendo a questo livello di generalità possiamo caratterizzare il sottouniverso $\mathcal{S}_{\mathrm{inv}}(\mathcal{X})$ costituito dai sistemi invarianti nel tempo.

Tali sistemi sono quelli caratterizzati da un morfismo T che commuta con il prodotto per le misure di Dirac:

$$T\delta_a = \delta_a T$$

dove δ_a indica la misura di Dirac concentrata nel punto $a \in \mathbf{R}_+$.

Questa definizione è suggerita dal fatto che il prodotto per δ_a di un segnale è interpretato come un ritardo nel tempo. Imporremo inoltre al morfismo T di *trasformare un segnale nullo in un segnale nullo.*

Che questa definizione di sistema invariante sia «buona» lo si potrà constatare con alcune scelte particolari dello spazio dei segnali $\mathcal{X}$.

Una scelta è $\mathcal{X} = \Lambda$, essendo Λ (con pseudo-norma il valore assoluto) uno spazio pseudo-normato completo.

Il fatto di considerare solo i segnali a supporto in $\mathbf{R}_+$, se ci si riferisce ai sistemi invarianti, non costituisce una vera limitazione; infatti l'estensione della trasformazione T allo spazio dei segnali a supporto inferiormente limitato è univocamente determinato dalla T stessa e quindi non fornisce ulteriori informazioni sul sistema stesso.

Un'altra scelta è $\mathcal{X} = J_a$, essendo J_a l'ideale delle misure assolutamente continue. Essendo J_a chiuso in Λ, esso è un Λ-modulo completo (assumendo come pseudo-norma il valore assoluto). Questa volta le misure di J_a sono in corrispondenza biunivoca con le loro densità. Esiste insomma un ovvio isomorfismo tra J_a e lo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$ delle funzioni misurabili, localmente sommabili a supporto in $\mathbf{R}_+$ (modulo quelle quasi ovunque nulle).

Questo spazio ha il vantaggio di essere separabile (rispetto alla metrica associata).

Ogni funzione lipschitziana reale

$$f\colon \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$$

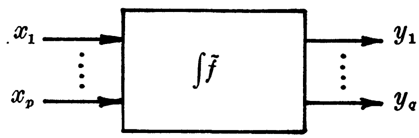
si può estendere univocamente ad una funzione

$$\tilde{f}\colon \mathcal{X}^p \to \mathcal{X}^q .$$

Intendendo l'estensione $\tilde{f}$ come funzione composta di f con la p-upla delle densità dei segnali.

L'applicazione $\tilde{f}$ risulta così pseudo-lipschitziana con le medesime costanti Lipschitz (parziali) della f.

Componendo $\tilde{f}$ con qualunque moltiplicatore appartenente all'ideale J si ottiene sempre un sistema. In particolare l'elemento la cui funzione di ripartizione è la cosiddetta « rampa lineare » opera come un *integratore* ed appartiene a J. Questo particolare elemento di J lo possiamo indicare con « $\int$ ». Si hanno così sistemi del tipo



dai quali con operazioni di composizione in rete si ottengono nuovi sistemi appartenenti all'universo $\mathcal{S}_{\text{inv}}(J_a)$.

Si noti come mediante semplici operazioni di feedback a partire da sistemi del tipo precedente si ottengono sistemi descrivibili mediante equazioni differenziali per le quali l'esistenza e l'unicità delle soluzioni (output) risulta a priori garantita.

6. Alcune considerazioni.

Possiamo affermare che l'analisi si fonda su un « buon impasto » di strutture algebriche, topologiche e di ordine. Queste strutture sono presenti nel corpo reale. Tuttavia abbiamo visto che l'algebra Λ gode di proprietà algebriche, topologiche e di ordinamento, che permettono di sviluppare, generalizzandole, alcune teorie tipiche dell'analisi. Si potrebbero fare numerosi altri esempi di algebre sulle quali si possono basare sviluppi analoghi. Alcune di queste sono costruibili come algebre di convoluzione di misure multidimensionali a supporto in un certo cono convesso di $\mathbb{R}^n$ (interpretabile ad esempio come cono del futuro nella relatività). In genere su queste algebre si può istituire un *calcolo operazionale* (per mezzo di sviluppi in serie di potenze) particolarmente interessante soprattutto se trasportato nel campo complesso previo processo di complessificazione.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Bigard - K. Keinel - S. Wolfenstein, *Groupes et anneaux réticulés*, Springer-Verlag (1977).

[2] J. C. Willems, *The Analysis of Feedback Systems*, M.I.T. Research Monograph no. 62 (1971).

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 gennaio 1979.